دانشگاه تربيت معلم

دانشكده علوم رياضي و كامپيوتر

پايان نامه كارشناسي ارشد رياضي محض

عنوان : خاصيت نقطه ي ثابت براي نگاشت هاي ناگسترده چند مقداري

تدوين : زينب ساراني

استاد راهنما : عليرضا مدقالچي – غلامرضا زباندان

آذر ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های ناگسترده چند مقداری بررسی می کنیم. به ویژه اندازه‌ی نافشردگی را تعریف می کنیم و با استفاده از آن وجود نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های ناگسترده ثابت می کنیم. هم چنین ثابت می کنیم فضای باناخ دارای شرط (DL) خاصیت نقطه‌ی ثابت چند مقداری ضعیف دارد و سه شرط هم ارز: پیمانه‌ی نامتناهی بعد جهانی، ضرایب نزدیک به محدب یکنواخت و پیمانه اُپیال، ساختار نرمال یکنواخت ضعیف را برای فضای باناخ نتیجه می دهد. این شرایط هم ارز خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های ناگسترده چند مقداری نتیجه می دهد.

به علاوه فضای باناخ دارای خاصیت (D) که شرطی ضعیف‌تر از شرط (DL) را داراست خاصیت نقطه‌ی ثابت چند مقداری ضعیف را نتیجه می دهد.

واژه های کلیدی: نگاشت های ناگسترده چند مقداری، مرکز مجانبی، نقطه‌ی ثابت، ساختار نرمال، نزدیک به محدب یکنواخت، هموار یکنواخت، خاصیت اُپیال

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 47H08, 47HXX

پیش‌گفتار

در سال ۱۹۶۹ نادلر [1] اصل انقباض باناخ را برای نگاشت های انقباضی چند مقداری توسیع داد. از آن زمان به بعد محققان زیادی امکان توسیع قضایای کلاسیک نقطه‌ی ثابت نگاشت های ناگسترده‌ی تک مقداری را به نگاشت های ناگسترده‌ی چند مقداری بررسی کردند.

برای نمونه قضیه‌ی کرک [2] که خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های ناگسترده (تک مقداری) در فضای باناخ انعکاسی با ساختار نرمال بیان می کند منجر به یک سوال طبیعی می شود که آیا فضای باناخ بازتابی با ساختار نرمال دارای خاصیت نقطه‌ی ثابت (FPP) برای نگاشت های ناگسترده چند مقداری است؟

بااستفاده‌از خواص هندسی مختلف از فضای باناخ ساختار نرمال نتیجه می شود به‌عنوان مثال، $\mathcal{E}_\beta(X) < 1$ که $\mathcal{E}_\beta(X) < 1$ ضرایب محدب نافشرده نسبت به اندازه تفکیک پذیر است، $\rho'_X(0) < \frac{1}{2}$ که $\rho_X(\cdot)$ پیمانه‌ی هموراری است و $r_X(1) > 0$، $r_X(\cdot)$ پیمانه‌ی اُپیال X است و خواص دیگر. بنابراین این سوال پیش می آید:

آیا این خواص خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های چند مقداری نتیجه می دهد؟

فضاهای نزدیک به محدب یکنواخت و هموار یکنواخت نیز خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های چند مقداری نتیجه می دهند.

سوال اول توسط بناویدس و لرنزو [3] حل شد که ثابت کردند هر نگاشت با مقادیر محدب فشرده مانند $T : C \longrightarrow KC(C)$ تحت فرض ضعیف تر $\mathcal{E}_\beta(X) < 1$ نقطه‌ی ثابت دارد که در آن C زیر مجموعه‌ای محدب، بسته و کران‌دار از فضای باناخ X است. در این پایان‌نامه ثابت می کنیم فضاهای هموار یکنواخت (هم چنین فرض ضعیف‌تر $\rho'_X(0) < \frac{1}{2}$) خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های چند مقداری نتیجه می دهد.

این پایان نامه شامل پنج فصل است. در فصل اول قضیه ها و تعریف های مقدماتی در مورد فضاهای باناخ و آنالیز تابعی و ... را بیان می کنیم. در فصل دوم قضیه ها و تعریف های اساسی نقطه ثابت را که در

---

[1] $Nadler$

[2] $Kirk$

[3] $Benavides - Lorenzo$

فصل های دیگر مورد نیازند، بیان می کنیم. در فصل سوم فضاهای نزدیک به محدب یکنواخت، اندازه‌ی نافشردگی، ضرایب محدب نافشردگی و قضایای مربوط به آن را بیان می کنیم. در فصل چهارم پالایه‌ها را بررسی می کنیم. ثابت می کنیم که به ازای $\beta \in (0,1)$، اگر $\xi_X(\beta) < \frac{1}{1-\beta}$ ($\rho'_X(0) < \frac{1}{2}$) آن‌گاه X ساختار نرمال یکنواخت دارد و هم چنین خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های ناگسترده چند مقداری نتیجه می دهد. در فصل پنجم خاصیت D و رابطه‌ی برخی از شرایط هندسی را بررسی می کنیم.

سرانجام سه شرط هم ارز شامل پیمانه‌ی نامتناهی بعد جهانی، ضرایب نزدیک به محدب یکنواخت و پیمانه‌ی اُپیال را می آوریم که ساختار نرمال یکنواخت ضعیف را نتیجه می دهند و در ضمن این شرایط هم ارز خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت های چند مقداری نتیجه می دهد. این پایان‌نامه بر مبنای مقاله

[5] T.D. Benavides, B. Gavira, *The fixed point property for multivalued nonexpansive mappings, J. Math. Abstr. Anal. Appl. 328 (2007) 1471-1483.*

تدوین شده است.

فهرست مطالب

فصل اول مفاهیم و مقدمات اولیه ۱

۱.۱.فضای متریک کامل ۱

۲.۱.فضای باناخ و بازتابی ۲

۳.۱.نیم پیوستگی ۵

۴.۱.توپولوژی های ضعیف و ضعیف ستاره ۶

فصل دوم تعریف ها و قضایای اساسی نقطه ثابت ۱۲

۱.۲.نگاشت‌های لیپ‌شیتسی، انقباضی و ناگسترده ۱۲

۲.۲.نگاشت‌های چند مقداری ۱۷

۳.۲.فضاهای محدب اکید و محدب یکنواخت ۲۱

۴.۲.ساختار نرمال و فضای هموار ۲۶

۵.۲.شرط اُپیال و ضرایب دنباله‌ای ضعیف همگرا در فضای باناخ ۳۷

فصل سوم اندازه‌ی نافشردگی و فضای نزدیک به محدب یکنواخت ۴۶

۱.۳.اندازه‌ی نافشردگی و پیمانه‌ی تحدب ۴۶

۲.۳.فضای نزدیک به محدب یکنواخت و قضایای اصلی ۵۲

فصل چهارم شرط های هندسی برای وجود نقاط ثابت نگاشت چند مقداری ۶۳

۱.۴.پالایه و فراپالایه ۶۳

۲.۴.شرط (DL) در فضای باناخ و پیمانه‌ی مربع ۶۶

۳.۴.پیمانه‌ی نامتناهی بعد جهانی ۷۳

فصل پنجم خاصیت (D) برای وجود نقطه‌ی ثابت یک نگاشت ۸۱

۱.۱.خاصیت (D) برای وجود نقطه‌ی ثابت یک نگاشت ۸۱

مراجع ۸۵

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۸۹

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۹۴
نمایه ۹۸

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل که شامل چهار بخش است، تعریف‌ها و مفهوم‌های مقدماتی در مورد فضاهای متریک کامل، باناخ، بازتابی، نیم‌پیوستگی، توپولوژی‌های ضعیف، ضعیف ستاره و ... را که در فصل‌های دیگر موردنیازند، ارائه می‌دهیم.

۱.۱ فضای متریک کامل

تعریف ۱.۱.۱. فضای متریک (M,ρ) را کامل گوییم در صورتی که هر دنباله کوشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۲.۱.۱. درفضای متریک (M,ρ) مجموعه C را کران‌دار گوییم اگر عدد $K<\infty$ موجود باشد که به ازای هر x و y در C، $\rho(x,y)\leq K$.

اگر A زیرمجموعه‌ای ناتهی از فضای متریک (M,ρ) باشد و اگر $x\in M$، در این صورت نمادهای $diamA$ و $dist(x,A)$ را به ترتیب برای نشان دادن قطر A و فاصله x از A به‌کار می بریم و چنین تعریف می کنیم:

$$diamA=\sup\{\rho(x,y):x,y\in A\}$$

$$dist(x,A)=\inf\{\rho(x,y):y\in A\}.$$

هم چنین گوی بسته به مرکز x و شعاع $r > \circ$ را با $B(x,r)$ نشان می دهیم. (یعنی $B(x,r) = \{y \in M : \rho(x,y) \leq r\}$).

B_M و S_M گوی واحد و کره‌ی واحد را نشان می دهند، در واقع S_M مرز B_M است.

قضیه ۳.۱.۱. [2, 1.5] فرض کنید (x_n) یک دنباله کران‌دار در فضای متریک (X,d) باشد. آن‌گاه زیر دنباله (y_n) از (x_n) وجود دارد به‌طوری که $\lim_{n,m;n\neq m} d(y_n,y_m)$ وجود دارد.

۲.۱ فضای باناخ و بازتابی

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری X را روی $\mathbb{R}$ یک فضای نرم‌دار گوییم، هرگاه نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ وجود داشته باشد به طوری که:

۱) به ازای هر x از X، $\|x\| \geq \circ$ و $\|x\| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$.

۲) به ازای هر x از X و هر α از $\mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳) به ازای هر x و y از X، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای نرم دار X یک فضای باناخ نامیده می‌شود، اگر X با متریک $d(x,y) = \|x-y\|$ یک فضای متریک کامل باشد.

اگر فضای باناخ X روی R باشد، آن را فضای باناخ حقیقی و اگر روی $\mathbb{C}$ باشد، آن را فضای باناخ مختلط می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار و T یک عملگر باشد. نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = ۱\} \ .$$

اگر $\|T\|$ متناهی باشد، T را یک عملگر کران‌دار گوییم. (درغیراین‌صورت T را بی‌کران گوییم.) واضح است که به ازای هر $x \in X$، $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$.

اگر $X \neq \circ$ تعریف نرم T با تعریف زیر هم‌ارز است.

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq ١\}$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. گردایه‌ی تمام عملگرهای خطی کران‌دار از X به Y را با $\mathcal{L}(X,Y)$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{L}(X,Y)$ با عمل‌های

$$(T+S)(x) = T(x) + S(x) \quad , \quad (\alpha T)(x) = \alpha(T(x))$$

یک فضای برداری است. هم‌چنین $\mathcal{L}(X,Y)$ با نرم

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = ١\}$$

یک فضای‌نرم دار است.

قضیه ۴.۲.۱. [28, 5.13] Y یک فضای باناخ است اگر و تنها اگر $\mathcal{L}(X,Y)$ به ازای $X \neq \circ$، یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۵.۲.۱. اگر X یک فضای نرم‌دار $\mathcal{L}(X,X)$ را با $\mathcal{L}(X)$ نمایش می‌دهند و اگر Y برابر با $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{L}(X,Y)$ را با X^* نمایش می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم.

۶.۲.۱ **قضیه (هان ـ باناخ).** [29, 3.3] فرض کنیم M زیرفضایی از فضای برداری X باشد و $P : X \longrightarrow \mathbb{R}$ در رابطه‌های $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ و $P(tx) = tP(x)$ $(t \geq \circ, x, y \in X)$ صدق کند، $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ خطی باشد و $f(x) \leq P(x)$ بر M. در این صورت نگاشت خطی $\Lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که $(x \in M) \qquad \Lambda(x) = f(x)$ و

$$-P(-x) \leq \Lambda(x) \leq P(x)$$

قضیه ۷.۲.۱. [1, 23.25] فرض کنیم Y یک زیرفضای برداری از فضای نرم‌دار X و $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابعک خطی پیوسته روی Y باشد. آن‌گاه f می‌تواند به یک تابعک خطی پیوسته‌ی g بر X توسیع یابد به طوری که $\|f\| = \|g\|$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. باتوجه به قضیه‌ی (۴.۲.۱) $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ همواره یک فضای باناخ است، $\mathcal{L}(X^*, \mathbb{R})$ را با X^{**} نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان دوم X می‌نامیم. به ازای هر $x \in X$، $\hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ رابا ضابطه‌ی $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم. نگاشت $x \longrightarrow \hat{x}$ (از X به X^{**}) را نشاندن متعارف از X به X^{**} گوییم.

تعریف ۹.۲.۱. فضای نرم دار X را بازتابی گوییم، هرگاه نشاندن طبیعی $x \longrightarrow \hat{x}$ (از X به توی X^{**}) پوشا باشد.

قضیه ۱۰.۲.۱. [28, 8.17] فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این‌صورت X بازتابی است اگر و تنها اگر X^* بازتابی باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. فضای توپولوژیک (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژی گوییم، اگر عمل‌های $+ : X \times X \longrightarrow X$ و $. : K \times X \longrightarrow X$ به ترتیب با ضابطه‌های $(x, y) \longrightarrow x + y$ و $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ پیوسته باشند (K میدان اسکالر است.) و (X, τ) اگر مجموعه های تک عضوی‌اش بسته باشند، ثابت می شود که فضا هاسدورف است.

تذکر ۱۲.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژی باشد. اگر (x_n) دنباله‌ای در X باشد که به $x_\circ$ با توپولوژی τ همگرا باشد، می‌نویسیم $x_n \rightharpoonup x_\circ$ یا $\tau\text{-}\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x_\circ$.

قضیه ۱۳.۲.۱. [2, 1.5] اگر X فضای باناخ غیر بازتابی باشد. یک دنباله نزولی از زیر مجموعه‌های محدب و بسته مانند $\{C_n\}$ در گوی واحد $B(\circ, ۱)$ وجود دارد به‌طوری که $\bigcap_{i=۱}^{\infty} C_n = \emptyset$.

لم ۱۴.۲.۱. [2, 1.6] اگر X فضای باناخ غیر بازتابی باشد. یک دنباله نزولی از زیر مجموعه‌های محدب و بسته مانند $\{A_n\}$ در گوی واحد $B(\circ, ۱)$ وجود دارد به‌طوری که $\circ < \inf\{\sup d(x, A_n) : x \in X\}$.

۳.۱ نیم‌پیوستگی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم f یک تابع حقیقی بر فضای توپولوژیک X باشد اگر مجموعه $\{x : f(x) > \alpha\}$ به‌ازای هر $\alpha \in R$ باز باشد، گوییم f نیم پیوسته‌ی پایینی است و اگر $\{x : f(x) < \alpha\}$ به‌ازای هر $\alpha \in R$ باز باشد،گوییم f نیم پیوسته‌ی بالایی است.
یک تابع حقیقی بوضوح پیوسته‌است اگر و فقط اگر هم نیم پیوسته‌ی بالایی و هم نیم پیوسته‌ی پایینی باشد.
هم چنین سوپریمم هر گردایه از توابع نیم پیوسته‌ی پایینی، نیم پیوسته‌ی پایینی است، و اینفیمم هر گردایه از توابع نیم پیوسته‌ی بالایی نیم پیوسته‌ی بالایی است.

تعریف ۲.۳.۱. نگاشت $\varphi : X \longrightarrow X$ را نگاشت تک مقداری و $\varphi : X \longrightarrow ۲^X$ راکه در آن ۲^X مجموعه توانی X می‌باشد، نگاشت چندمقداری می‌نامند.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و K زیر مجموعه‌ای محدب، بسته و کران‌دار از X و نگاشت $T : K \longrightarrow K$ چند مقداری باشد. گوییم نگاشت T فشرده مقدار است اگر به ازای هر $x \in K$، Tx فشرده باشد. هم‌چنین نگاشت T محدب مقدار است اگر به ازای هر $x \in K$، Tx محدب باشد.

فرض کنیم X فضای توپولوژیک هاسدورف باشد و $S \subseteq X$ و $\varphi : X \longrightarrow ۲^X$ یا $\varphi : S \longrightarrow ۲^S$ یک نگاشت چند مقداری با مقادیر محدب و ناتهی باشد. φ بسته گفته می‌شود اگر گراف φ بسته باشد یعنی $G(\varphi) = \{(x, y) : y \in \varphi(x)\}$ زیرمجموعه بسته‌ای در $X \times X$ باشد.

تعریف ۴.۳.۱. نگاشت $\varphi : X \longrightarrow ۲^Y$ چند مقداری باشد، $f^{-۱}(A)$ برای $A \subseteq Y$ به‌صورت زیر است:

$$f^{-۱}(A) = \{x \in X : f(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

تعریف ۵.۳.۱. نگاشت $\varphi : X \longrightarrow ۲^Y$ در $x_۰ \in X$ نیم پیوسته‌ی بالایی است اگر به ازای هر همسایگی $N(\varphi(x_۰))$ از $\varphi(x_۰)$ یک همسایگی از $x_۰$ مانند $N(x_۰)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in N(x_۰)$ داشته باشیم: $\qquad \varphi(x) \subset N(\varphi(x_۰))$

تعریف ٦.٣.١. نگاشت $\varphi : X \longrightarrow 2^Y$ در $x_\circ \in X$ نیم پیوسته‌ی پایینی است اگر به ازای هر $y \in \varphi(x_\circ)$ و برای هر همسایگی $N(y)$ از y یک همسایگی مانند $N(x_\circ)$ از $x_\circ$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in N(x_\circ)$ داشته باشیم:

$$N(y) \cap \varphi(x) \neq \emptyset$$

تعریف ٧.٣.١. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار و τ یک توپولوژی خطی روی X باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را τ- نیم پیوسته‌ی پایینی دنباله‌ای گوییم، درصورتی‌که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$، τ-بسته‌ی دنباله‌ای باشد. اگر τ توپولوژی نرم باشد، f رانیم پیوسته‌ی پایینی دنباله‌ای گوییم.

قضیه ٨.٣.١. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد، نگاشت $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ نیم پیوسته‌ی پایینی است اگر و تنها اگر به ازای هر (x_n) در X که $x_n \longrightarrow x_\circ$ و $x_\circ \in X$ داشته باشیم:

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) \geq f(x_\circ)$$

برهان. برای اثبات برگشت از قضیه [4, 25.12] استفاده می‌کنیم.

به‌عکس، فرض می‌کنیم $x_n \longrightarrow x_\circ$ که $x_\circ \in X$. چون f نیم پیوسته‌ی پایینی است، پس $V = \{x \in X \ : \ f(x) > f(x_\circ) - \varepsilon\}$ یک همسایگی $x_\circ$ است پس $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که به ازای هر $n \geq N$ داریم $x_n \in V$ لذا $f(x_n) > f(x_\circ) - \varepsilon$ در نتیجه $\liminf_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) \geq f(x_\circ)$.

تعریف ٩.٣.١. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد و τ یک توپولوژی خطی روی X باشد. زیرمجموعه‌ی C از X را τ-فشرده دنباله‌ای گوییم، اگر هر دنباله در C دارای زیردنباله‌ای τ-همگرا باشد.

قضیه ١٠.٣.١. [14, 1.6.13] یک زیر مجموعه از فضای متریک، فشرده است اگر و تنها اگر بسته و فشرده‌ی دنباله‌ای باشد.

٤.١ توپولوژی‌های ضعیف و ضعیف ستاره

تعریف ١.٤.١. فرض کنیم X یک فضای نرم دار و X^* فضای دوگان آن باشد و A یک زیر مجموعه‌ی

متناهی از X^* و $x_\circ$ عضو دلخواهی در X باشد. به ازای هر $\varepsilon > \circ$،

$$U(x_\circ, A, \varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - f(x_\circ)| < \varepsilon \quad , \quad f \in A\}$$

را تعریف می‌کنیم. گردایه‌ی زیر پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X تشکیل می‌دهند.

$$\{U(x_\circ, A, \varepsilon) \quad \varepsilon > \circ\ ,\ x_\circ \in X\ ,\ \text{متناهی}\ A \subset X^*\ \}$$

این توپولوژی را توپولوژی ضعیف بر روی X گوییم و با (X, w) نشان می‌دهیم.

اگر (x_n) دنباله‌ای در X باشد که با توپولوژی ضعیف به $x \in X$ همگراست، در این صورت نماد $x_n \rightharpoonup x$ یا $w\text{-}\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ را به کار می‌بریم.

قضیه ۲.۴.۱. [31, 3.6.4] اگر X یک فضای نرم‌دار و (x_n) دنباله‌ای در X باشد به طوری‌که $x_n \rightharpoonup x$ اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in X^*$ داشته باشیم $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

قضیه ۳.۴.۱. [32, 2.9.2] فضای باناخ X بازتابی است اگر و تنها اگر $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq ۱\}$ ضعیف فشرده باشد.

قضیه ۴.۴.۱. [30, 3.12] فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای محدب از فضای باناخ X باشد. در این صورت F با توپولوژی نرم بسته است اگر و تنها اگر با توپولوژی ضعیف بسته باشد.

قضیه ۵.۴.۱. فضای باناخ X بازتابی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی بسته، محدب و کران‌دار X ضعیف فشرده باشد.

برهان. با توجه به قضیه‌های (۳.۴.۱) و (۴.۴.۱) حکم به سادگی اثبات می‌شود.

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و $A \subseteq X$. اگر هر دنباله در A دارای زیردنباله‌ای ضعیف همگرا به عضوی از A باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A را ضعیف فشرده‌ی دنباله‌ای گوییم.

۷.۴.۱ قضیه (ابرلین ـ اشمولیان[۱]). [14, 5.6.1] فرض کنیم X یک فضای نرم دار و A یک زیرمجموعه‌ی X باشد. آن‌گاه روابط زیر هم‌ارزند:

---
[۱] $Eberlin - Smulian$

۱) هر دنباله‌ی (x_n) در A، زیردنباله‌ای ضعیف همگرا دارد.

۲) هر دنباله‌ی (x_n) در A، یک نقطه‌ی حدی ضعیف در X دارد.

۳) بستار ضعیف A، ضعیف فشرده است.

بنا بر این قضیه، ضعیف فشردگی و ضعیف ستاره فشردگی دنباله‌ای همواره هم‌ارزند.

تعریف ۸.۴.۱. فضای نرم‌دار X را جدایی‌پذیر گوییم، هرگاه دارای زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا باشد.

قضیه ۹.۴.۱. [14, 5.6.3] فرض کنیم X یک فضای باناخ جدایی پذیر باشد. در این صورت توپولوژی ضعیف روی زیر مجموعه های ضعیف فشرده‌ی X، متریک پذیر است.

تعریف ۱۰.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم دار و X^* فضای دوگان X، $\varepsilon > 0$، A زیر مجموعه‌ای متناهی از X و $f_\circ \in X^*$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$U(f_\circ, A, \varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x) - f_\circ(x)| < \varepsilon \quad x \in A\}$$

گردایه‌ی زیر، پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X^* تشکیل می‌دهند.

$$\{U(f_\circ, A, \varepsilon) \quad \varepsilon > 0\ ,\ f_\circ \in X^*\ ,\ \text{متناهی } A \subset X\ \}$$

این توپولوژی را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* گوییم و با (X^*, w^*) نشان می‌دهیم.

اگر (f_n) دنباله‌ای در X^* باشد و (f_n) با توپولوژی ضعیف ستاره به $f \in X^*$ همگرا باشد، در این صورت می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{w^*} f$ و یا $w^*\text{-}\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n = f$
(f_n) به f نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره همگراست، اگر وتنها اگر به ازای هر $x \in X$، $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

۱۱.۴.۱ قضیه (باناخ ـ آل اوغلو[۱]). [30, 3.15] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد، در این صورت $B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ ضعیف ستاره فشرده است.

[۱] $Banach - Alaoglu$

تعریف ۱۲.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و $K \subseteq X$. اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب X را که شامل K هستند، غلاف محدب K گوییم و با $co(K)$ نشان می‌دهیم.علاوه بر این می‌توان نشان داد که:

$$co(K) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ : \ \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, x_i \in K, n \in \mathbb{N}\}$$

بستار غلاف محدب K را غلاف محدب بسته گوییم و با $\overline{co}(K)$ نشان می‌دهیم.

۱۳.۴.۱ قضیه (اشمولیان [1]). [14, 5.6.2] فضای باناخ X بازتابی است اگر و تنها اگر برای هر دنباله نزولی مانند (K_n) از زیر مجموعه های محدب، بسته و ناتهی از X داشته باشیم: $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

۱۴.۴.۱ قضیه (کرین ـ اشمولیان [2]). [14, 5.6.4] اگر X یک فضای باناخ و K زیر مجموعه‌ای ضعیف فشرده از X باشد، آن‌گاه $\overline{co}(K)$ نیز ضعیف فشرده است.

قضیه ۱۵.۴.۱. [13, 1.6.15] اگر (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد، آن‌گاه X جدایی‌پذیر است.

قضیه ۱۶.۴.۱. [30, 2.6] هرگاه $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فشرده‌ی یک فضای هاسدورف باشد و $\bigcap\limits_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$ آن‌گاه زیرگردایه‌ی متناهی از $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ وجود دارد که دارای اشتراک تهی است.

قضیه ۱۷.۴.۱. [29, 8.24] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار جدایی‌پذیر باشد، در این صورت هر دنباله‌ی کران‌دار در X^* دارای زیردنباله‌ای ضعیف ستاره همگراست.

قضیه ۱۸.۴.۱. [30, 4.3] اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و B^* گوی واحد بسته باشد. به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$\|x\| = \sup\{ \ | < x, f > | \ ; f \in B^*\}.$$

---

[1] $Smulian$

[2] $Krein - Smulian$

قضیه ۱.۴.۱۹. [14, 5.5.7] یک زیر مجموعه‌ی محدب در X^* مانند K ضعیف ستاره بسته است اگر و تنهااگر به ازای هر $r > 0$ مجموعه‌ی $\{x^* \in K \ : \ \|x^*\| \leq r\}$ ضعیف ستاره بسته باشد.

قضیه ۱.۴.۲۰. [14, 5.5.1] فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد در این صورت گوی یکه‌ی دوگان X (B_{X^*}) با توپولوژی ضعیف ستاره متریک پذیر است اگر و تنها اگر X جدایی پذیر باشد.

۱.۴.۲۱ **قضیه (جیمز [1]).** [16, 1.6] فضای باناخ X بازتابی است اگر و فقط اگر هر کدام از شرایط زیر برقرار باشد:

۱) به ازای هر $f \in X^*$، $x \in B(0, 1)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) = \|f\|$.

۲) برای هر زیر مجموعه محدب، بسته و کران‌دار K از X و هر $f \in X^*$، $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) = \sup\{f(y) : y \in K\}$.

قضیه ۱.۴.۲۲. فرض کنیم X یک فضای جدایی‌پذیر باشد و K زیرمجموعه‌ای محدب از X^* باشد، آن‌گاه K ضعیف ستاره بسته است اگر و تنهااگر ضعیف ستاره بسته‌ی دنباله‌ای باشد.

برهان. با توجه به قضیه‌های (۱.۴.۱۹) و (۱.۴.۲۰) و با توجه به این‌که در فضاهای متریک بسته بودن و بسته بودن دنباله‌ای هم ارز است حکم ثابت می‌شود.

تذکر ۱.۴.۲۳. نرم با توپولوژی ضعیف نیم‌پیوسته‌ی پایینی است.

برهان. برای این منظور باید ثابت کنیم $\{x \in X : \|x\| > \gamma\}$ نسبت به توپولوژی ضعیف باز است. لذا ثابت می کنیم $A = \{x \in X : \|x\| \leq \gamma\}$ نسبت به توپولوژی ضعیف بسته است. x_0 را نقطه‌ی حدی این مجموعه در نظر می‌گیریم یعنی $(x_\alpha) \subset A$ وجود دارد به طوری که $x_\alpha \rightharpoonup x_0$. به ازای هر $f \in X^*$ می‌توان داشت $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$.

با توجه به قضیه (۱.۴.۱۸) داریم $\|x\| = \sup_{f \in B^*} |f(x)|$.

$f \in B_X^*$ را ثابت در نظر می‌گیریم در این صورت به ازای هر $\varepsilon > 0$، α_0ای وجود دارد که به ازای هر $\alpha \geq \alpha_0$ آن‌گاه $|f(x_\alpha) - f(x_0)| < \varepsilon$. لذا

$$|f(x_0)| \leq |f(x_\alpha)| + \varepsilon \leq |x_\alpha| + \varepsilon \leq \gamma + \varepsilon$$

[1] $James$

در نتیجه $\gamma \leq |f(x_\circ)|$ پس $\gamma \leq \|x_\circ\|$ بنابراین $x_\circ \in A$.

۲۴.۴.۱ لم (شور [۱]). [29, 8.18] هر دنباله‌ی ضعیف همگرا در $(l_۱, \|.\|_۱)$ همگراست.

قضیه ۲۵.۴.۱. [32, 3.6.3] فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار با بعد متناهی باشد، در این صورت توپولوژی‌های ضعیف و نرم روی X بر هم منطبق‌اند.

قضیه ۲۶.۴.۱. [15, 5.2.6] فرض کنیم X یک فضای باناخ و A زیرمجموعه‌ای فشرده از X باشد، در این صورت $\overline{co}(A)$ فشرده است.

---

[۱] $Schur$

فصل ۲

تعاریف و قضایای اساسی نقطه‌ی ثابت

در این فصل که شامل پنج بخش است خواص مهم فضای باناخ، تعاریف و قضیه‌های اساسی نقطه‌ی ثابت را که در فصل‌های دیگر موردنیازند، ارائه می‌دهیم.

۱.۲ نگاشت‌های لیپ‌شیتسی، انقباضی و ناگسترده

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم (M,ρ) یک فضای متریک باشد. نگاشت $T : M \longrightarrow M$ را لیپ‌شیتسی گوییم اگر $K > ۰$ ی ثابت موجود باشد، به‌طوری‌که به ازای هر $x, y \in M$، $\rho(T(x), T(y)) \leq K\rho(x,y)$.
کوچک‌ترین عدد مثبت K را که در نامساوی بالا صدق می‌کند، ثابت لیپ‌شیتس برای نگاشت T گوییم و با $K(T)$ یا K نشان می‌دهیم.

برای دو نگاشت لیپ‌شیتسی $S, T : M \longrightarrow M$ واضح است که:

$$K(SoT) \leq K(S)K(T) \qquad\qquad K(T^n) \leq (K(T))^n \quad (n = ۱, ۲, \cdots)$$

به‌علاوه اگر M یک فضای نرم‌دار باشد آن‌گاه به ازای هر $\alpha \geq ۰$ حقیقی $K(\alpha T) = \alpha K(T)$ و $K(S+T) \leq K(S) + K(T)$.

اگر $K(T) < ۱$ نگاشت $T : M \longrightarrow M$ را یک انقباض گوییم.

۲.۱.۲ قضیه (اصل انقباض باناخ). فرض کنیم (M,ρ) یک فضای متریک کامل و $T:M\longrightarrow M$ نگاشت انقباض باشد. آن‌گاه T دارای نقطه‌ی ثابت یکتا در M است و به ازای هر $x_\circ \in M$ دنباله‌ی $(T^n(x_\circ))$ به این نقطه‌ی ثابت همگراست.

برهان. ابتدا یکتایی این نقطه را ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم x,y دو نقطه‌ی ثابت متمایز باشند. آن‌گاه

$$\rho(x,y)=\rho(T(x),T(y))\leq K\rho(x,y)<\rho(x,y)$$

که یک تناقض است.

حال وجود چنین نقطه‌ای را ثابت می‌کنیم.

نقطه‌ی $x_\circ$ را ثابت و دلخواه در نظر می‌گیریم و دنباله‌ی (x_n) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x_۱=T(x_\circ) \qquad x_{n+۱}=T(x_n) \qquad (n\in\mathbb{N})$$

در نتیجه به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n=T^n(x_\circ)$. به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ و $p\in\mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_{n+p})&=\rho(T^n(x_\circ),T^n o T^p(x_\circ))\\&\leq K(T^n)\rho(x_\circ,T^p(x_\circ))\\&\leq K^n(\rho(x_\circ,T(x_\circ))+\rho(T(x_\circ),T^۲(x_\circ))+\cdots+\rho(T^{p-۱}(x_\circ),T^p(x_\circ))\\&\leq K^n(۱+K+\cdots+K^{p-۱})\rho(x_\circ,T(x_\circ))\\&=K^n(\tfrac{۱-K^p}{۱-K})\rho(x_\circ,T(x_\circ))<\tfrac{K^n\rho(x_\circ,T(x_\circ))}{۱-K}\end{aligned}$$

با توجه به این‌که $K<۱$ و $\frac{\rho(x_\circ,T(x_\circ))}{۱-K}$ عدد ثابت مثبتی است، (x_n) کوشی است و بنا به فرض M یک فضای متریک کامل است پس $x\in M$ موجود است که $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}x_n=x$ چون T پیوسته است داریم:

$$x=\lim_{n\longrightarrow\infty}x_n=\lim_{n\longrightarrow\infty}x_{n+۱}=\lim_{n\longrightarrow\infty}T(x_n)=T(x)$$

پس x نقطه‌ی ثابت T است . ■

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنیم (M,ρ) یک فضای متریک باشد و $D\subseteq M$. نگاشت $T:D\longrightarrow M$ را ناگسترده گوییم، اگر به ازای هر $x,y\in D$، $\rho(T(x),T(y))\leq\rho(x,y)$. اگر $(X,\|.\|)$ یک فضای باناخ و K یک زیرمجموعه‌ی محدب، بسته، کران‌دار و ناتهی از X باشد. نگاشت $T:K\longrightarrow K$ را ناگسترده گوییم،

اگر به ازای هر $x,y \in K$، $\|T(x)-T(y)\| \leq \|x-y\|$.

به‌وضوح اگر T ناگسترده باشد، آن‌گاه T^n $(n = \circ, ۱, ۲, \cdots)$ نیز ناگسترده است.

نگاشت $T : K \longrightarrow K$ را گسترده گوییم، اگر ناگسترده نباشد.

لم ۴.۱.۲. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ و K زیرمجموعه‌ای محدب، بسته، کران‌دار، ناتهی از X و $T : K \longrightarrow K$ یک نگاشت ناگسترده باشد. دراین‌صورت $\inf\{\|x - T(x)\| : x \in K\} = \circ$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon \in (\circ, ۱)$ دلخواه اما ثابت و $z \in K$ ثابت باشد. نگاشت $T_\varepsilon : K \longrightarrow K$ را با ضابطه‌ی $T_\varepsilon(x) := \varepsilon z + (۱-\varepsilon)T(x)$ در نظر می‌گیریم. T_ε یک انقباض است زیرا

$$\|T_\varepsilon(x) - T_\varepsilon(y)\| \leq (۱-\varepsilon)\|T(x)-T(y)\| \leq (۱-\varepsilon)\|x-y\| \qquad (x,y \in K)$$

چون K زیر مجموعه‌ی بسته‌ی فضای باناخ X است، K کامل است. پس بنابر اصل انقباض T_ε دارای نقطه‌ای ثابت مانند x_ε در K است. پس $x_\varepsilon \in K$ موجود است که $T_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$.

$$\|x_\varepsilon - T(x_\varepsilon)\| = \|\varepsilon z + (۱-\varepsilon)T(x_\varepsilon) - T(x_\varepsilon)\| = \varepsilon\|z - T(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon diam K$$

با توجه به ویژگی مشخصه اینفیمم حکم برقرار است. ■

توجه ۵.۱.۲. از لم بالا نتیجه می‌گیریم که اگر $T : K \longrightarrow K$ یک نگاشت ناگسترده و K یک زیرمجموعه‌ی محدب، بسته، کران‌دار و ناتهی از فضای باناخ X باشد، آن‌گاه دنباله‌ای مانند (y_n) در K وجود دارد به طوری که $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|y_n - T(y_n)\| = \circ$. دنباله‌ی (y_n) را دنباله‌ی نقطه‌ی ثابت تقریبی برای نگاشت T در K می‌نامیم.

۶.۱.۲ قضیه (نقطه‌ی ثابت شاودر[۱]). [16, 3.1] فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای محدب، فشرده و ناتهی از فضای باناخ X باشد، در این‌صورت هر نگاشت پیوسته $f : K \longrightarrow K$ دارای نقطه‌ی ثابت است.

تعریف ۷.۱.۲. فرض کنیم K یک فضای باناخ و $T : K \longrightarrow K$ یک نگاشت باشد. زیرمجموعه‌ی محدب، بسته و ناتهی D از K را T پایا گوییم، هرگاه $T(D) \subseteq D$.

D را T پایای مینیمال گوییم هرگاه $T(D) \subseteq D$ و D دارای هیچ زیرمجموعه‌ی محدب، بسته، ناتهی و محض T پایا نباشد.

[۱] $Schauder$