بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه فردوسی مشهد

علوم ریاضی
ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض(گرایش جبر)

عنوان

گراف‌های جبری متعدی

استاد راهنما

دکتر احمد عرفانیان

استاد مشاور

دکتر بهناز طلوع

نگارنده

خدیجه اصغری

۱۳۹۲

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: گراف‌های جبری متعدی

نام نویسنده: خدیجه اصغری

استاد راهنما: دکتر احمد عرفانیان

استاد مشاور: دکتر بهناز طلوع

دانشکده: علوم ریاضی   گروه: ریاضی محض   رشته تحصیلی: ریاضی محض(گرایش جبر)

تاریخ تصویب: ۱۳۹۲/۳/۷   تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۱۰/۱۸

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   تعداد صفحات: ۹۱

چکیده پایان‌نامه : فرض کنید n و k دو عدد صحیح باشند به‌طوری‌که $0 \leq k \leq n$. در این پایان‌نامه به معرفی یک رده جدید از گراف‌ها، با عنوان $H(n,k)$ که شامل ابرمکعب‌ها و برخی گراف‌های معروف است، می‌پردازیم، برای نمونه گراف‌های جانسون، گراف‌های نسر و گراف‌های پترسن، زیرگراف‌های $H(n,k)$ هستند.
برخی خواص جبری و توپولوژیکی گراف‌های $H(n,k)$ را ارائه می‌کنیم. برای مثال، $H(n,k)$ یک گراف کیلی است، خودریختی گروهی $H(n,k)$ شامل یک زیرگروه از مرتبه $2^n.n!$ است، عدد همبندی $H(n,k)$، $\binom{n}{k}$ می‌باشد. اگر k فرد باشد، $H(n,k)$ همیلتونی است و اگر k زوج باشد، شامل دو مؤلفه‌ی همبند یکریخت است. به‌علاوه، قطر $H(n,k)$ را در حالتی که k یک عدد فرد است محاسبه می‌کنیم.
در انتها برای برخی مقادیر کوچک n و k، خواص گراف $H(n,k)$ را بیان کرده و چند حدس پیرامون عدد استقلال و عدد خوشه‌ای گراف $H(n,k)$ را بررسی خواهیم نمود.

واژگان کلیدی: ابرمکعب، گراف جانسون، گراف نسر، گراف کیلی، عدد همبندی، گروه خودریختی، همیلتونی، قطر.

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : گراف‌های جبری متعدی

اینجانب خدیجه اصغری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر احمد عرفانیان متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه فردوسی مشهد" و یا "Ferdowsi University of Mashhad" به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ
امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق این اثر و محصولات آن(مقالات مستخرج، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است. این مطلب بایستی به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج این رساله بدون ذکر مرجع مجاز نیست.**

خدایا...

خداوندا از تو سپاسگزارم که از روی کرم، بنده نوازی نمودی و این بنده کمترین خویش را در راه علم و دانش سوق دادی و هدایت فرمودی.

خداوندا از تو سپاسگزارم به خاطر نعمت همجواری با امام مهربانی‌ها که همواره لطف بی کران آن مهربان را در لحظه لحظه زندگی خود دیده و باور دارم.

خداوندا از تو سپاسگزارم به خاطر پدر و مادری صبور و فداکار که توانستم در سایه وجودشان آرام گیرم و در این راه گام بردارم.

خداوندا از تو سپاسگزارم به خاطر آموزگارانی که برایم زندگی، زنده بودن و زنده زیستن را معنا کردند. آنان که موجب افتخار زندگی‌ام هستند و به وجودشان می‌بالم.

خداوندا از تو سپاسگزارم به خاطر دوستانی که دوستی ایشان موجب خوشوقتی من است.

خداوندا از تو سپاسگزارم به خاطر تمام نعمت‌هایی که از آن خبر دارم و به خاطر تمام نعمت‌هایی که از آن بی خبرم.

تقدیم به :

پدر و مادرم که اولین و همیشگی ترین معلمان من هستند. آنان که همواره تکیه گاه و مایه دلگرمی من می باشند. آنان که در طول تحصیل متحمل زحمات بسیارم بودند.

و نیز تقدیم می کنم به

برادرم و خواهرانم که وجودشان شادی بخش و مایه آرامش است.

سپاس گزاری...

سپاس خداوند مهربانی‌ها را که یادش ترنم عارفانه‌ی زندگی همه‌ی انسان‌هاست. خداوندی که عشق به او تنها محرک زندگی من است و در راستای این پژوهش فرصت تجربه‌ی لحظاتی گران قدر را در کنار اساتید و دوستان عزیزی به من ارزانی داشت.
وظیفه‌ی خود می‌دانم که از

استاد گرامی‌ام جناب آقای دکتر احمد عرفانیان

به خاطر تلاش زیاد و علاقه‌ی سرشار ایشان برای نائل آمدن بر قله‌های رفیع علم و صعود به سوی امواج اندیشه‌های بلند و نورانی کمال تشکر را داشته باشم، که تاریخ را مردان بزرگ با اراده‌های پولادین و عزم‌های راسخ ورق زده‌اند. امیدوارم در تمام لحظات عمر خود بهره‌ی وافر برده و نردبان انسانیت را با جهش‌هایی تند پیموده و به کمال واقعی دست یابند.

خدیجه اصغری
۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه، یک گراف $G=(V,E)$، به عنوان یک گراف بدون جهت در نظر گرفته می‌شود که $V=V(G)$ مجموعه‌ی رئوس و $E=E(G)$ مجموعه یال‌های آن می‌باشند. گروه خودریختی‌های گراف G را با نماد $\mathrm{Aut}(G)$ نشان می‌دهند. گراف G رأس‌متعدی است اگر $\mathrm{Aut}(G)$ به طور متعدی روی $V(G)$ عمل کند. یک قوس در G زوج مرتبی از رئوس مجاور است و گراف G را قوس‌متعدی نامند اگر $\mathrm{Aut}(G)$ به طور متعدی روی مجموعه قوس‌هایش عمل کند. توجه داریم که یک گراف قوس‌متعدی، لزوماً رأس‌متعدی است (به [۸] مراجعه شود).

اگر Γ یک گروه متناهی و S زیرمجموعه‌ی آن باشد به‌طوری‌که تحت معکوس‌گیری بسته بوده و شامل عنصر همانی نباشد، آن‌گاه یک گراف کیلی $\mathrm{Cay}(\Gamma,S)$ گرافی با مجموعه رئوس Γ و مجموعه یال‌های $E(\mathrm{Cay}(\Gamma,S))=\{gh : hg^{-1}\in S\}$ است.

توجه داریم که هر گراف کیلی یک گراف رأس‌متعدی است.

فرض کنید m,n و i اعداد صحیح ثابتی باشند با $0\leq i\leq m\leq n$، و Ω_n مجموعه توانی مجموعه‌ی $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ باشد. فرض کنید $\Omega_n^m=\{X\in\Omega_n : |X|=m\}$. در این صورت در [۸] رده گراف‌های $J(n,m,i)$ به صورت زیر تعریف شده است.

مجموعه رئوس $J(n,m,i)$ عبارت است از Ω_n^m، که دو زیرمجموعه X و Y مجاورند اگر $|X\cap Y|=i$. برای $n\geq 2m$، گراف‌های $J(n,m,m-1)$ گراف‌های جانسون و $J(n,m,0)$ گراف‌های نسر نامیده می‌شوند و گراف $J(5,2,0)$، گراف پترسن است. گراف‌های جانسون و نسر رده‌های گرافی مهمی در نظریه‌ی گراف‌های جبری هستند و نتایج قابل توجهی از آنها به دست آمده است. برای مثال [۱، ۱۰، ۱۵، ۲۰] ببینید.

یک ابرمکعب $n-$بعدی Q_n، گرافی است با مجموعه رئوس V شامل همه‌ی دنباله‌های به طول n روی مجموعه دوتایی $\{0,1\}$ می‌باشد، دو رأس x و y توسط یک یال متصل شده‌اند اگر و تنها اگر آنها دقیقاً در یک مؤلفه متفاوت باشند. ابرمکعب یکی از محبوب‌ترین، رایج‌ترین و مؤثرترین ساختارهای توپولوژیکی

شبکه‌های میان ارتباطی است، به عنوان مثال [۱۴، ۲۲] را ببینید.

در این پایان‌نامه، ما یک رده‌ی جدید از گراف‌ها، با عنوان $H(n,k)$ (برای هر $n \geq k \geq ۰$)، ارائه می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که $H(n,k)$ شامل ابرمکعب و برخی گراف‌های معروف از جمله گراف‌های جانسون و نسر، به عنوان زیرگراف‌هایش است. برخی خواص جبری و توپولوژیکی $H(n,k)$ را بررسی می‌کنیم. برای مثال $H(n,k)$ یک گراف کیلی قوس‌متعدی است. گروه خودریختی‌های گراف $H(n,k)$ شامل زیرگروهی از مرتبه $n!.۲^n$ می‌باشد. اگر k فرد باشد، آن‌گاه $H(n,k)$ همبند و همیلتونی است، و در صورتی که k زوج باشد، $H(n,k)$ شامل دو مؤلفه‌ی همبند یکریخت است.

این پایان‌نامه به شرح زیر سازماندهی شده است. در فصل ۱ برخی از تعاریف و قضایای مورد نیاز به اختصار بیان شده است. فصل ۲ به تعریف گراف $H(n,k)$ و برخی از مقدمات آن می‌پردازد، همچنین برخی خواص زیرگراف‌های $H(n,k)$ بررسی شده است. در انتهای فصل برخی از خواص جبری $H(n,k)$ ارائه می‌شود. فصل ۳ همبندی $H(n,k)$ و خواص همیلتونی $H(n,k)$ را بررسی می‌کند. در این فصل مقدار قطر گراف $H(n,k)$ در حالتی که k یک عدد فرد است، محاسبه شده است.

در فصل ۴، حالات خاص گراف $H(n,k)$ در حالت $n = ۱, ۲, \cdots, ۷$ با مقادیر kهای متفاوت آن، توسط نرم‌افزار $Mathematica$ رسم نموده شده است.همچنین قطر، عدد رنگی، عدد خوشه‌ای، کمر، عدد استقلال و عدد غلبه‌ای هر گراف محاسبه می‌شود. سپس با کمک مقادیر به دست آمده، پیرامون عدد استقلال $H(n,k)$ در حالتی که n زوج یا فرد باشد و نیز عدد خوشه‌ای این گراف‌ها، حدس‌هایی زده شده است که امیدواریم در آینده‌ای نزدیک، اثبات شوند.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل مفاهیم و نمادهایی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های بعد به کار می‌روند. همچنین به بیان و در صورت لزوم اثبات قضایایی می‌پردازیم که در کتب و مقالات به صورت پراکنده وجود دارند و به تناسب در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱.۱ مقدماتی از گروه‌ها

در این بخش ابتدا برخی از تعاریف و قضایای مرتبط با مبحث گروه‌ها را بیان می‌کنیم. همچنین با توجه به مطالب مورد نیاز درباره‌ی مجموعه‌ها، مختصری از قوانین و قضایای پیرامون احتمال و نظریه‌ی اعداد نیز گردآوری شده است.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید Γ یک گروه باشد و S یک زیرمجموعه‌ی Γ، اگر برای هر $x \in S$ داشته باشیم $x^{-1} \in S$، گوییم S نسبت به معکوس گرفتن بسته است.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید Γ یک گروه و H مجموعه‌ای غیر تهی باشد. فرض کنید به ازای هر $g \in \Gamma$ و هر $x \in H$، عضو یکتایی از H که آن را با علامت $x * g$ نشان می‌دهیم، وجود داشته باشد به‌طوری که*

(i) به ازای هر $x \in H$، $x * 1 = x$.

(ii) به ازای هر $g_1, g_2 \in \Gamma$ و هر $x \in H$، $x * (g_1 g_2) = (x * g_1) * g_2$.

در این صورت گوییم گروه Γ بر مجموعه‌ی غیر تهی H عمل می‌کند و $*$ را ***عمل***[1] *Γ بر H گویند. برای سهولت در نوشتن به جای $x * g$ معمولاً خواهیم نوشت xg.*

تعریف ۳.۱.۱. *گوییم گروه Γ روی مجموعه‌ی H* ***متعدی*** *عمل می‌کند، هرگاه برای هر دو رأس x و y از H، $g \in \Gamma$ ای وجود داشته باشد به‌طوری‌که $xg = y$.*

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی غیر تهی H عمل کند و $x \in H$. در این صورت مجموعه‌ی $\{g \in \Gamma \mid xg = x\}$ را* ***پایدارساز***[2] *x در Γ می‌نامیم و آن را با علامت $\mathrm{St}_\Gamma(x)$ نشان می‌دهیم.*

تعریف ۵.۱.۱. *فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی غیر تهی H عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در H چنین تعریف می‌کنیم:*

گوییم $x_2 \sim x_1$، هرگاه وجود داشته باشد $g \in \Gamma$ به طوری‌که $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در H است. هر رده‌ی هم‌ارزی را یک $\Gamma-$مدار می‌نامیم. اگر $x \in H$، آن‌گاه رده‌ی هم‌ارزی شامل x را ***مدار***[3] *x در Γ می‌نامیم و آن را با علامت $\mathrm{Orb}_\Gamma(x)$ نشان می‌دهیم.*

با توجه به تعریف فوق واضح است که $\mathrm{Orb}_\Gamma(x) = \{xg \mid g \in \Gamma\}$. بر طبق خواص رده‌های هم‌ارزی، معلوم می‌شود که مدارها افرازی از H می‌باشند و در نتیجه هر دو مدار متمایز، از هم جدا هستند و اجتماع آنها برابر با H است.

در صورتی‌که $\mathrm{Orb}_\Gamma(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای آن را ***طول مدار*** *x در Γ می‌نامیم.*

لم ۶.۱.۱. *فرض کنید Γ گروه جایگشتی باشد که روی مجموعه‌ی غیر تهی H عمل می‌کند، و S یک مدار Γ باشد. در این صورت اگر x و y دو عضو از S باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی جایگشت‌ها در Γ که x را به y می‌نگارد، یک همرده راست $\mathrm{St}_\Gamma(x)$ است. و به عکس، هر عضو در همرده راست $\mathrm{St}_\Gamma(x)$ نگاشتی از x به همان رأس در S می‌باشد.*

[1] action [2] stabilizer [3] orbit

برهان. به لم ۱.۲.۲ در [۸]، مراجعه شود.

□

قضیه ۷.۱.۱. *(**مدار - پایدارساز**[۱]). فرض کنید گروه Γ بر مجموعه‌ی متناهی غیر تهی H عمل کند و x یک عضو در H باشد. در این صورت تناظر یک‌به‌یک بین $\mathrm{Orb}_\Gamma(x)$ و مجموعه‌ی تمام همرده‌های راست $\mathrm{St}_\Gamma(x)$ در Γ وجود دارد. به ویژه $|\mathrm{St}_\Gamma(x)||\mathrm{Orb}_\Gamma(x)| = |\Gamma|$.*

برهان. به لم ۲.۲.۲ در [۸]، مراجعه شود.

□

تعریف ۸.۱.۱. *فرض کنید A یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد، مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های A را **مجموعه توانی**[۲] A می‌نامیم و با نماد Ω نمایش می‌دهیم.*

قضیه ۹.۱.۱. *اگر مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، مجموعه توانی A یک مجموعه‌ی ۲^n عضوی است.*

نکته ۱۰.۱.۱.

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{۲k} = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \cdots \binom{n}{۲k+۱} = ۲^{n-۱}$$

تعریف ۱۱.۱.۱. *فرض کنید Ω مجموعه توانی مجموعه‌ی مفروض و ناتهی A باشد، در Ω عمل دوتایی Δ را که **تفاضل متقارن**[۳] نامیده می‌شود، چنین تعریف می‌کنیم*

$$X\Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X) = (X \cup Y) - (X \cap Y)\ ; \quad X, Y \in \Omega$$

برای هر X، Y و Z در Ω داریم

(آ) $X\Delta Y \in \Omega$،

(ب) $X\Delta Y = Y\Delta X$،

(پ) $X\Delta(Y\Delta Z) = (X\Delta Y)\Delta Z$،

(ت) $X\Delta\emptyset = X$،

---

[۱] orbit – stabilizer [۲] power set [۳] symmetric difference

(ث) $X\Delta X=\emptyset$،

(ج) $X\Delta \bar{X}=A$،

(چ) *اگر* $X\Delta Z=Y\Delta Z$ *آن‌گاه* $X=Y$.

بنابراین (Ω,Δ) *تشکیل گروه می‌دهد، این گروه آبلی است.*

یادآوری می‌کنیم که Ω_n مجموعه توانی مجموعه‌ی $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ است، پس $|\Omega_n|=2^n$. فرض کنید $\Omega_n^m=\{X\in\Omega_n : |X|=m\}$. در این صورت $|\Omega_n^m|=\binom{n}{m}$. و فرض کنید $\Omega_n'=\{X\in\Omega_n : \text{زوج باشد } |X|\}$ و $\Omega_n''=\{X\in\Omega_n : \text{فرد باشد } |X|\}$. در این صورت $|\Omega_n'|=|\Omega_n''|=2^{n-1}$.

نکته ۱.۱.۱۲. *برای هر دو مجموعه‌ی* A *و* B *در مجموعه توانی* Ω_n *داریم،* $|A\Delta B|=k$ *اگر و تنها اگر* $|\bar{A}\Delta B|=n-k$ *. که در آن* $\bar{A}$ *متمم مجموعه‌ی* A *می‌باشد.*
همچنین $|A\Delta B|=1$ *اگر و تنها اگر* $||A|-|B||=1$.

برهان.

$$|A\Delta B|=k\Rightarrow |A\cup B|-|A\cap B|=k\Rightarrow |A|+|B|-2|A\cap B|=k$$

$$\begin{aligned}|\bar{A}\Delta B|&=|\bar{A}|+|B|-2|\bar{A}\cap B|\\&=|\bar{A}|+|B|-2(|B|-|A\cap B|)\\&=(n-|A|)-(k-|A|+2|A\cap B|)+2(|A\cap B|)\\&\Leftrightarrow |\bar{A}\Delta B|=n-k\end{aligned}$$

□

تعریف ۱.۱.۱۳. ***(اتحاد واندرموند).*** *فرض کنید* m,k *و* n *اعداد طبیعی باشند. در این صورت*

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}=\binom{m+n}{k}$$

رابطه‌ی فوق را اتحاد واندرموند می‌نامیم.

۲.۱ مقدمات گراف‌ها

تعریف ۱.۲.۱. ***گراف***[۱] $G=(V,E)$ شامل مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ است، که در آن یک **یال** زوج نامرتبی از رأس‌های متمایز گراف G باشد. در این پایان‌نامه برای نمایش یک یال از نماد xy به جای $\{x,y\}$ استفاده می‌کنیم.
درجه رأس x در گراف G که با $\deg_G(x)$ نشان داده می‌شود، برابر با تعداد یال‌های واقع بر x می‌باشد. اگر گراف شناخته شده باشد، برای سادگی $\deg_G(x)$ را با $\deg(x)$ نشان می‌دهیم.
اگر xy یک یال باشد، آن‌گاه گوییم x و y دو رأس ***مجاور***[۲] می‌باشند، به عبارت دیگر y یک ***همسایه***[۳] ی x است، و با نماد $y \sim x$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی همسایه‌های رأس x، را ***همسایگی*** $N_G(x)$ نامیم، هرگاه شامل تمام رئوس مجاور با x باشد. توجه داریم که $N_G(x)$ شامل رأس x نیست. در یک گراف ساده، تعداد همسایه‌های یک رأس با درجه‌ی آن رأس برابر است.

تعداد رئوس در گراف G را، **مرتبه**[۴] ی گراف G می‌نامیم و به صورت $|V(G)|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. یک ***قوس***[۵] یا یال جهت‌دار، زوج مرتبی از رأس‌های مجاور است.

قضیه ۳.۲.۱. برای هر گراف $G=(V,E)$ داریم:

$$\sum_{x\in V(G)} \deg(x) = ۲|E(G)|.$$

تعریف ۴.۲.۱. ***گراف تهی***، گرافی است که هیچ یالی ندارد و ***گراف پوچ***، گرافی است که هیچ رأس و یالی ندارد.
گراف ساده ، گرافی است بدون جهت که طوقه و یال چندگانه ندارد.
گراف ساده‌ای که در آن هر دو رأس متمایز، با یک یال به یکدیگر متصل شده‌اند، ***گراف کامل*** نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای ناتهی از $V(G)$ باشد. در این صورت زیرگرافی از G که مجموعه رئوس آن X و مجموعه یال‌های آن، مجموعه‌ی یال‌هایی از G باشد که هر دو رأس آن‌ها در X

[۱] graph [۲] adjacent [۳] neighbour [۴] order [۵] arc

واقع است، را ***زیرگراف القایی*** [۱] *G روی X نامیم.*
تعداد زیرگراف‌های القایی گراف G برابر تعداد زیرمجموعه‌های $V(G)$ است.
زیرگرافی از G که تمامی مجموعه رئوس G را در بردارد و هر یال در آن، یالی در گراف G باشد، ***زیرگراف فراگیر*** [۲] *نامیده می‌شود.*

تعریف ۱.۲.۶. *زیرمجموعه‌ی S از رئوس G، یک* ***خوشه*** *نامیده می‌شود، هرگاه زیرگراف القایی G روی S، گرافی کامل باشد.*
عدد خوشه‌ای [۳] *G برابر با اندازه‌ی بزرگترین خوشه‌ی گراف G است و با $\omega(G)$ نمایش داده می‌شود.*

تعریف ۱.۲.۷. *دو گراف G و H را* ***یکریخت*** [۴] *نامیم هرگاه نگاشت دوسویی $\theta : V(G) \to V(H)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $u, v \in V(G)$ داشته باشیم: $uv \in E(G)$ اگر و تنها اگر $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$.*
اگر دو گراف G و H یکریخت باشند، آن‌گاه می‌نویسیم $G \cong H$.
یکریختی از گراف G به خودش را، یک ***خودریختی*** [۵] *G گوییم. در واقع خودریختی، یک جایگشت از رئوس G است که حافظ یال باشد.*
مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های گراف G تشکیل یک گروه می‌دهد که به آن ***گروه خودریختی گراف*** *G گوییم و با نماد $\mathrm{Aut}(G)$ نمایش می‌دهیم.*

تعریف ۱.۲.۸. *یک* ***مسیر*** *از G عبارت است از دنباله‌ی متناهی $v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$ به طوری که جملات آن یک در میان رأس‌ها و یال‌های متمایز G بوده و برای هر i، $1 \leq i \leq k$، v_{i-1} و v_i دو سر e_i باشند. دنباله‌ی فوق، مسیر بین v_0 و v_k است و طول این مسیر برابر k می‌باشد.*
طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v در گراف G، را ***فاصله*** [۶] *ی بین دو رأس نامیم و با نماد $d_G(u, v)$ نمایش می‌دهیم. اگر بین دو رأس u و v مسیری وجود نداشته باشد، آن‌گاه $d_G(u, v) = \infty$ است.*

لم ۱.۲.۹. *اگر x و y رئوس G و $g \in \mathrm{Aut}(G)$، آن‌گاه $d(x, y) = d(xg, yg)$.*

برهان. به لم ۱.۳.۲ در [۸]، مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۰. *بیشترین فاصله‌ی رأس x از دیگر رئوس گراف G، را* ***خروج از مرکز*** [۷] *رأس x نامیم.*

---

[۱] induced subgraph [۲] spanning subgraph [۳] clique number [۴] isomorphic [۵] automorphism
[۶] distance [۷] eccentricity

بیشترین فاصله در میان تمام رئوس گراف G به عبارت دیگر بیشترین مقدار خروج از مرکز گراف G را **قطر**[۱] گراف G نامیم. و با نماد $\operatorname{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\operatorname{diam}(G) = \max\left\{d_G(x,y) : \forall x,y \in V(G)\right\}$$

تعریف ۱۱.۲.۱. مسیری که دو رأس ابتدا و انتهای آن یکسان باشد، یک **دور** نام دارد. طول یک دور برابر تعداد یال‌هایش است.

طول کوتاهترین دور گراف G، **کمر** G نامیده می‌شود، و با $\operatorname{girth}(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۲.۲.۱. گراف G را **منظم**[۲] نامیم، هرگاه درجه‌ی تمام رئوس آن برابر باشد. اگر درجه‌ی هر رأس آن برابر n باشد، آن‌گاه G را یک گراف $n-$منظم و یا گراف منظم از درجه n نامیم.

قضیه ۱۳.۲.۱. هر گراف $n-$منظم از مرتبه‌ی k، دارای $kn/۲$ یال می‌باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید G یک گراف باشد،

آ. **مسیر همیلتونی** در گراف G، مسیری است که از تمام رئوس گراف G فقط و فقط یک بار عبور کند.

ب. **دور همیلتونی**، دوری است که از تمام رئوس گراف یک بار عبور کند.

پ. یک گراف با دور همیلتونی را **گراف همیلتونی** می‌نامیم.

مثال ۱۵.۲.۱. گراف کامل K_n برای هر $n \geq ۳$، یک گراف همیلتونی است.

گراف $n-$دور C_n برای هر $n \geq ۳$، یک گراف همیلتونی است.

تعریف ۱۶.۲.۱. گراف $k-$ **بخشی**[۳] گرافی است که می‌توان مجموعه‌ی رأس‌های آن را به k زیرمجموعه افراز کرد به طوری که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه قرار نگیرد.

گراف $k-$ **بخشی کامل**، یک گراف ساده‌ی $k-$بخشی است که در آن هر رأس با تمام رأس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیر یکسان با آن قرار دارند، مجاور است.

تعریف ۱۷.۲.۱. گراف G **همبند**[۴] است، هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت G **ناهمبند** است.

یک زیرگراف القایی G **مؤلفه‌ی همبند** نامیده می‌شود هرگاه بزرگترین زیرگراف همبند G باشد.

[۱] diameter [۲] regular [۳] partite graph [۴] connected

تعریف ۱.۲.۱۸. مجموعه‌ای از رئوس در گراف G، که با حذف هر رأس آن، تعداد مؤلفه‌های همبند گراف G افزایش یابد، را ***مجموعه‌ی برش رأسی***[۱] گراف G می‌نامیم.
عدد همبندی[۲] درگراف G، کوچکترین تعداد رئوس در مجموعه‌ی برش رأسی‌گراف G است و با نماد $\kappa(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱۹. یک k-***رنگ‌آمیزی رأسی*** گراف G عبارت است از نسبت دادن k رنگ به رأس‌های آن به طوری که هیچ دو رأس مجاور متمایزی دارای رنگ یکسانی نباشند.
عدد رنگی[۳] G، $\chi(G)$، برابر با کوچکترین kای است که به ازای آن، گراف G یک k-رنگ‌آمیزی رأسی دارد.

تعریف ۱.۲.۲۰. یک ***مجموعه‌ی مستقل*** گراف G، زیرمجموعه‌ای مانند S از $V(G)$ است به‌طوری که هیچ دو رأس آن در G مجاور نیستند.
اندازه بزرگترین مجموعه‌ی مستقل G، ***عدد استقلال***[۴] G نامیده و با $\alpha(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از رئوس گراف G باشد. در این صورت مجموعه‌ی رئوس G که یا عضو S هستند و یا با رأسی از رئوس S مجاور باشند، را با $N_G(S)$ نمایش می‌دهیم.
اگر $N_G(S) = V(G)$ باشد، آن‌گاه S را ***مجموعه‌ی غالب*** می‌نامیم.
کوچکترین اندازه‌ی مجموعه‌ی غالب G، را ***عدد غلبه‌ای***[۵] G نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۲. ***جورسازی***[۶] M درگراف G، مجموعه‌ای از یال‌های G است که هیچ دو یالی رأس مشترک نداشته باشند.
اندازه هر جورسازی برابر تعداد یال‌های متعلق به آن مجموعه می‌باشد.
هر رأس شامل یک یال را در جورسازی M، اصطلاحاً ***پوشیده شده***[۷] توسط M می‌نامیم.
یک جورسازی که در آن هر رأس G پوشیده شده باشد، ***جورسازی کامل***[۸] و یا ۱-***عاملی***[۹] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲۳. گراف G را ***گراف رأس‌متعدی***[۱۰] یا به‌طور ساده‌تر گراف متعدی نامیم، اگر برای هر دو رأس متمایز x و y در G، یک خودریختی $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $\phi(x) = y$.
به عبارت دیگر $\mathrm{Aut}(G)$ به‌طور متعدی روی $V(G)$ عمل می‌کند.

[۱] vertex cut set [۲] connectivity [۳] chromatic number [۴] independence number [۵] domination number [۶] matching [۷] covered [۸] perfect matching [۹] ۱-factor [۱۰] vertex trasitive

بنا بر قضیه‌ی ذیل، برای محاسبه‌ی قطر در یک گراف رأس‌متعدی، کافی است خروج از مرکز یک رأس، را محاسبه کنیم.

قضیه ۲۴.۲.۱. *درگراف‌های رأس‌متعدی، خروج از مرکز تمام رئوس، یکسان است.*

برهان. فرض کنید v یک رأس دلخواه ثابت در گراف G و u رأسی با بیشترین فاصله از رأس v باشد. در این صورت خودریختی ϕ وجود دارد که u را به $\phi(u)$ و v را به $\phi(v)$ می‌نگارد و همچنین بنا بر لم ۹.۲.۱، $\phi(v)$ حافظ فاصله‌ی بین آن‌ها است.
لذا اگر $d(v,u)$ بیشترین فاصله‌ی v از تمام رئوس باشد، آن‌گاه ادعا می‌کنیم $d(\phi(v),\phi(u))$ نیز بیشترین فاصله‌ی رأس $\phi(v)$ از تمام رئوس گراف G است. به برهان خلف فرض کنید w بیشترین فاصله از رأس $\phi(v)$ را دارد، لذا $d(\phi(v),w) > d(\phi(v),\phi(u))$ در نتیجه داریم $d(v,\phi^{-1}(w)) > d(v,u)$ که متناقض با فرض است، لذا فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. □

یکی از مهمترین نمونه‌های گراف متعدی در مثال زیر معرفی شده است و ساختار آن را نیز بیان خواهیم نمود.

مثال ۲۵.۲.۱. *گرافی با مجموعه رئوس*

$$V(Q_n) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i = 0 \text{ یا } 1 \,,\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

*و بین هر دو رأس متمایز $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ یال وجود دارد اگر دقیقاً در یک مؤلفه متفاوت باشند، به عبارت دیگر تفاضل این دو رأس فقط یک مؤلفه‌ی غیر صفر داشته باشد، را گراف **ابرمکعبی**[1] Q_n و یا گراف معکبی$n-$ بعدی می‌نامیم.*
یک زیرمکعب $j-$بعدی Q_n، زیرگرافی از Q_n یکریخت با Q_j می‌باشد.

مثال ۲۶.۲.۱. ***(ساختار ابرمکعب‌ها).*** *یک رأس زوج درگراف ابرمکعبی Q_n، رأسی است که در آن تعداد ۱ ها زوج باشد. و به همین ترتیب رأس فرد رأسی با تعداد فرد عدد ۱ می‌باشد. در دو سر هر یال Q_n یک رأس فرد و یک رأس زوج وجود دارد، بنابراین رئوس زوج تشکیل یک مجموعه‌ی مستقل می‌دهند. رئوس فرد نیز تشکیل یک مجموعه‌ی مستقل خواهند داد. لذا Q_n یک گراف دوبخشی است. هر مؤلفه در $n-$تایی مرتب دو مقدار ۰ و یا ۱ می‌توانند داشته باشد، لذا $|V(Q_n)| = 2^n$.*

[1] hypercube

همسایگی‌های هر رأس Q_n، در یکی از مؤلفه‌های $n-$تایی مرتب، با آن رأس متفاوت است، بنابراین Q_n یک گراف $n-$منظم می‌باشد، لذا بنا بر قضیه‌ی ۱۳.۲.۱، $|E(Q_n)| = n۲^{n-۱}$.

لم ۲۷.۲.۱. *فرض کنید Q_n $(n \geqslant ۲)$ یک گراف $n-$ مکعبی باشد. نگاشت $\phi_v : V(Q_n) \to V(Q_n)$، با ضابطه $\phi_v(x) = x + v$ برای هر $v \in V(Q_n)$ ، یک خودریختی Q_n است.*

برهان. به لم ۳.۱.۱ در [۸]، مراجعه شود. $\square$

لم ۲۸.۲.۱. *برای هر $n \geq ۲$، داریم $|\mathrm{Aut}(Q_n)| \geq ۲^n n!$.*

برهان. به لم ۱.۱.۳ در [۸]، مراجعه شود. $\square$

قضیه ۲۹.۲.۱. *گراف $n-$مکعبی Q_n برای هر $n \geq ۲$ یک گراف رأس‌متعدی است.*

برهان. به لم ۲.۱.۳ در [۸]، مراجعه شود. $\square$

قضیه ۳۰.۲.۱. *گراف Q_n همبند است.*

برهان. با استفاده از استقرا روی n، همبند بودن Q_n را برای هر $n \geq ۱$ ثابت می‌کنیم.
اگر $n = ۱$، آنگاه $Q_۱$ یکریخت با گراف $K_۲$ است، لذا همبند می‌باشد.
فرض کنیم Q_k، برای هر $k \geq n - ۱$ یک گراف همبند باشد. در این صورت نشان می‌دهیم $Q_{k+۱}$ نیز همبند است.
فرض کنید u و v دو رأس در $Q_{k+۱}$ باشند. در این صورت اگر این دو رأس مجاور باشند، آنگاه یک یال بین آن دو وجود دارد. لذا فرض کنید u و v دو رأس دلخواه غیرمجاور باشند. در این صورت نشان می‌دهیم بین آن‌ها مسیر وجود دارد. دو حالت ممکن است رخ دهد:
حالت اول: دو رأس u و v حداقل یک مؤلفه‌ی مساوی داشته باشند، به عبارت دیگر حداقل یک مؤلفه‌ی i موجود باشد که در آن $u_i = v_i$. با حذف این مؤلفه در هر دو رأس، دو رأس در Q_k بدست خواهد آمد و چون گراف Q_k بنا به فرض استقرا، همبند است، لذا حتماً مسیری بین این دو رأس Q_k وجود دارد. حال با اضافه کردن مؤلفه‌های مساوی، یک مسیر در گراف $Q_{k+۱}$ بین دو رأس u و v خواهیم داشت.
حالت دوم: دو رأس u و v در هیچ مؤلفه‌ای مساوی نباشند. در نتیجه بدون کاستن از کلیت اثبات، می‌توان فرض کرد $u = \underbrace{(۰, \cdots, ۰)}_{k+۱}$ و $v = \underbrace{(۱, ۱, \cdots, ۱)}_{k+۱}$.