بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علامه محدث نوری

دانشکده اقتصاد و علوم اداری

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد رشته علوم اقتصادی

موضوع؛

بازی های دیفرانسیلی و کاربرد آن در اقتصاد

استاد راهنما؛

دکتر امیر منصور طهرانچیان

استاد مشاور؛

دکتر محسن علیمحمدي

دانشجو؛

صمد یدالله پور عربي

تیر ۹۱

چکیده

نظریه بازی ها تصمیم گیری در یک محیط تعاملی را مطالعه می کند. آن نظریه ای از تعارض و همکاری بین تصمیم گیرندگان است. نظریه بازی ها به نحو گسترده ای مبتنی بر مدل های ریاضی است و برای رسیدگی به مسائل تعارض و همکاری در اقتصاد و علم مدیریت و همچنین دیگر علوم اجتماعی، مفید واقع شده است. یکی از شاخه های پیچیده و سودمند نظریه بازی ها، بازی های پویا یا دیفرانسیلی(از ایساکس ۱۹۶۵) است که تصمیم گیری تعاملی در طول زمان را مورد بررسی قرار می دهد. کاربرد های نظریه بازی های دیفرانسیلی در زمینه های مختلف به میزان قابل توجهی در پنجاه سال گذشته افزایش داشته است.

این پژوهش، با نظریه و کاربرد های بازی های دیفرانسیلی سرو کار دارد. ما تنها بر مفاهیم نظری بازی که برای مطالعه بازی دیفرانسیلی نیاز است، تأکید می کنیم. ما عناصر و نشانه هایی از کنترل بهینه که در مطالعه بازی های دیفرانسیلی مفید هستند را مورد توجه قرار می دهیم و شرایط تعادل برای تعادل نش تحت بازی همزمان را بیان می کنیم . ابزار های مهم در اینجا، اصل ماکزیمم نظریه کنترل بهینه و معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمن از برنامه ریزی پویا هستند. این پژوهش، در زمینه های کاربردی، تعدادی از مطالعات انجام شده در زمینه های اقتصاد و علم مدیریت را شامل می شود: انحصار چند جانبه کورنو، تصمیم های تبلیغاتی در بازار یابی، استخراج منابع طبیعی وکنترل آلودگی، که عمدتاً از مقالات و مجلات گرفته شده اند.

کلید واژه ها: نظریه بازی ها، بازی های دیفرانسیلی، نظریه کنترل بهینه، تعادل نش.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول؛ معرفی پژوهش

۱-۱ تعریف و بیان مسأله..... ۲

۱-۲ سئوال پژوهش..... ۳

۱-۳ اهداف پژوهش..... ۳

۱-۴ روش پژوهش..... ۴

فصل دوم؛ مروری بر ادبیات موضوع و نظریه کنترل بهینه

۲-۱ نظریه کنترل بهینه..... ۶

۲-۱-۱ تاریخچه مختصری از نظریه کنترل بهینه..... ۷

۲-۲ نظریه بازی ها..... ۸

۲-۳-۱ مفاهیم واصطلاحات..... ۹

۲-۴ تاریخچه مختصری از نظریه بازی ها..... ۱۱

۲-۳ کنترل بهینه..... ۱۳

۲-۳-۱مدل ریاضی از پویایی مدل..... ۱۳

۲-۳-۲ تابع هدف..... ۱۵

۲-۳-۳ اصل مسئله کنترل بهینه..... ۱۷

۲-۴ روش برنامه ریزی پویا..... ۱۷

۲-۵ اصل ماکزیمم پونتریاگین..... ۲۳

۲-۶ چگونه یک مسئله کنترل بهینه را حل کنیم؟..... ۳۱

۲-۷ افق زمانی نامتناهی..... ۳۸

فصل سوم؛ بازی دیفرانسیلی

۳-۱ بازی دیفرانسیلی..... ۴۳

۳-۲ بازی دیفرانسیلی غیر همکارانه..... ۴۵

۳-۲-۱ تعادل نش..... ۴۶

۳-۲-۲ تعادل نش دور-باز..... ۴۷

۳-۲-۳ تعادل نش مارکف..... ۴۹

۳-۲-۴ اثرات استراتژیک..... ۵۰

۳-۳ بازی دیفرانسیل استاکلبرگ..... ۵۷

۳-۳-۱ تعادل استاکلبرگ دور-باز..... ۵۸

۳-۴ بازی دیفرانسیلی همکارانه..... ۶۱

۳-۴-۱ بهینه پارتو ۶۲

۳-۴-۲ نظریه چانه زنی نش ۶۳

فصل چهارم؛ بازی دیفرانسیلی در اقتصاد

۴-۱بازی انحصار چند جانبه دیفرانسیلی با کالا های متمایز و قیمت های چسبنده.....۶۸

۴-۱-۱ راه حل دور-باز.....۷۰

۴-۱-۲ راه حل مارکف(دور-بسته) بی حافظه.....۷۴

۴-۲ رقابت استراتژی های تبلیغاتی.....۷۸

۴-۲-۱ تابع هدف و پویایی مدل.....۸۰

۴-۲-۲ تعادل مارکف.....۸۱

۴-۲-۳ حالت پایدار و شرایط متقارن.....۸۴

۴-۳ منابع تجدید ناپذیر.....۸۶

۴-۳-۱ حالت همکارانه.....۸۷

۴-۳-۲ حالت غیر همکارانه.....۸۹

۴-۳-۲-۱ راه حل دور-باز.....۹۰

۴-۳-۲-۲ راه حل مارکف.....۹۳

۴-۴ منابع تجدید پذیر ۹۵

فصل پنجم؛ یافته (الگو) های پژوهش

۵-۱ بازی تبلیغاتی دیفرانسیلی استاکلبرگ.....۹۹

۵-۱-۱ راه حل دور-باز استاکلبرگ.....۱۰۰

۵-۱-۲ راه حل استاکلبرگ با رهبری توام.....۱۰۳

۵-۲ بازی انحصار چند جانبه با اثرات جانبی زیست محیطی.....۱۰۷

۵-۲-۱ تابع رفاه اجتماعی.....۱۰۸

۵-۲-۲ تابع رفاه اجتماعی با اثرات زیست محیطی.....۱۰۹

فصل ششم؛ نتیجه گیری و پیشنهادها

۶-۱ نتیجه گیری.....۱۱۵

۶-۲ پیشنهادها.....۱۱۶

منابع و مأخذ.....۱۱۸

فهرست نمودارها

عنوان **صفحه**

۳-۱ بازی چانه زنی.....۶۶

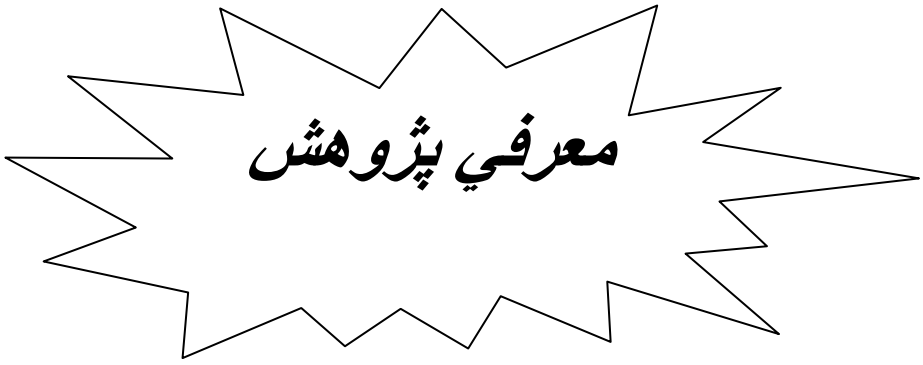
۳-۲ راه حل چانه زنی نش.....۶۷

فهرست جدول

عنوان **صفحه**

۴-۱ آمار مقایسه ای برای رقابت متقارن.....۸۶

فصل اول



۱-۱. تعریف و بیان مسأله:

لزوم بهینه بودن تخصیص منابع و رفتار واحد های اقتصادی ، کاربرد روش های کمی در اقتصاد را به نحو چشمگیری افزایش داده است. در این خصوص روش های بهینه سازی ریاضی[۱] فرصت های کم نظیری چه در عرصه ی نظریه پردازی و چه در مطالعات تجربی فرا روی اقتصاد دانان قرار داده است.در این جا با عنایت به این که با گذشت زمان فضای تصمیم گیری تغییر می کند ، بنابر این کاربرد بهینه سازی پویا[۲] از اهمیت ویژه ای برخوردار می شود. بهینه سازی پویا به طور کلی به چهار روش حساب تغییرات،اصل ماکزیمم، برنامه ریزی پویا و بازی دیفرانسیلی تقسیم می شوند. در سه روش نخست ، یک تصمیم گیرنده وجود دارد که می خواهد در طول زمان تابع هدف خود را در طول دوره زمانی مشخص بهینه نماید. در روش بازی های دیفرانسیلی، چند تصمیم گیرنده وجود دارند که هر یک به دنبال حداکثر سازی منافع خود هستند به نظر می رسد این روش که از ترکیب نظریه بازی ها و کنترل بهینه حاصل شده است ، از توانایی بیشتری برای تعیین پیش بینی های اقتصادی برخوردار باشد.

نظریه ی بازی های پویا (دیفرانسیلی)رفتار بهینه ، وجود عوامل متعدد و پایداری پیامد های ناشی از تصمیم ها نسبت به زمان را به ارمغان می آورد. برای سروکار داشتن با مسائلی که این ویژگی ها را دارند، روش نظریه بازی های دیفرانسیلی مدل سازی این مسائل را به سه قسمت تقسیم می سازد .مدل سازی محیطی که عوامل در آن فعالیت می کنند یکی ازاین قسمت ها می باشد. برای به دست آوردن مدل ریاضی از محیط عوامل که معمولا به صورت معادلات دیفرانسیلی مشخص می شود، فرض بر این است که این معادلات ویژگی های پویای اصلی محیط را حفظ می کنند.

بخش دوم ، مدل سازی از اهداف عوامل است. معمولا اهداف عوامل به عنوان توابعی از هزینه می باشند، که باید به حداقل رسانیده شوند. از آن جا که این حداقل رساندن باید منوط به مدل پویای خاص از محیط انجام شود. تکنیک هایی (روش هایی)در نظریه کنترل گسترش یافتند که نقش مهمی را در حل بازی های

---

۱. Mathematical optimizathion
۲.Dynamic optimization

دیفرانسیلی ایفا می کنند. در واقع همان طور که گفته شد، نظریه بازی های پویا از ادغام نظریه بازی های ایستا و نظریه کنترل بهینه بوجود آمده است. بخش سوم مدل سازی در نظریه بازی های دیفرانسیلی، نظریه کنترل بهینه است که به عنوان یک رکن اساسی در این نظریه می باشد.

با توجه به این که بخش قابل توجهی از ادبیات اقتصاد ریاضی به کار برد حساب تغییرات، اصل ماکزیمم و برنامه ریزی پویا اختصاص دارد، در این پژوهش ضمن معرفی روش بازی های دیفرانسیلی به مهمترین کاربرد های آن در اقتصاد اشاره می شود.

۱-۲. سوال پژوهش:

با توجه به طرح مسئله که در بخش قبلی پژوهش حاضر ارائه گردید، مهم ترین سوال پژوهش حاضر عبارتست از :

به لحاظ کاربردی چه تفاوتی بین روش بازی های دیفرانسیلی و سایر روش های بهینه سازی پویا وجود دارد؟

۱-۳. اهداف پژوهش:

فرض عقلایی بودن رفتار واحد های اقتصادی —چه در سطح خرد و چه در سطح کلان- نیازمند بهینه بودن است. بنابر این تعیین و پیش بینی واکنش به کلانه ها و متغیرهای اثرگذار، از طریق یک فرایند بهینه سازی رفتار واحد های اقتصادی امکان پذیر است. از این رو، روش های بهینه سازی ریاضی در نظریه پردازی و نیز سیاست گذاری از اهمیت زیادی برخوردار گردیده اند.

دردنیای واقعی، زمان مستقل ترین متغیر محسوب می شود! با گذشت زمان فضای تصمیم سازی و نیز پارامتر های اثر گذاری تغییر می کنند. به همین دلیل یک تصمیم که در گذشته بهینه بوده است، ممکن است در زمان حاضر و یا در آینده بهینه نباشد .بهینه سازی پویا، این امکان را فراهم می کند که به طور کمی تصمیم های بهینه در طول زمان محاسبه و ارزیابی شوند.

بازی های دیفرانسیلی یکی از روش های نسبتاً جدید بهینه سازی پویاست. در این روش چند تصمیم گیرنده (بازیکن) در بهینه سازی اهداف خود با یکدیگر در تعامل و رقابت هستند. به نظر می رسد که این روش نسبت به سایر روش های بهینه سازی پویا، به شرایط دنیای واقعی نزدیک تر باشد یکی از مهم ترین اهداف این پژوش نمایش ویژگی ها و امکانات روش فوق در مطالعات و مباحث اقتصادی در مقایسه با سایر روش های بهینه سازی پویاست.

۱-۴. روش پژوهش:

پژوهش حاضر به روش توصیفی –تحلیلی است که در آن اطلاعات مورد نیاز به روش کتابخانه و از طریق مراجعه به منابع و مراکز علمی-دانشگاهی و همچنین مراکزاطلاع رسانی الکترونیکی جمع آوری شده است.

فصل دوم

مروري بر ادبيات موضوع و نظريه كنترل بهينه

در این فصل با توجه به این که بازی دیفرانسیلی ترکیبی از نظریه کنترل بهینه و نظریه بازی ها است، مفاهیمی از نظریه کنترل بهینه و نظریه بازی ها که در مطالعه بازی های دیفرانسیلی اهمیت دارند را بیان می کنیم. همچنین با توجه به این که ابزار و روش های حل مسئله کنترل بهینه نقش مهمی در حل بازی های دیفرانسیلی دارند، به طور مفصل وکامل تری مسئله کنترل بهینه را بیان می کنیم و روش های اصل حداکثر سازی و برنامه ریزی پویا را برای حل آن شرح می دهیم.

۲-۱. نظریه کنترل بهینه[1]

بسیاری از مسئله ها و کاربرد های علوم اقتصاد و مدیریت سیستم های پویا یا سیستم هایی که در طول زمان تغییر می کنند، را شامل می شوند. با توجه به این که زمان به طور پیوسته و یا به طور گسسته در نظر گرفته شود، این سیستم ها به عنوان سیستم های زمان پیوسته ویا سیستم های زمان پیوسته نامیده می شوند. در این پژوهش ما سیستم های زمان پیوسته[2] را در نظر می گیریم.

نظریه کنترل بهینه، شاخه ای از ریاضیات برای پیدا کردن روش های بهینه به منظور کنترل یک سیستم پویا است. نظریه کنترل بهینه در پی یافتن قانون کنترل خاص برای یک سیستم معین است به شکلی که ضابطه بهینگی خاصی به دست آید. مسئله کنترل تابعی از متغیرهای کنترل و متغیرهای وضعیت است. کنترل بهینه در واقع مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل[3] است که مسیری از متغیرهای کنترل که تابع سود یا مطلوبیت را ماکزیمم می کند، نشان می دهد. یک مسئله کنترل بهینه اساساً از اجزا زیر تشکیل می شود:

- مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل یا تفاضلی که سیستم پویا مسئله را نشان می دهد؛
- مجموعه ای از محدودیت های مرتبط با متغیر های سیستم؛
- مجموعه ای از شرایط کرانه ای مرتبط با متغیر؛

[1] . Optimal control theory
[2] . Continuous-time systems
[3] . Differential equations

- یک تابع سود(هزینه)[1]، به عبارتی معیار سنجش عملکرد، که باید بیشینه (کمینه) شود.

مسئله کنترل بهینه را می توان به کمک یکی از دو اصل حداکثر سازی پونتریاگین و برنامه ریزی پویا حل نمود که اصل حداکثر سازی بر پایه تابع همیلتون و اصل برنامه ریزی پویا بر پایه معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن بنا نهاده شده اند.

۲-۱-۱. تاریخچه مختصری از نظریه کنترل بهینه

نظریه کنترل بهینه ، درحساب تغییرات[2] ریشه دارد. نام حساب تغییرات به وسیله **اولر** [3] در سال ۱۷۶۶ معرفی شد و همراه با **لاگرانژ**[4] (۱۷۶۶،۱۷۶۲،۱۷۵۹) سهم قابل ملاحظه ای در توسعه این نظریه داشتند . وهردو نام خود را به وسیله معادله دیفرانسیل مشهور اولر -لاگرانژ اجین ساختند،که تابع مطلوب و مشتاقات آن به منظور حل مسائل بهینه سازی پویا باید تعیین شوند[5]. پیشگامان تئوری کنترل بهینه مدرن، در ارتباط با اصل حداکثر سازی، **ولنتاین**[6] (۱۹۳۷)،**مک شین**[7] (۱۹۳۷) **آمباستومین**[8](۱۹۴۳) و **هیستنس**[9] (۱۹۴۹) (نسخه توسعه یافته این کار بعد ها در سال ۱۹۶۶ منتشر شد) است. (**انگوردا**[10] ؛ ۲۰۰۵)

در آغاز نیمه دوم قرن بیستم، انگیزه های نظری اصل موسوم به حداکثر سازی توسط **پونتریاگین**[11] روس (۱۹۵۶) گسترش داده شد. تحقیقات او در این رابطه منجر شد که کتابی در این زمینه در سال ۱۹۶۱نوشت. از طرف دیگر در همین سالها، در حدود سال ۱۹۵۰ **بلمن و ایساکس**[12] آمریکایی اصل برنامه ریزی پویا که

---

[1] . Profit (cost) function
[2] . Calculus of variation
[3] . Euler
[4] . Lagrange

۴. به دلیل کلاسیك بودن این روش، در ادامه این پژوهش از این روش استفاده نخواهیم کرد.

[6] .Valentine
[7] . Mc shane
[8] . Ambartsvmian
[9] . Hesteness
[10]. Engwerda
[11] . Pontriagin
[12]. Isuacs and bellman

یکی دیگر از تکنیک های مدرن در نظریه کنترل بهینه می باشد را ارائه دادند که منجر به انتشارات کتابی توسط **بلمن** (۱۹۶۵) و **بلمن و دریفوس**[۱] (۱۹۶۲) شد.

با گسترش و توسعه نظریه کنترل بهینه، مقالات و کتاب های زیادی ارائه شد که یکی از مهم ترین آن در این زمینه و در رابطه با اقتصاد، نظریه کنترل بهینه با کار بردهایی در اقتصاد وعلم مدیریت می باشد که توسط **ستی و تامسون** [۲] در سال ۱۹۸۹ انتشار یافت .که بعدا نسخه گسترش یافته و ویرایش شده ی آن در سال ۲۰۰۰ ارائه شد. در این کتاب نویسندگان به ارائه و تشریح کامل مسئله کنترل و راه حل های آن پرداختند و به همراه مثال هایی به بیان کاربرد های آن در مسائل اقتصادی پرداختند.(**یونگ و پتروسیان**[۳]؛ ۲۰۰۶)

۲-۲. نظریه بازی ها[۴]

نظریه بازی ها شرایطی را که شامل دو یا چند تصمیم گیرنده[۵] (افراد، سازمان ها، بنگاه ها یا دولت ها) می شود را مورد مطالعه قرار می دهد. تصمیم گیرند گام به عنوان بازیکن[۶] تعریف می شوند. بازیکنان اغلب تا حدودی دارای منافع متناقض و یا متداخلی هستند و با توجه به شرایط تصمیمات فردی و یا جمعی می گیرند. در یک بازی سرنوشت بازیکنان به هم وابسته است؛ اقدامات صورت گرفته توسط یک بازیکن خاص نه فقط بر منافع و سرنوشت خود بلکه بر منافع و سرنوشت دیگر بازیکنان اثر می گذارد. وابستگی متقابلی که در بسیاری از مسئله های اقتصادی شناخته شده اند، چنین هستند: بین بنگاه و مصرف کنندگان در بازار برای محصول ان بنگاه، بین بنگاه و عرضه نهاده های آن، بین بنگاه و سرمایه گذاران آن و... .

در مقایسه با بهینه یابی یک نفره (برنامه ریزی ریاضی،نظریه کنترل بهینه و نظریه تصمیم)، یکی از ویژگی های کلیدی نظریه بازی ها، حضور دو یا چند بازیکن در وضعیت بازی است که هر بازیکن تصمیمات دیگر

[1]. Dreyfus
[2] . Sethi and Tampson
[3] .Yeung and petrosian
[4] . Games theory
[5] . Decision maker
[6] . Player

بازیکنان را هنگام انتخاب اقدام خود در نظر می گیرد. نظریه پردازان بازی ها، بین دو نوع از بازی ها همکارانه[1] و غیرهمکارانه[2] تمایز قائل شدند. فرض که بازی در یک محیط غیر همکارانه اجرا شود به این معنی است که در آن بازیکنان نمی توانند یا نمی خواهند تصمیمات خود را بر اساس تعهدات الزام آور همکارانه اجرا کنند. بازیکنان رقیب هستند و همه بازیکنان در جهت دستیابی به بهترین منفعت خود عمل می کنند. اما در یک بازی همکارانه، فرض بر این است که اگر بازیکنان بتوانند به عنوان یک گروه عمل کنند و وجود منافع و سود مشترک را تشخیص دهند، در این جهت دستیابی به منافع متقابل به طور هماهنگ عمل می کنند. اصل مهم در بازی همکارانه، استراتژی قابل قبول برای گروه بازیکنان است، در مقایسه با بازی غیر همکارانه استرتژی ها باید قابل قبول و در دسترس بازیکنان فردی باشد. اصل مهم دیگر در بازی های همکارانه، شناسایی روشی برای تقسیم دستاورد های مشترک میان بازیکنان فردی است.(**داکنر و همکاران**؛ ۲۰۰۰)

۲-۲-۱. مفاهیم و اصطلاحات

استراتژی[3]: استراتژی هر بازیکن عبارت از آن مجموعه اقدامات (عمل ها) است که بازیکن می تواند از میان آن ها یکی را انتخاب کند. به عبارت دیگر استراتژی عبارت است از انتخاب های موجود و پیش روی بازیکن.

پیامد[4]: به مقدار برد و باخت و آن چه که در آخر بازی عاید بازیکن می شود، پیامد گفته می شود. یا به عبارتی میزان سود یا زیانی(هزینه) که بازیکن در بازی به دست می آورد. در بازی های پویا با زمان پیوسته

[1]. Cooperative
[2]. Non-cooperative
[3]. Strategy
[4]. Pay off

به میزان سود یا زیانی که در لحظه t به دست می آید پیامد آنی[1] گفته می شود؛ مجموع پیامد های آنی در کل طول دوره زمانی از اجرای بازی، به عنوان پیامد بازی پویا (تابع هدف[2]) شناخته می شود.

عقلانیت[3]: هدف نهایی هر بازیکن در بازی، رسیدن به بالاترین یا بهترین پیامد ممکن است. برای دنبال کردن این هدف، ضروری است که بدانیم بازیکنان تا چه حد توان محاسبه استراتژی خود را دارند و چه قدر قادرند در عمل از استراتژی تبیین شده خود تبعیت کنند. اغلب در نظریه بازی ها فرض بر این است افراد به خوبی توانایی محاسبه استراتژی و تبعیت از آن را دارند. این فرض اساسی رفتار عقلایی[4] نام دارد.

دانش عمومی[5] نسبت به قاعده بازی : فرض می شود که قاعده بازی را همه ی بازیکنان یک بازی می دانند.در نظریه بازی منظور از قاعده بازی عبارت است از: لیست بازیکنان، استراتژی هر بازیکن، پیامد حاصل از هر ترکیب استراتژی برای هر بازیکن و تابع هدف.

تعادل[6]: وقتی بازی شروع می شود، این سئوال پیش می آید که هر بازیکن چه اقدام یا عملی را از مجموعه استراتژی های خود انتخاب خواهد کرد؟ پاسخ این سئوال را می توان را در قالب تعادل بیان کرد. یعنی در تعادل، هر بازیکن طوری عمل می کند که بهترین پاسخ به استراتژی های انتخابی سایر بازیکنان باشد. در تعادل لزوماً بازیکنان به بیشترین پیامد خود دست پیدا نمی کنند. ممکن است تعادل در نقطه ای اتفاق افتد که برای همه بازیکنان نتیجه ای بدتر داشته باشد. یافتن بازی ها در همه ی بازی ها به سهولت صورت نمی گیرد. زیرا وقتی تعداد بازیکنان یا تعداد استراتژی ها افزایش یابد، حل کردن و یافتن تعادل نیز پیچیده تر می شود.

---

[1] . Instantaneous pay off
[2] . Objective function
[3] . Rationality
[4] . Rational behavior
[5] . Common knowledge
[6] . Equilibrium

۲-۲-۲. *تاریخچه مختصری از نظریه بازی ها*

فون نیومن و مورگنسترن[۱] در سال ۱۹۴۴ اساس نظریه بازی ها را در کتاب خود بنا گذاشتند .آن ها در کتاب خود چنین استدلال کردند که مسائل اقتصادی را می توان به عنوان یک بازی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. این کتاب به ارائه تحقیقات گسترده تر درباره ی نظریه بازی ها منجر شد. سنگ بنای بعدی در تئوری بازی های ایستا توسط **جان نش**[۲] در چهار مقاله ایشان در طی سال های ۱۹۵۰ تا ۱۹۵۳ گذاشته شده است. او وجود یک تعادل استراتژیک برای بازی های غیر همکارانه را اثبات کرد که به عنوان تعادل نش شناخته شده است. تعادل نش بعنوان یک استراتژی ترکیبی تعریف می شود که متشکل از استراتژی هر بازیکن می باشد و بازیکنان نمی توانند با انحراف یک جانبه از این ویژگی مطلوبیت بیشتری کسب کنند. از این رو این راه حل تعادلی خود اعمال است، یعنی آن راه حل بهینه برای هر بازیکن است.

با ارائه مقالات و آثار متعدد و ایده های جدید در مسئله کنترل و نظریه بازی ها، در اواخر دهه ی ۱۹۴۰ و اوایل دهه ۱۹۵۰ اولین مدل دینامیکی (پویا) بازی ها به ظهور رسید. استارت اولیه در جهت توسعه نظریه بازی های پویا توسط **ایساکس**[۳] در نتیجه ی کار او در شرکت RANDدر طی سال ۱۹۴۸ تا ۱۹۵۵ ارائه شد. او مقاله ی نخست خود را در زمینه بازی های تعقیبی نوشت (۱۹۵۱). در این مقاله ایده های اصلی برای حل بازی پویا دونفره، مجموع صفر از نوع تعقیب وگریز[۴] وجود دارد. او این ایده ها را در سال های ۱۹۵۴و۱۹۵۵پیش برد و اساس نظریه بازی های پویا را در چارچوب بازی دو نفره مجموع صفر[۵] پی ریزی کرد. این نظریه برای اولین بار توسط **برکویتز**[۶] مورد بحث قرار گرفت .مشارکت اولیه در بازی های مجموع

[1] . Von Neumann and Morgenstern
[2] John Nash
[3] . Isaacs
[4] . Pursuit-evasion
[5] . Two-person zero sum game
[6] . Berkovitz