بسم الله الرحمن الرحیم

بسم الله الرحمن الرحیم

بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۳۸۰۳۷

دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (جبر)

عنوان:

گروه های پوششی تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر محمد مهدی نصرآبادی

استاد مشاور:

دکتر حسین اقدامی

نگارنده:

سمیه هادیزاده قوچانی

تابستان ۱۳۸۷

فرم شماره ۵

به نام خدا

دانشگاه بیرجند

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تاریخ : ....

شماره : ....

پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تاییدات خداوند متعال جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد **خانم سمیه هادیزاده قوچانی**

به شماره دانشجویی: **۸۵۲۳۱۱۲۰۵٤** رشته: **ریاضی** گرایش: **جبر** دانشکده: **علوم** دانشگاه بیرجند

تحت عنوان :

" گروههای پوششی تعمیم یافته "

به ارزش: ٦ واحد درساعت: ۸/۳۰ روز: **یکشنبه** مورخ: **۸۷/٦/۲٤**

با حضور اعضای محترم جلسه دفاع و نماینده تحصیلات تکمیلی به شرح ذیل تشکیل گردید :

سمت	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	آقای دکتر محمدمهدی نصرآبادی	استادیار	
استاد مشاور	آقای دکترحسین اقدامی	استادیار	
داور اول	آقای دکتر محمد حسین حسینی	استادیار	
داور دوم	آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر علیرضا جانفدا	استادیار	

نتیجه ارزیابی به شرح زیر مورد تایید قرار گرفت:

☑ قبول (با درجه: عالی و امتیاز: ۱۹ (نوزده)) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱- عالی (۲۰-۱۸) ۲- بسیار خوب (۱۷/۹۹ – ۱٦) ۳- خوب (۱۵/۹۹ – ۱۴) ۴- قابل قبول (۱۳/۹۹ – ۱۲)

تقدیم به روح بلند برادرم، علیرضا، و تقدیم به استاد گرانقدر، آقای محمدرضا فلکی که درس های بسیاری در محضر این دو بزرگوار آموختم.

با نام و یاد کسی آغاز می کنم که عشق به آموختن را در وجودم نهادینه کرد و در راه علم آموزی همواره از او استعانت جستم.

حال که با یاری او این مرحله از فراگیری دانش را نیز به پایان رساندم، بر خود واجب می دانم که از اساتید، خانواده و دوستانی که مرا در این راه، مورد لطف خود قرار داده اند، سپاسگذاری نمایم.

از پدر، مادر وبرادرانم— حسین و سعید- ،اعضای خانواده بزرگوار و عزیزم،که اگر یاری های بی دریغشان در تمام جوانب به من نمی رسید، مسلما این موفقیت به دست نمی آمد؛ از استاد راهنمای محترمم، آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی که از راهنمایی های ایشان در طی این کار و همچنین در طول این دوره تحصیلی بهره های فراوان بردم؛ از استاد مشاور گرامیم، آقای دکتر حسین اقدامی که لطف ایشان شامل حال بنده بود؛ از داوران گرانقدر این پایان نامه، آقایان فضائلی و حسینی که مرحمت فرموده و مطالعه این نوشته را بر عهده گرفتند و از همه عزیزانی که مشوق من برای ادامه این راه بودند، نهایت تشکر و امتنان را دارم و از خداوند منان برای همه این عزیزان خیر و برکت فراوان مسئلت دارم.

سمیه هادیزاده

۸۷/۶/۳۰

چکیده

فرض کنید $\mathcal{V}$ و $\mathcal{W}$ دو واریته از گروه ها، به ترتیب تعریف شده توسط مجموعه قوانین V و W باشند. در این پایان نامه بعضی گروه هایی را ارائه می کنیم که هیچ گروه $\mathcal{V}$- پوششی نسبت به واریته $\mathcal{N}_c$ ، $c \geq 2$، ندارند. همچنین در مورد وجود گروه های $\mathcal{N}_c$- پوششی از بعضی از گروه ها، بحث خواهیم کرد.

نشان می دهیم که هر دو گروه $\mathcal{V}$- پوششی از یک گروه معین، نسبت به واریته $\mathcal{V}$، $\mathcal{V}$- ایزولجیک هستند و یک گروه $\mathcal{V}$- پوششی از یک گروه $\mathcal{V}$- کامل متناهی می سازیم. سپس مفهوم گروه $\mathcal{W}$-$\mathcal{V}$- پوششی را معرفی و تعمیمی از موارد ذکر شده، ارائه می کنیم.

معیاری در مورد وجود گروه های $\mathcal{V}$- پوششی از یک گروه $\mathcal{V}$-کامل ارائه می کنیم. نشان می دهیم که هر خودریختی از یک گروه $\mathcal{V}$-کامل مانند G، می تواند به یک خودریختی از گروه $\mathcal{V}$- پوششی G^* از گروه G ارتقا یابد و در حالتی که $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ است، به تعمیم موارد فوق می پردازیم.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان نامه، در چهار فصل تنظیم شده است. فصل اول، شامل ۱۰ بخش است و به معرفی تعاریف و اصطلاحات وقضایایی می پردازد که ابزار اساسی برای اثبات قضایای فصول بعدی می باشند. به ویژه مفاهیم نمایش آزاد گروه ها، زیرگروه های شفاهی و حاشیه ای و واریته گروه ها تعریف می شوند. زیرگروه $\left[NV^*G\right]$ معرفی و برای واریته گروه های آبلی و واریته گروه های پوچ توان از رده حداکثر c ارائه می شود. همچنین مفاهیم ضربگر شور، پایای بئر، پوشش تنه ای، گروه پوششی و واریته های شور- بئر معرفی می شوند.

فصل دوم، شامل سه بخش است. بخش اول به معرفی جابجاگرهای اساسی می پردازد و برای یک گروه آبلی متناهی، پایای بئر را نسبت به واریته گروه های پوچ توان از رده حداکثر c، با توجه به تعداد جابجاگرهای اساسی از وزن $c+1$ به دست می آورد. همچنین بررسی می شود که یک گروه آبلی متناهی، در چه شرایطی گروه $\mathcal{N}_c$- پوششی ندارد و در آخر حاصل ضرب های آزاد، شفاهی، منظم و پوچ توان دوم برای خانواده ای از زیرگروه های یک گروه دلخواه تجزیف می شوند.

بخش دوم به بررسی این مهم می پردازد که چه موقع یک گروه دلخواه، گروه $\mathcal{N}_c$- پوششی دارد و همچنین شرایط وجود یا عدم وجود گروه $\mathcal{N}_c$- پوششی برای گروه های پوچ توان و آبلی بررسی میشوند.

در بخش سوم، ابتدا گروه های $\mathcal{V}$- آزاد، واریته شرایر و گروه های $\mathcal{V}$- شکافنده معرفی می شوند و اثبات می شود که اگر $\mathcal{V}$، یک واریته شرایر باشد، آنگاه هر گروه، یک گروه $\mathcal{V}$- پوششی دارد.

فصل سوم، شامل سه بخش است. بخش اول به تعریف توسیع های $\mathcal{V}$- تحویل ناپذیر و $\mathcal{V}$- اولیه می پردازد و شرطی لازم و کافی برای این که یک توسیع، $\mathcal{V}$- تحویل ناپذیر باشد، ارائه می دهد.

در بخش دوم، گروه $\mathcal{V}$- ایزولجیک معرفی و قضایایی در مورد آن بیان می شود.

در بخش سوم، خواصی از گروه های $\mathcal{V}$- پوششی از یک گروه $\mathcal{V}$-کامل متناهی بررسی شده است.

فصل چهارم شامل چهار بخش است. در بخش اول، برای یک گروه دلخواه واقع در واریته ω، پایای بئر نسبت به دو واریته $\mathcal{V}$ و ω و همچنین گروه $\omega-\mathcal{V}$- پوششی معرفی شده است و قضایایی در مورد آن ها بیان می شود. همچنین قضایایی در مورد گروه های $\omega-\mathcal{V}$- پوششی از یک گروه $\mathcal{V}$- کامل ارائه می شود.

در بخش دوم، با فرض این که رابطه $\mathcal{V} \subseteq \omega$، بین دو واریته $\mathcal{V}$ و ω برقرار باشد، قضایایی در مورد گروه های $\omega-\mathcal{V}$- پوششی از یک گروه $\mathcal{V}$- کامل متناهی واقع در واریته ω، اثبات می شود.

در بخش سوم، با فرض این که $\mathcal{V}$ و ω دو واریته دلخواه باشند، قضایایی در مورد گروه های $\omega-\mathcal{V}$- پوششی از یک گروه $\mathcal{V}$- کامل متناهی واقع در واریته ω بیان می شود.

در بخش چهارم، توسیع های $\omega-\mathcal{V}$- تحویل ناپذیر و $\omega-\mathcal{V}$- اولیه معرفی و قضایایی در مورد آن ها ارائه شده است.

فصل اول

تعاریف مقدماتی و پیش نیازها

در این فصل به معرفی نمادها و اصطلاحاتی پرداخته شده است که در طول این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند. همچنین تعاریف وقضایایی بیان شده است که ابزار اساسی برای اثبات قضایای ارائه شده در فصول بعدی هستند. مخصوصاً مفاهیم واریته گروه ها، پایای بئر، پوشش $\mathcal{V}$- تنه ای و گروه $\mathcal{V}$- پوششی تعریف شده است. زیر گروه های شفاهی و حاشیه ای معرفی و به برخی از خواص آن ها اشاره شده است. در ضمن، در این فصل از مراجع [۱]، [۲]، [۷]، [۸]، [۱۰]، [۱۵]، [۱۸]، [۲۱]، [۲۲]، [۲۳] و [۲۴] استفاده شده است.

۱-۱ توسیع ها و خواص آن ها

تعریف ۱-۱-۱. اگر

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

دنباله ای از گروه ها و همریختی ها باشد، به طوری که به ازای هر n،

$$\ker f_n = \operatorname{Im} f_{n-1} ,$$

آنگاه این دنباله را دنباله دقیق می نامیم.

دنباله دقیق

$$1 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow 1$$

را دنباله دقیق کوتاه می نامیم.

تعریف ۱-۱-۲. دنباله دقیق کوتاه

$$1 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow 1$$

را یک توسیع از A_1 به وسیله A_3 می نامیم.

در واقع داریم $A_3 \cong \dfrac{A_2}{A_1}$.

به اختصار A_2 نیز یک توسیع از A_1 به وسیله A_3 نامیده می شود، در صورتی که دنباله دقیق کوتاه فوق موجود باشد.

تعریف ۱-۱-۳. توسیع B از گروه A به وسیله C، یک توسیع شکافنده نامیده می شود، اگر برای دنباله دقیق کوتاه

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$$

یک همریختی مانند $h : C \to B$ موجود باشد، به طوری که $gh = id_C$.

تعریف ۱-۱-٤. دو دنباله دقیق کوتاه را یکریخت گوییم، در صورتی که نموداری جابجایی از همریختی های گروه ها، مانند

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 1 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

موجود باشد، به طوری که f و g و h یکریختی باشند.

در این حالت به آسانی تحقیق می شود که نمودار

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle g^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle h^{-1}} & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

(با همان نگاشتهای افقی) نیز جابجایی است. در واقع، یکریختی دنباله های دقیق کوتاه، یک رابطه هم ارزی است.

قضیه ۱-۱-۵. دنباله دقیق کوتاه

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 1$$

را در نظر بگیرید. در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱) همریختی $h: C \longrightarrow B$ وجود دارد، به طوری که $gh = id_C$.

۲) همریختی $k: B \longrightarrow A$ وجود دارد، به طوری که $kf = id_A$.

۳) دنباله داده شده، با دنباله دقیق کوتاه

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus C \longrightarrow C \longrightarrow 1$$

یکریخت است. به ویژه $B \cong A \oplus C$.

اثبات. به [۸] صفحه ۱۷۷ مراجعه شود. ■

۱-۲ جابجاگرها و خواص آن ها

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید G یک گروه و x_1، x_2 و ... اعضایی از G باشند. مزدوج x_1 به وسیله x_2 را به صورت

$$x_1^{x_2} = x_2^{-1} x_1 x_2$$

و جابجاگر x_1و x_2 را به شکل

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$$

تعریف می کنیم.

به طور کلی جابجاگر ساده از وزن n $(n \geq 3)$ را به صورت بازگشتی

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۲-۲. فرض کنید X_1 و X_2 و ... زیرگروه هایی از گروه G باشند. در این صورت زیرگروه جابجاگر X_1 و X_2 را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle .$$

به طور کلی، به ازای هر $n \geq 3$ می توان زیرگروه جابجاگر ساده از وزن n را به صورت زیر تعریف کرد،

$$[X_1, X_2, \ldots, X_n] = [[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}], X_n].$$

در حالت خاص که $X_1 = X_2 = G$، زیرگروه جابجاگر $[G,G]$ را با G' نشان داده و زیرگروه مشتق G می نامیم.

زیرگروه $\underbrace{[G, G, \ldots, G]}_{n}$ را با نماد $\gamma_n(G)$ نشان می دهیم.

لم ۱-۲-۳. (اتحادهای هال)[1] فرض کنید G گروهی دلخواه باشد و x ، y و z عناصری از G باشند. در این صورت

۱) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$؛

۲) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$.

اثبات. با استفاده از تعریف جابجاگرها به راحتی اثبات می شود. ■

لم ۱-۲-٤. ۱) اگر $K \lhd G$، آنگاه G/K آبلی است، اگر وتنها اگر $[G,G] \subseteq K$.

۲) اگر $K \subseteq H$ و $H, K \lhd G$، آنگاه

$$\frac{H}{K} \subseteq Z\left(\frac{G}{K}\right) \Leftrightarrow [H, G] \subseteq K .$$

۳) اگر $H, K, L \lhd G$، آنگاه

[1] Hall's identities

$$[H,K] \lhd G \text{ و } [HK,L]=[H,L][K,L].$$

اثبات. به [۲] صفحه ۱۸ مراجعه شود. ■

قضیه ۱-۲-۵. (قانون مدولار ددکیند)[1] فرض کنید H، K و L زیرگروه هایی از گروه دلخواه G باشند، به طوری که $K \subseteq L$، در این صورت

$$HK \cap L = (H \cap L)K .$$

اثبات. به [۲۳] صفحه ۱۵ مراجعه شود. ■

۱-۳ سری های مرکزی پایینی و بالایی

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید G یک گروه باشد. سری

$$\gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \dots \supseteq \gamma_n(G) \supseteq \dots$$

که در آن

$$\gamma_{c+1}(G) = \left[\gamma_c(G), G \right], \ \gamma_1(G) = G$$

سری مرکزی پایینی گروه G نامیده می شود.

تعریف ۱-۳-۲. اگر G یک گروه باشد، آنگاه سری

$$<1>= Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq \dots \subseteq Z_n(G) \subseteq \dots$$

که در آن

$$\frac{Z_n(G)}{Z_{n-1}(G)} = Z\left(\frac{G}{Z_{n-1}(G)}\right), \ Z_1(G) = Z(G)$$

سری مرکزی بالایی گروه G نامیده می شود.

[1] Dedekind's Modular law

تعریف ۱-۳-۳. گروه G پوچ توان نامیده می شود هرگاه mای موجود باشد به طوری که $\gamma_m(G)=<1>$.

اگر $n+1$ کوچکترین عددی باشد که $\gamma_{n+1}(G)=<1>$، آنگاه n را رده پوچ توانی گروه G می نامیم و با نماد $cl(G)=n$ نشان می دهیم.

قضیه ۱-۳-٤. فرض کنید G گروهی پوچ توان باشد. در این صورت به ازای هر عدد طبیعی $n\geq 1$ داریم

$$Z_n(G)=G \Leftrightarrow \gamma_{n+1}(G)=<1>$$

اثبات. به[۲۳] صفحه ۱۲۱ مراجعه شود. ■

قضیه فوق بیان می کند که ، طول سری های مرکزی بالایی و پایینی در گروه های پوچ توان برابر می باشد. در این حالت گروه G را پوچ توان از رده حداکثر n گوئیم.

۱-٤ نمایش آزاد گروه ها

تعریف ۱-٤-۱. فرض کنید F یک گروه و X مجموعه ای نا تهی و $i:X\longrightarrow F$ یک نگاشت باشد، به طوری که به ازای هر گروه دلخواه G و هر نگاشت دلخواه $\alpha:X\longrightarrow G$ همریختی منحصر به فردی مانند $\gamma:F\to G$ موجود باشد، به طوری که $\gamma\, i=\alpha$. در این صورت F را یک گروه آزاد روی مجموعه X می نامیم. مجموعه Xرا مجموعه مولد گروه آزاد F می نامیم. اگر مجموعه X شمارای نامتناهی باشد، آنگاه گروه آزاد روی مجموعه X را با F_∞ نشان می دهیم.

قضیه ۱-٤-۲. نگاشت i در تعریف گروه آزاد، نگاشتی یک به یک است.

اثبات. به [۲۳] صفحه ۴۴ مراجعه شود. ■

قضیه ۱-٤-۳. **(خاصیت تصویری گروه های آزاد)**[1] اگر F گروهی آزاد باشد و H, G دو گروه دلخواه باشند، به طوری که $\alpha : F \longrightarrow H$ یک همریختی و $\beta : G \longrightarrow H$ یک برو‌ریختی باشد، آنگاه همریختی $\gamma : F \longrightarrow G$ موجود است، به طوری که نمودار زیر جابجایی است. یعنی $\beta\gamma = \alpha$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & \\ H & G \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

اثبات. به [۲۳] صفحه ۴۹ مراجعه شود. ■

قضیه ۱-٤-٤. فرض کنید F یک گروه آزاد باشد و A و B دو گروه دلخواه باشند. در این صورت دنباله دقیق کوتاه

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} F \longrightarrow 1$$

شکافنده است.

اثبات. نمودار زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "id_F"] & \\ B \arrow[r, "g"] & F \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

بنا به قضیه قبل همریختی مانند $h : F \longrightarrow B$ وجود دارد، به طوری که $gh = id_F$. پس بنا به قضیه ۱-۱-۵ دنباله دقیق مذکور، شکافنده است. ■

تعریف ۱-٤-۵. اگر G یک گروه، F گروهی آزاد و

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

[1] The projective property of free groups