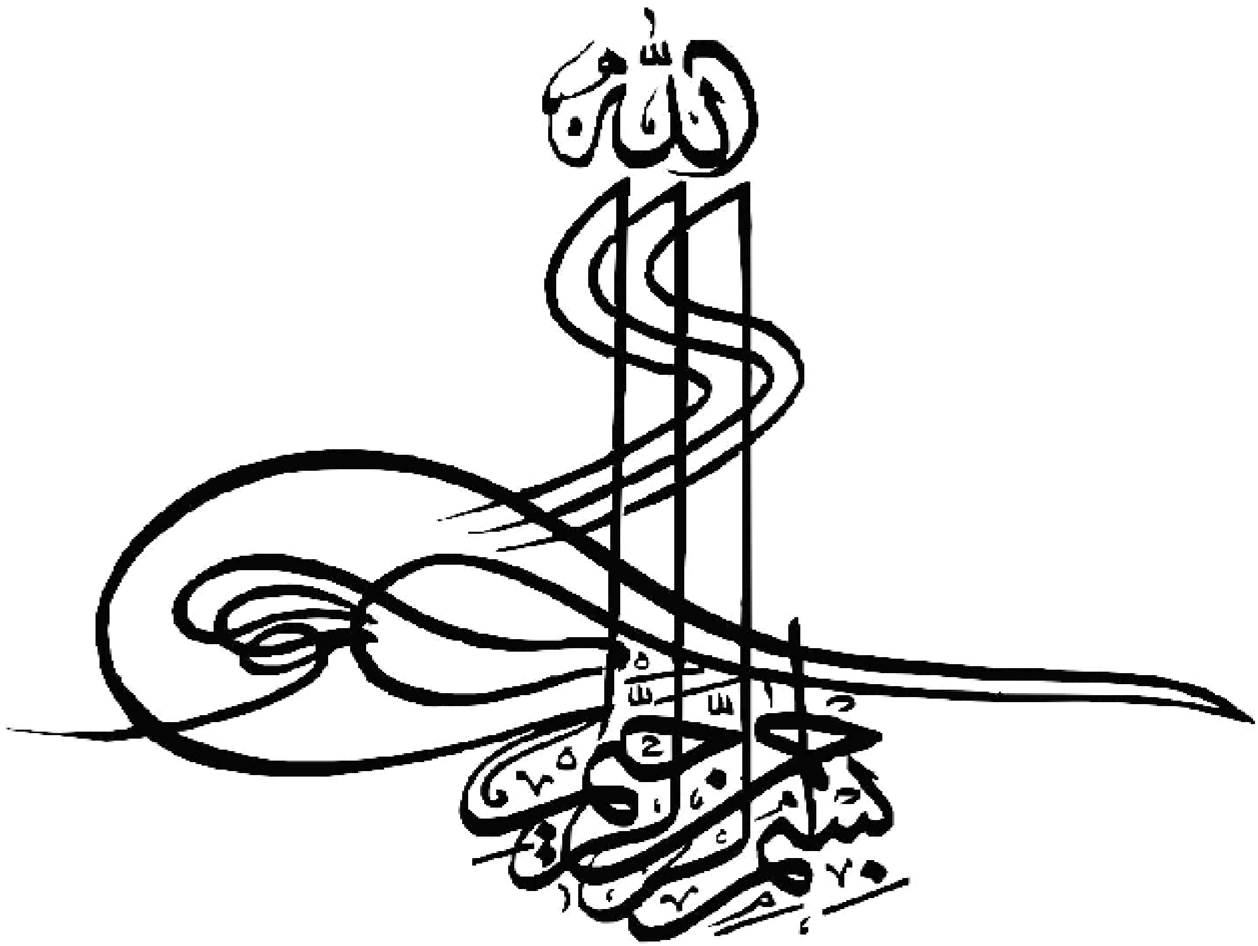
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان:

توپولوژی زاریسکی کلاسیک مدول‌ها و فضاهای طیفی

از:

مسعود یحیی‌پور داخل

استاد راهنما:

دکتر فرهاد درستکار

مرداد 1392

تقدیم به

مادرعزیز و پدر بزرگوارم

تقدیر و تشکر

پس از سپاس از درگاه یزدان بزرگ بر خویش لازم می‌دانم که از زحمت‌های بی‌دریغ پدر و مادرم که در تمامی مراحل زندگی همراه من بودند، سپاسگزاری نمایم.

همچنین از استادم جناب آقای دکتر فرهاد درستکار قدردانی می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر حبیب‌اله انصاری طرقی و آقای دکتر شهاب‌الدین ابراهیمی آتانی که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، سپاسگزاری می‌نمایم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده

توپولوژی زاریسکی کلاسیک مدول‌ها و فضاهای طیفی

مسعود یحیی‌پور داخل

فرض کنید R یک حلقه، M یک R- مدول چپ و $Spec({}_R M)$ مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های اول M باشد. در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی یک تعمیم از توپولوژی زاریسکی حلقه‌ها به مدول‌ها، که آن را توپولوژی زاریسکی کلاسیکِ مدول‌ها می‌نامیم، خواهیم پرداخت. همچنین این فضای توپولوژیک را از دید فضاهای طیفی بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی : توپولوژی زاریسکی کلاسیک، زیرمدول‌های اول، طیف اول، فضاهای طیفی

Abstract

Classical Zariski Topology of Modules and Spectral Spaces

Masoud Yahyapour Dakhel

Let R be a ring, M be a left R-module and $Spec({}_R M)$ be the collection of all prime submodules of M. In this dissertation, we study a generalization of the Zariski topology of rings to modules and call it classical Zariski topology of modules. Also we investigate this topological space from the point of view of spectral spaces.

Key words : Classical Zariski topology, Prime spectrum, Prime submodules, Spectral spaces

در سال 1969، هاکستر[1] [12] یکی از بخش‌های مقاله‌اش را به بررسی خواص فضاهای طیفی اختصاص داد. در سال 1978، دانز[2] [8] مقاله‌ای با عنوان مدول‌های اول ارائه داد. در سال 1984، لو[3] [14] مقاله‌ای درباره زیرمدول‌های اول از مدول‌ها ارائه داد. هدف این مقاله معرفی ویژگی‌های مفید زیرمدول‌های اول و برخی از کاربردهای آن بود. در سال 1997، مک‌کاسلند[4]، مور[5] و اسمیت[6] [18] واریته‌ای را برای زیرمدول‌های یک مدول تعریف کردند و با در نظر گرفتن مجموعه‌ی واریته‌ی زیرمدول‌های یک مدول به عنوان گردایه‌ی زیرمجموعه‌های بسته نشان دادند که اگر این گردایه نسبت به اجتماع متناهی بسته باشد آن‌گاه یک توپولوژی روی $Spec(M)$ القا می‌شود که آن را توپولوژی زاریسکی روی طیف اول مدول نامیدند. اما این توپولوژی لزوماً روی طیف اول تمام مدول‌ها قابل تعریف نیست. در سال 1999، لو [16] برای رفع این مشکل با تعریف واریته‌ای جدید برای زیرمدول‌های یک مدول، توپولوژی دیگری را روی طیف اول تمام مدول‌ها بیان کرد و آن را توپولوژی زاریسکی روی $Spec(M)$ نامید.

در این پایان‌نامه حلقه‌ها همواره شرکت‌پذیر، یک‌دار و نه لزوماً جابه‌جایی و تمامی مدول‌ها نیز مدول‌های چپ و یکانی می‌باشند. همچنین این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد که در فصل اول مفاهیم مقدماتی را از جبر و توپولوژی بیان می‌کنیم. در فصل دوم زیرمدول‌های اول و نیم‌اول را تعریف کرده و به بررسی آن‌ها می‌پردازیم. در فصل سوم ضمن معرفی توپولوژی‌های متفاوت روی طیف اول مدول، توپولوژی زاریسکی کلاسیک را برای یک مدول مطالعه کرده و برخی از خاصیت‌های توپولوژیکی را برای آن مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت در فصل چهارم این فضای توپولوژیک را از دیدگاه فضاهای طیفی مورد بررسی قرار خواهیم داد. در تنظیم این پایان‌نامه از منابع [4]، [5] و [16] استفاده شده است.

[1] M. Hochster
[2] J. Dauns
[3] Chin-Pi Lu
[4] R. L. McCasland
[5] M. E. Moore
[6] P. F. Smith

فصلِ 1 :

مقدمه و پیش‌نیاز

در این فصل برخی از مفاهیم جبری و توپولوژیکی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف 1.1 . ایده‌آل سره‌ی P از حلقه‌ی R را یک **ایده‌آل اول** گوییم اگر برای هر ایده‌آل I و J از R، $IJ \subseteq P$ ایجاب کند $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. اگر $\{0\}$ ایده‌آل اول حلقه‌ی R باشد آن‌گاه حلقه‌ی R را **اول** می‌نامیم. اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد، ایده‌آل سره‌ی P ایده‌آلی اول است اگر برای $r, s \in R$، $rs \in P$ ایجاب کند $s \in P$ یا $r \in P$.

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با $Spec(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین برای ایده‌آل I از R، واریته‌ی I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(I) = \{P \in Spec(R) :\ I \subseteq P\}.$$

تذکر 2.1 . فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت **بعد حلقه**‌ی R را برابر با سوپریمم طول تمام زنجیرهای در $Spec(R)$ تعریف می‌کنیم و آن را با $dim(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف 3.1 . حلقه‌ی R را **ساده** گوییم اگر ایده‌آل غیربدیهی نداشته باشد.

تذکر 4.1 . در یک حلقه‌ی ساده مانند R، $\{0\}$ ایده‌آلی اول است.

برهان . فرض کنید I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند، به‌طوری‌که $IJ \subseteq \{0\}$. در این صورت از ساده بودن حلقه نتیجه می‌شود که هر یک از دو ایده‌آل I و J یا $\{0\}$ هستند یا R. اگر $I = J = R$، آن‌گاه $R = RR = R^2 = \{0\}$، که این تناقض است. بنابراین $I = \{0\}$ یا $J = \{0\}$. از این رو $\{0\}$ ایده‌آلی اول از حلقه‌ی ساده‌ی R است. +

گزاره 5.1 (ر.ک. [10, 3.1]) . فرض کنید P یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(1) P ایده‌آلی اول است.

(2) اگر I و J ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R و به‌طور سره شامل P باشند، آن‌گاه $IJ \not\subseteq P$.

(3) R/P حلقه‌ای اول است.

(4) اگر I و J ایده‌آل‌هایی راست از حلقه‌ی R باشند به‌طوری‌که $IJ \subseteq P$، آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

(5) اگر I و J ایده‌آل‌هایی چپ از حلقه‌ی R باشند به‌طوری‌که $IJ \subseteq P$، آن‌گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

(6) برای $x, y \in R$، $xRy \subseteq P$ ایجاب کند $y \in P$ یا $x \in P$.

تعریف 6.1 . فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و I ایده‌آلی از R باشد. اشتراک تمـام ایـده‌آل‌هـای اول شـامل I را بـا $\sqrt{I}$ نشان داده و آن را **رادیکال** ایده‌آل I می‌نامیم. اگر مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول شامل I تهی باشد آن‌گاه تعریـف مـی‌کنـیم $\sqrt{I} = R$. همچنین اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول R را **رادیکال پوچ** حلقه‌ی R گوییم و آن را با $N(R)$ نشان می‌دهیم.

گزاره 7.1 (ر.ک. [13, Chap.8, 2.6]) . اگر I ایده‌آلی از حلقه‌ی جابه‌جایی R باشد آن‌گاه

$$\sqrt{I} = \{r \in R : r^n \in I \text{ ،} n > 0 \text{ برای}\}.$$

تعریف 8.1 . فرض کنید R یک حلقه باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های چـپ (راسـت) ماکسـیمال R را **رادیکـال ژاکوبســون** حلقه‌ی R گوییم و آن را با $J(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف 9.1 . ایده‌آل I از حلقه‌ی R را یک **ایده‌آل نیم‌اول** گوییم اگر برابـر بـا اشـتراک خـانواده‌ای از ایـده‌آل‌هـای اول باشـد. همچنین اگر $\{0\}$ ایده‌آلی نیم‌اول از حلقه‌ی R باشد آن‌گاه حلقه را **نیم‌اول** می‌نامیم.

گزاره 10.1 (ر.ک. [10, 3.7]) . ایده‌آل I از حلقه‌ی R یک ایده‌آل نیم‌اول است اگـر و تنهـا اگـر بـرای $x \in R$ ، $xRx \subseteq I$ ایجاب کند $x \in I$.

گزاره 11.1 (ر.ک. [10, 3.8]) . فرض کنید I یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(1) I ایده‌آلی نیم‌اول است.

(2) اگر J ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد به‌طوری‌که $J^2 \subseteq I$، آن‌گاه $J \subseteq I$.

(3) اگر J ایده‌آلی از حلقه‌ی R و به‌طور سره شامل I باشد، آن‌گاه $J^2 \not\subseteq I$.

(4) اگر J ایده‌آلی راست از حلقه‌ی R باشد به‌طوری‌که $J^2 \subseteq I$، آن‌گاه $J \subseteq I$.

(5) اگر J ایده‌آلی چپ از حلقه‌ی R باشد به‌طوری‌که $J^2 \subseteq I$، آن‌گاه $J \subseteq I$.

تعریف 12.1 . فرض کنید M یـک R- مـدول باشـد. M را **نــوتری (آرتینـــی)** گـوییم اگـر هـر زنجیـر صـعودی (نزولـی) از زیرمدول‌های M مانند $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ $(M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots)$ سرانجام متوقف شود. به عبارت دیگر عددی طبیعـی مانـند n موجود باشد که برای هر i، $i \geq n$ داشته باشیم $M_i = M_n$.

گزاره 13.1 (ر.ک. [10, 1.2]) . فرض کنید N یک زیرمدول از R- مدول M باشد. در این صورت M نوتری است اگر و تنها اگر N و M/N نوتری باشند.

گزاره 14.1 (ر.ک. [10, 1.3]) . هر جمع مستقیم متناهی از R- مدول‌های نوتری، یک R- مدول نوتری است.

گزاره 15.1 . فرض کنید M یک R- مدول و همچنین K_1، $\ldots$، K_n زیرمدول‌هایی از M باشند به‌طوری‌که برای هر $1 \leq i \leq n$، $\frac{M}{K_i}$ها نوتری باشند. در این صورت $\frac{M}{\bigcap_{i=1}^{n} K_i}$ نوتری است.

برهان . از آنجا که $\frac{M}{K_1}$، $\ldots$، $\frac{M}{K_n}$ نوتری هستند پس بنابر گزاره‌ی 14.1، $\frac{M}{K_1} \oplus \cdots \oplus \frac{M}{K_n}$ نوتری است. حال R- همریختی f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} f : M &\to \frac{M}{K_1} \oplus \cdots \oplus \frac{M}{K_n} \\ m &\to (m + K_1, \ldots, m + K_n). \end{aligned}$$

لذا $\ker f = K_1 \cap \ldots \cap K_n$. بنابراین داریم

$$\frac{M}{\bigcap_{i=1}^{n} K_i} \cong \operatorname{Im} f \leq \frac{M}{K_1} \oplus \cdots \oplus \frac{M}{K_n}.$$

از این رو بنابر گزاره‌ی 13.1، $\frac{M}{\bigcap_{i=1}^{n} K_i}$ نوتری است. +

تعریف 16.1 . فرض کنید M یک R- مدول و N زیرمدولی از M باشد. N را **زیرمدول ماکسیمال** M گوییم، هرگاه

(1) $N \neq M$؛

(2) اگر K زیرمدولی از R- مدول M باشد به‌طوری‌که $N \subseteq K \subseteq M$، آن‌گاه $K = M$ یا $N = K$.

مجموعه‌ی تمام زیرمدول‌های ماکسیمال M را با $Max(M)$ نشان می‌دهیم.

قضیه 17.1 (ر.ک. [1, 2.8]) . فرض کنید M یک R- مدول چپ ناصفر و با تولید متناهی باشد. در این صورت هر زیرمدول سره‌ی M مشمول در یک زیرمدول ماکسیمال است. به خصوص M زیرمدول ماکسیمال دارد.

با توجه به اینکه هر حلقه مانند R، به عنوان یک R- مدول چپ (راست)، با تولید متناهی است، از قضیه‌ی قبل نتیجه‌های زیر را داریم.

نتیجه 18.1 . فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت

(1) اگر I ایده‌آل چپ (راست) سره‌ای از حلقه‌ی R باشد آن‌گاه ایده‌آل چپ (راست) ماکسیمالی از R شامل I وجود دارد؛

(2) حلقه‌ی R ایده‌آل چپ (راست) ماکسیمال دارد.

نتیجه 19.1 . فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت

(1) اگر I ایده‌آل سره‌ای از حلقه‌ی R باشد آن‌گاه ایده‌آل ماکسیمالی از R شامل I وجود دارد؛

(2) حلقه‌ی R ایده‌آل ماکسیمال دارد.

تعریف 20.1 . مدول M روی حلقه‌ی جابه‌جایی R را **ضربی** گوییم، اگر برای هر زیرمدول N از M، ایده‌آل I از R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N = IM$.

تذکر 21.1 . فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی، M یک R- مدول ضربی و N زیرمدولی از M باشد. در این صورت

$$N = (N : M)M .$$

برهان . از آنجا که N زیرمدولی از R- مدول ضربی M است، لذا ایده‌آل I از R وجود دارد به‌طوری‌که $N = IM$. پس $I \subseteq (N : M)$. بنابراین $N = IM \subseteq (N : M)M \subseteq N$. از این رو $N = (N : M)M$. +

تذکر 22.1 . اگر R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد آن‌گاه هر مدول دوری یک مدول ضربی است.

برهان . فرض کنید M یک R- مدول دوری باشد. در این صورت عضو ناصفر $m \in M$ وجود دارد به‌طوری‌که $M = Rm$. حال فرض کنید N زیرمدول دلخواهی از M باشد. قرار می‌دهیم

$$I = \{r \in R : r \in (N : M)\}.$$

ادعا می‌کنیم $N = IM$. فرض کنید $n \in N \leq Rm$، دلخواه باشد. در این صورت $r \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $n = rm$. لذا $rRm \subseteq N$. از این رو $rM \subseteq N$. پس $r \in (N : M)$. لذا $r \in I$ و $n = rm \in IM$. بنابراین $N \subseteq IM$. حال نشان می‌دهیم $IM \subseteq N$. برای هر $x \in IM = IRm = Im$، عضو $r \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $x = rm$. لذا $x = rm \in N$. بنابراین $IM \subseteq N$ و نتیجه می‌شود که M یک مدول ضربی است. +

گزاره 23.1 (ر.ک. [9, 2.5]) . فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و M یک R- مدول ضربی ناصفر باشد. در این صورت

(1) هر زیرمدول سره‌ی M، مشمول در زیرمدول ماکسیمالی از M است؛

(2) K زیرمدول ماکسیمال M است اگر و تنها اگر ایده‌آل ماکسیمال P از حلقه‌ی R چنان وجود داشته باشد که $K = PM \neq M$.

گزاره 24.1 (ر.ک. [9, 2.8]) . فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و M یک R- مدول ضربی با تنها تعدادی متناهی زیرمدول ماکسیمال باشد. در این صورت M یک R- مدول دوری است.

تعریف 25.1 . R- مدول ناصفر M را **ساده** گوییم هرگاه M و $\{0\}$ تنها زیرمدول‌های آن باشند. مجموع تمام زیرمدول‌های ساده‌ی M را با $soc(M)$ نشان می‌دهیم. در صورتی که M دارای هیچ زیرمدول ساده‌ی غیرصفری نباشد آن‌گاه قرار می‌دهیم $soc(M) = 0$. همچنین R- مدول M را **نیم‌ساده** گوییم اگر $soc(M) = M$. حلقه‌ی R را **نیم‌ساده‌ی چپ (راست)** گوییم اگر R به عنوان یک R- مدول، نیم‌ساده‌ی چپ (راست) باشد.

گزاره 26.1 (ر.ک. [20, Page 2]) . فرض کنید M یک R- مدول چپ نیم‌ساده باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(1) M آرتینی است.

(2) M نوتری است.

گزاره 27.1 (ر.ک. [10, 4.4]) . فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(1) تمام R- مدول‌های راست نیم‌ساده هستند.

(2) تمام R- مدول‌های چپ نیم‌ساده هستند.

(3) حلقه‌ی R نیم‌ساده‌ی راست است.

(4) حلقه‌ی R نیم‌ساده‌ی چپ است.

گزاره 28.1 (ر.ک. [10, 4.18]) . فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(1) حلقه‌ی R اول و آرتینی راست است.

(2) حلقه‌ی R اول و آرتینی چپ است.

(3) حلقه‌ی R ساده و آرتینی راست است.

(4) حلقه‌ی R ساده و آرتینی چپ است.

(5) حلقه‌ی R ساده و نیم‌ساده است.

(6) برای عدد صحیح مثبت n و حلقه‌ی تقسیم D، $R \cong M_n(D)$.

تعریف 29.1 . R- مدول M را **نیم‌ساده‌ی همگن** گوییم، هرگاه مدول M جمع مستقیمی از مدول‌های ساده‌ی یکریخت باشد.

تعریف 30.1 . فرض کنید U و M دو R- مدول باشند. U را یک مدول M- **انژکتیو** گوییم اگر برای هر زیرمدول N از M، هر همریختی $N \to U$ را بتوان به همریختی $M \to U$ گسترش داد.

گزاره 31.1 (ر.ک. [1, 18.3]) . فرض کنید M یک R- مدول چپ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(1) M، انژکتیو است.

(2) M نسبت به R انژکتیو است.

تعریف 32.1 . R- مدول چپ M را **هم- نیم‌ساده** گوییم اگر هر R- مدول ساده، M- انژکتیو باشد.

گزاره 33.1 (ر.ک. [23, 23.1]) . فرض کنید M یک R- مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(1) M یک مدول هم- نیم‌ساده است.

(2) هر زیرمدول سره‌ی M برابر با اشتراکی از زیرمدول‌های ماکسیمال است.

گزاره 34.1 . هر مدول نیم‌ساده، هم- نیم‌ساده است.

برهان . فرض کنید مدول M نیم‌ساده باشد. در این صورت بنابر [23, 20.2] هر R- مدول، M- انژکتیو است. لذا از تعریف 32.1 نتیجه می‌شود که M مدولی هم- نیم‌ساده است. +

تعریف 35.1 . (1) عنصر $c \in R$ را **منظم** گوییم، اگر $r \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $crc = c$.

(2) حلقه‌ی R را **منظم** گوییم، اگر هر عضو $c \in R$ منظم باشد.

تعریف 36.1 . خانواده‌ی $\{I_j : j \in J\}$ از ایده‌آل‌های چپ حلقه‌ی R را **مستقل** گوییم مشروط بر اینکه به‌ازای هر $k \in J$، $I_k \cap I_k^* = 0$، که در آن I_k^* ایده‌آل چپ تولید شده به وسیله‌ی $\{I_j : j \neq k\}$ می‌باشد.

تعریف 37.1 . حلقه‌ی R را یک **حلقه‌ی گولدی**[7] **(چپ)** می‌نامیم، اگر

(1) R در شرط زنجیر صعودی بر پوچ‌سازهای چپ صدق کند؛

(2) هر مجموعه‌ی مستقل از ایده‌آل‌های چپ R متناهی باشد.

مثال 38.1 . هر حلقه‌ی نوتری چپ مانند R، یک حلقه‌ی گولدی چپ است. از آنجا که حلقه‌ی R نوتری است، شرط (1) برقرار است. اگر $\{I_j \,:\, j \in J\}$ یک مجموعه‌ی مستقل نامتناهی از ایده‌آل‌های چپ می‌بود، آن‌گاه I_1، I_2، $\ldots$ وجود داشتند به‌طوری‌که $I_1 \subset I_1 \oplus I_2 \subset I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \subset \cdots$، که شرط زنجیر صعودی را نقض می‌کرد. بنابراین شرط (2) نیز برقرار است.

تعریف 39.1 . فرض کنید N یک زیرمدول از R- مدول M باشد به‌طوری‌که برای هر زیرمدول ناصفر K از M، $N \cap K \neq 0$. در این صورت N را یک **زیرمدول اساسی** M می‌نامیم. همچنین اگر ایده‌آل چپ I یک زیرمدول اساسی از R (به عنوان یک R- مدول) باشد آن‌گاه I را یک **ایده‌آل اساسی چپ** می‌نامیم.

تعریف 40.1 . (1) حلقه‌ی اول R را **کراندار**[8] **چپ** گوییم، اگر هر ایده‌آل اساسی چپ، شامل ایده‌آلی ناصفر باشد.

(2) حلقه‌ی R را **تمام کراندار**[9] **چپ** گوییم اگر هر تصویر همریخت اول R کراندار چپ باشد.

(3) حلقه‌ی R را ***FBN*- حلقه‌ی چپ** گوییم اگر R تمام‌کراندار چپ و نوتری چپ باشد.

مثال 41.1 . (1) هر حلقه‌ی جابه‌جایی یک حلقه‌ی کراندار چپ است. همچنین از آنجا که حلقه‌های نیم‌ساده ایده‌آل چپ اساسی سره ندارند، لذا حلقه‌های نیم‌ساده نیز کراندار چپ هستند.

(2) هر حلقه‌ی جابه‌جایی یک حلقه‌ی تمام کراندار چپ است.

تعریف 42.1 . حلقه‌ی R را یک ***PI*- حلقه** گوییم اگر برای $r > 0$، $0 \neq f(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ چنان وجود داشته باشد که برای هر r تایی a_1، $\ldots$، a_r در R داشته باشیم $f(a_1, \ldots, a_r) = 0$.

مثال 43.1 . اگر R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد، آن‌گاه R یک PI- حلقه است. زیرا کافی است $f(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ را به صورت $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_2 x_1$ اختیار کنیم.

[7] Goldie
[8] bounded
[9] fully bounded

تذکر 44.1 (ر.ک. [20, Page 205]) . هر PI- حلقه یک حلقه‌ی تمام کراندار است.

گزاره 45.1 (ر.ک. [20, Page 479]) . هر تصویر همریخت یک PI- حلقه، PI- حلقه است.

گزاره 46.1 (ر.ک. [20, Page 499]) . هر PI- حلقه‌ی اول، حلقه‌ای گولدی و کراندار است.

توجه می‌کنیم که اگر R یک PI- حلقه و P ایده‌آلی اول از حلقه‌ی R باشد آن‌گاه بنابر گزاره‌های 5.1 و 45.1، R/P یک PI- حلقه‌ی اول است. لذا از گزاره‌ی 46.1، R/P یک حلقه‌ی کراندار (چپ و راست) و گولدی (چپ و راست) است.

تعریف 47.1 . مدول M روی حلقه‌ی R را **وفادار** گوییم اگر $Ann_R(M)=\{0\}$.

مثال 48.1 . فرض کنید D یک حلقه‌ی تقسیم و V یک D- فضای برداری باشد. در این صورت V به عنوان یک D- فضای برداری وفادار است.

تعریف 49.1 . ایده‌آل P از حلقه‌ی R را **اولیه‌ی چپ (راست)** گوییم اگر R- مدول چپ (راست) ساده‌ی M چنان وجود داشته باشد که $P=Ann_R(M)$. حلقه‌ی R را **اولیه‌ی چپ (راست)** گوییم اگر $\{0\}$ یک ایده‌آل اولیه‌ی چپ (راست) باشد. به عبارت دیگر حلقه‌ی R را اولیه‌ی چپ (راست) گوییم اگر R- مدول چپ (راست) ساده و وفاداری وجود داشته باشد.

لم 50.1 (ر.ک. [20, Page 6]) . (1) هر حلقه‌ی ساده، اولیه است.

(2) هر حلقه‌ی اولیه، اول است.

با توجه به لم 50.1، می‌توان دید که هر ایده‌آل ماکسیمال حلقه‌ی R یک ایده‌آل اولیه است. همچنین هر ایده‌آل اولیه از حلقه‌ی R یک ایده‌آل اول است.

گزاره 51.1 (ر.ک. [21]) . فرض کنید R یک PI- حلقه‌ی چپ و P ایده‌آل اولیه‌ی چپ R باشد. در این صورت R/P یک حلقه‌ی آرتینی است.

گزاره 52.1 (ر.ک. [10, 9.4]) . فرض کنید R یک FBN- حلقه‌ی چپ و P ایده‌آل اولیه‌ی چپ R باشد. در این صورت R/P یک حلقه‌ی آرتینی و ساده است.

تعریف 53.1 . فرض کنید R یک حلقه باشد. حلقه‌ی R را **هم- نیم‌ساده‌ی چپ** یا **V- حلقه‌ی چپ** گوییم اگر R به عنوان یک R- مدول چپ، هم- نیم‌ساده باشد.

مثال 54.1 . فرض کنید R یک حلقه‌ی نیم‌ساده‌ی چپ (راست) باشد. در این صورت از گزاره‌ی 27.1 نتیجه می‌شود که R به عنوان یک R- مدول، نیم‌ساده‌ی چپ (راست) و بنابر گزاره‌ی 34.1، R یک R- مدول هم- نیم‌ساده است. لذا هر حلقه‌ی نیم‌ساده یک V- حلقه‌ی چپ (راست) است.

گزاره 55.1 (ر.ک. [(2) 23.5 ,23]) . فرض کنید R یک حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت R یک V- حلقه است اگر و تنها اگر منظم باشد.

قضیه 56.1 (ر.ک. [1 ,2]) . فرض کنید R یک PI- حلقه باشد. در این صورت R منظم است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل I از R داشته باشیم $I^2=I$.

نتیجه 57.1 (ر.ک. [2]) . فرض کنید R یک PI- حلقه باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(1) R یک حلقه‌ی منظم است.

(2) هر R- مدول چپ ساده، انژکتیو است.

(3) هر R- مدول چپ، نیم‌ساده است.

تعریف 58.1 . فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت ایده‌آل چپ I در R را **T- پوچ‌توان** گوییم، اگر برای هر دنباله مانند $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ در I، عدد صحیح مثبت k چنان وجود داشته باشد که $r_1 \mathbf{K}\, r_k = 0$.

تعریف 59.1 . فرض کنید X یک مجموعه باشد. گردایه‌ی T از زیرمجموعه‌های X را یک **توپولوژی** برای X می‌نامیم، اگر

(1) X و $\varnothing$ متعلق به T باشند؛

(2) اجتماع هر دسته از اعضای T، متعلق به T باشد؛

(3) اشتراک هر گردایه‌ی متناهی از اعضای T، متعلق به T باشد.

به عبارت دیگر فضای توپولوژیک عبارت است از زوج مرتب $(X\,,\mathrm{T})$، که در آن X یک مجموعه و T یک توپولوژی بر X است. زیرمجموعه‌ی U از X را یک **مجموعه‌ی باز** X گوییم، اگر U عضوی از T باشد. با استفاده از مجموعه‌های باز،

می‌توان گفت فضای توپولوژیک عبارت است از مجموعه‌ای مانند X همراه با گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های آن (مجموعه‌های باز) به‌طوری‌که X و $\varnothing$ هر دو بازند و اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز نیز باز است. زیرمجموعه‌ی V از X را **بسته** می‌نامیم، اگر متمم آن در X باز باشد. بر اساس مجموعه‌های بسته، فضای توپولوژیک عبارت است از مجموعه‌ای مانند X همراه با گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های آن به‌طوری‌که X و $\varnothing$ هر دو بسته‌اند و اشتراک دلخواه و اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته نیز بسته است.

تعریف 60.1 . فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی دلخواه و T گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت T را **توپولوژی گسسته** بر روی X می‌نامیم. همچنین فضای توپولوژیک (X, T) را یک **فضای گسسته** می‌نامیم. گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X که فقط شامل X و $\varnothing$ باشد نیز یک توپولوژی بر X است، که آن را **توپولوژی ناگسسته** یا **توپولوژی بدیهی** می‌نامیم.

برخی از ویژگی‌های توپولوژی گسسته عبارتند از

(1) هر زیرمجموعه‌اش باز و بسته است؛

(2) اگر (X, T) یک فضای توپولوژیک باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in X$، مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ در T باشد، آن‌گاه T یک توپولوژی گسسته است. زیرا اگر A زیرمجموعه‌ی دلخواه X باشد آن‌گاه $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$. از آنجا که هر $\{x\}$ در T است، از تعریف 59.1، نتیجه می‌شود $A \in \mathrm{T}$. از این رو T یک توپولوژی گسسته است.

تعریف 61.1 . فضای توپولوژیک X را یک **T_0- فضا** گوییم اگر برای هر x و y متمایز از X مجموعه‌ی بازی که فقط شامل یکی از آن‌هاست وجود داشته باشد.

لم 62.1 . فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که $|X| > 1$. همچنین فرض کنید T توپولوژی بدیهی باشد. در این صورت X نمی‌تواند یک T_0- فضا باشد.

برهان . از آنجا که $\varnothing$ و X تنها زیرمجموعه‌های باز X هستند، بنابراین مجموعه‌ی بازی که تنها شامل یکی از نقطه‌های X باشد و دیگری را شامل نشود وجود ندارد. لذا X نمی‌تواند یک T_0- فضا باشد. +

تعریف 63.1 . فرض کنید Y زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد. $x \in X$ را **نقطه‌ی حدی** Y می‌نامیم، اگر برای هر مجموعه‌ی باز مانند U شامل x داشته باشیم $Y \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$. مجموعه‌ی نقاط حدی Y را با Y' نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی $Y \cup Y'$ را با $\overline{Y}$ نشان داده آن را **بستار** مجموعه‌ی Y می‌گوییم.

تعریف 64.1 . فرض کنید Y زیرمجموعه‌ای بسته از یک فضای توپولوژیک باشد. عنصر $y \in Y$ را **نقطه‌ی عمومی**[10] Y گوییم اگر $Y = \overline{\{y\}}$.

تعریف 65.1 . فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و x و y نقطه‌هایی از X باشند. گوییم x و y می‌توانند جدا شوند اگر هر یک در مجموعه‌ی بازی که شامل نقطه‌ای دیگر نمی‌شود، قرار گیرند. فضای توپولوژیک X، T_1 **- فضاست** اگر هر دو نقطه‌ی متمایز در X را بتوان جدا نمود.

گزاره 66.1 . فضای توپولوژیک X، T_1- فضاست اگر و تنها اگر برای هر x در X، مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$ در X بسته باشد.

برهان . $(\Leftarrow)$ فرض کنید X، T_1- فضا باشد. ادعا می‌کنیم برای هر $x \in X$، $\{x\}$ در X بسته است. کافی است نشان دهیم

$$\overline{\{x\}} = \{x\}.$$

فرض کنید y نقطه‌ای در X و متمایز با x باشد. همچنین فرض کنید y نقطه‌ی بستاری $\{x\}$ باشد. در این صورت برای هر مجموعه‌ی باز در X مانند G و شامل y داریم $G \cap \{x\} \neq \emptyset$. از آنجا که X، T_1- فضاست، مجموعه‌های بازی مانند U و V وجود دارند به‌طوری‌که

$$x \notin V \quad \text{و} \quad y \in V \quad ، \quad y \notin U \quad ، \quad x \in U .$$

درحالی‌که $V \cap \{x\} = \emptyset$. بنابراین $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید x و y نقطه‌هایی متمایز در X باشند. در این صورت از فرض نتیجه می‌شود که $\{x\}$ و $\{y\}$ در X بسته‌اند. لذا $X \setminus \{x\}$ و $X \setminus \{y\}$ مجموعه‌هایی باز در X هستند به‌طوری‌که

$$y \in X \setminus \{x\} \quad \text{و} \quad x \notin X \setminus \{x\} \quad ، y \notin X \setminus \{y\} \quad ، \quad x \in X \setminus \{y\}.$$

---

[10] generic point