دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

اختلالات سیستمهای هامیلتونی متقارن درجه چهار

کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی — سیستمهای دینامیکی

علی کاظمی

استاد راهنما

دکتر حمید رضا ظهوری زنگنه

بهار ۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی – سیستمهای دینامیکی آقاعلی کاظمی

تحت عنوان

اختلالات سیستمهای هامیلتونی متقارن درجه چهار

در تاریخ ۲۸ فروردین‌ماه ۱۳۸۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر حمید رضا ظهوری زنگنه

۲– استاد مشاور پایان‌نامه   دکتر فرید بهرامی

۳– استاد داور ۱   دکتر محمد رضا رضوان

(دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف)

۴– استاد داور ۲   دکتر محمد تقی جهاندیده

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر رسول نصر اصفهانی

به نام مهربان بی همتا

و با سلام به حضور آسمانی امام عصر

در پایان این گذار هم پیشانی شکر بر آستان خداوندگار خویش می‌سایم که به من توانایی داد تا گامی پیش‌تر گذارم. همچنان به تحصیل و آموختن مشتاقم و علم پژوهی و دانش اندوزی را دوست دارم. ریاضیات را با خویشتنم آمیخته می‌بینم و آن را مشق هر شبم ساخته و از آن لذت می‌برم. می‌خواهم که در این راه به اوج توانایی خویش دست یابم.

در برگهای آغازین پایان‌نامه از جناب آقای دکتر ظهوری زنگنه صمیمانه تشکر می‌کنم و امیدوارم که راهنمایی‌هایشان در این رساله شروعی برای همکاری‌های علمی ایشان با من باشد. همچنین از اساتید بزرگوار جناب دکتر بهرامی و دکتر جهاندیده سپاسگذارم و برای ایشان آرزوی سلامتی و موفقیت دارم. داوری جناب دکتر رضوان را که با انگیزه‌ای شاداب و جوان قبول زحمت نمودند، را مغتنم می‌دانم و برای ایشان نیز سلامتی و سعادت را آرزو می‌کنم.

آخرین کلام من با توست ای مهربانِ همراه،

من با توام، تو با من

هر جا که آسمان هست،

هر جا ز مهربانی یک ذره‌ای نشان هست.

به خاطر همه فداکاریت سپاسگذارم و صبر زیبای تو را می‌ستایم.

علی کاظمی

چکیده:

برای بررسی کیفی ساختار جوابهای یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل، رفتار جوابها را در نزدیکی نقاط تعادل و جوابهای متناوب آن مطالعه می‌کنیم. قسمت مهم و پیچیده مسأله یافتن تعداد و موقعیت سیکل‌های حدی است که در قسمت دوم مسأله شانزدهم هیلبرت مطرح شد. صورت ضعیف شده آن به تخمین صفرهای انتگرال آبلی می‌پردازد. آرنولد حدس زد که انتگرال‌های آبلی دارای خاصیت چبیشف هستند و دیاگرام انشعاب صفرهای آنها به وسیله سیستمهای چبیشف چند جمله‌ای مدل می‌شود. در این رساله برای یک اختلال درجه سوم از سیستم‌های هامیلتونی درجه چهار تابع فاصله را به ترکیب خطی از انتگرالهای آبلی در ایده آل باوتین تجزیه کرده و دیاگرام انشعاب قسمت اصلی آن را توصیف می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

تاریخچه و معرفی رساله

تاریخ علم از زمانی آغاز شد که بشر در صدد توضیح و تشریح علت پدیده‌های طبیعی برآمد تا بتواند رخدادهای آتی جهان طبیعت را پیش‌بینی کرده و به دلخواه خود در آنها تأثیرگذار باشد. بدون شک ریاضیات زبان علمی بیان و تفسیر پدیده‌هاست. وابستگی پدیده‌های طبیعی و فیزیکی به زمان باعث پویایی و خاصیت دینامیکی آن‌ها می‌شود؛ بنابراین تغییرات این رخدادها به تغییرات زمان وابسته است. پس برای رسیدن به تابعی که آنها را تفسیر می‌کند مجبور به حل معادلات دیفرانسیل هستیم. در اواسط قرن نوزدهم میلادی توسط لیوویل[۱] اثبات شد که برخی از این معادلات حل ناپذیر هستند؛ به عبارتی نمی‌توان جوابهای عمومی آنها را به وسیله ترکیبی از توابع مقدماتی ریاضی بیان کرد[۱۸]. او در اواخر قرن نوزدهم میلادی به بررسی کیفی معادلات دیفرانسیل پرداخت که منجر به نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل معمولی شد. اساس این نظریه این است که به جای یافتن جواب، ویژگی‌های آن را مستقیماً از روی معادله بررسی و تعیین می‌کنیم و هدف آن توصیف ساختار جوابهای معادلات دیفرانسیل است. به ویژه نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل معمولی برای دستگاه معادلات مسطح بسیار توسعه یافته است.

در نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل برای بررسی کیفی جوابها باید تعداد و موقعیت نقاط تعادل و سیکل‌های حدی مشخص باشد. مسئله یافتن نقاط تعادل به حل یک دستگاه معادلات جبری کاهش می‌یابد؛ ولی مسئله یافتن تعداد و موقعیت سیکل‌های حدی بسیار پیچیده و مشکل است. در

[۱] Joseph Liouville

این نظریه، تحقیق بر روی سیکل‌های حدی بسیار جذاب اما سخت است. برای اولین بار در سال‌های ۱۸۸۶—۱۸۸۱ میلادی پوانکاره در چهار مقاله که در مورد منحنی انتگرالی معادلات دیفرانسیل بود، سیکل حدی را کشف کرد و پس از آن ریاضی‌دانان بزرگی درباره سیکل‌های حدی مسایل مختلفی را مطرح کردند.

در سال ۱۹۰۰ میلادی هیلبرت[۲] در قسمت دوم مسئله شانزدهم خود، مسئله یافتن کران بالای یکنواخت برای تعداد سیکل‌های حدی سیستم‌های دینامیکی چندجمله‌ای مسطح و همچنین موقعیت و توزیع آن‌ها را در صفحه مطرح کرد. این مسئله مهمترین مسئله در نظریه سیستم‌های دینامیکی برای معادلات دیفرانسیل دو بعدی در قرن بیستم بوده است.

در سال ۱۹۹۱ میلادی ایلیاشنکو[۳] در [۲۴] اثبات کرد که هر معادله دیفرانسیل چندجمله‌ای تعداد متناهی سیکل حدی دارد که بهترین نتیجه در این زمینه تا به حال بوده است. اما تا امروز مسئله یافتن یک کران یکنواخت برای سیکل‌های حدی حتی برای سیستم‌های چندجمله‌ای درجه دوم حل نشده باقی مانده است و فقط برای حالتهای خاصی این مسئله حل شده است[۳۱].

در سال ۱۹۹۱ اسمیل[۴] در [۴۴] کلاس‌های خاص‌تری از معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ای را در نظر گرفت که یکی از آنها سیستم‌های چند جمله‌ای لینارد به صورت زیر می‌باشد،

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \tag{۱}$$

که معادل با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

است. معادله (۱) برای اولین بار در سال ۱۹۲۸ توسط یک فیزیکدان فرانسوی به نام لینارد[۵] مطالعه شد.

معادلات پرکاربردی مثل معادله واندرپل $\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ و معادله نوسانگر دافینگ $\ddot{x} + k\dot{x} + (x^3 - x) = 0$ در کلاس معادلات لینارد قرار می‌گیرند. البته در چنین معادلاتی نیروهای خارجی در نظر گرفته نشده‌اند[۱۷].

ممکن است دستگاه معادلات دیفرانسیل به پارامتر $\lambda \in \mathbb{R}^m$ وابسته باشد که این وابستگی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$\dot{x} = f(x; \lambda). \tag{۲}$$

[۲] H. Hilbert
[۳] Ilyashenko
[۴] S. Smale
[۵] A. Lienard

در اینجا تابع f به طور پیوسته به پارامتر λ وابسته است. در این صورت جواب عمومی (۲) به پارامتر λ وابسته است. همچنین ممکن است به ازای یک پارامتر λ^0 ساختار جوابهای عمومی تغییر کند، زیرا ممکن است با تغییر پارامتر تعداد نقاط بحرانی جواب عمومی و یا رفتار آنها تغییر کند و همچنین ممکن است جوابهای تناوبی جدیدی از جواب متناوب دیگر و یا نقاط بحرانی منشعب شود و یا از بین برود. در این صورت مطالعه تغییر ساختار جواب عمومی (۲) با تغییرات پارامتر را نظریه انشعاب گویند.

در این رساله یک شکافت چهار پارامتری X_λ از هامیلتونی‌های متقارن درجه چهار

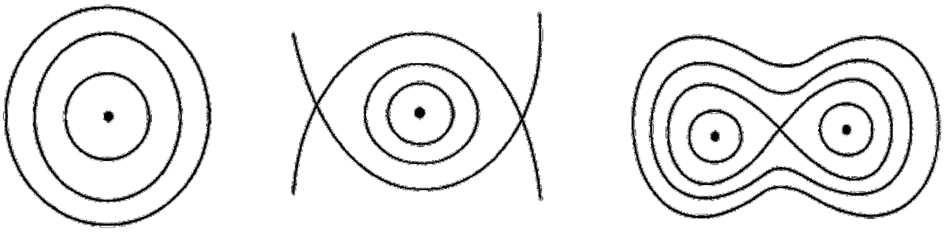
$$X_\lambda : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sigma_1 x^3 + \nu x^2 - \sigma_2 x + (\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2) y \end{cases} \tag{۳}$$

برای پارامتر $\lambda = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \nu) \in \mathbb{R}^4$ را در نظر می‌گیریم. X_λ اختلالی از سیستم هامیلتونی $H_\nu = \frac{y^2}{2} + \sigma_1 \frac{x^4}{4} - \nu \frac{x^3}{3} + \sigma_2 \frac{x^2}{2}$ به فرم زیر است؛

$$dH_\nu + (\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2) y dx = 0 \tag{۴}$$

که در آن ν یک پارامتر کوچک و $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, -1), (1, 1), (-1, 1)$ است.

برای $\nu = 0$، سطوح تراز هامیلتونی نسبت به دیفیومرفیسم $(x, y) \to (-x, y)$ متقارن هستند. این دستگاه را برگشت‌پذیر نیز می‌نامند. سطوح تراز H_0 برای حالت‌های مختلف (σ_1, σ_2) در شکل (۱—۱) رسم شده است.



(i) (ii) (iii)

شکل ۱—۱: مدارهای سیستم هامیلتونی مختل نشده

در شکل (۱—۱) حالت (i) متناظر با $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, 1)$ را مرکز سراسری، حالت (ii) متناظر با $(\sigma_1, \sigma_2) = (-1, 1)$ را پاندول بریده شده و حالت (iii) متناظر با $(\sigma_1, \sigma_2) = (1, -1)$ را نوسانگر دافینگ یا حلقه ∞ شکل می‌نامیم. در حالت $(\sigma_1, \sigma_2) = (-1, -1)$ سیستم (۳) تنها دارای یک نقطه زینی است و هیچیک از مدارهای آن بسته نیست لذا مورد توجه ما نخواهد بود.

برای $0 < \nu \ll 1$، پارامتر ν این تقارن را به شکل غیرتباهیده می‌شکنند. خانواده (۴) به پارامتر $\lambda = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \nu) \in \mathbb{R}^4$ در نزدیکی مبدا بستگی دارد. سیستم‌های لینارد (۳) توسط افراد زیادی از

جمله [۵] و [۲۵، ۲۳، ۱۳، ۱۲، ۱۰، ۹] مورد مطالعه قرار گرفته است و نتایج تحت بررسی ما قویاً به نتایج ارائه شده در [۲۳، ۱۳، ۱۲، ۱۰] در مورد انتگرال‌های آبلی متکی است.

در این رساله ما توابع فاصله را با شکافت قسمتهای اصلی‌اش مقایسه می‌کنیم. برای پرهیز از مشکلات مربوط به مشتق‌ناپذیری تابع فاصله، مطالعه خود را به بازه‌های بسته‌ای از مقادیر هامیلتونی محدود می‌کنیم که مقادیر بحرانی متناظر به پلی‌سیکل‌ها را در بر نداشته باشد.

ایلیف[۶] و پرکو[۷] [۲۳] زیرخانواده تک پارامتری $\lambda(\varepsilon)$ از این شکافت را در نظر گرفتند و نشان دادند که چنین خانواده تک پارامتری تعریف شده برای $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0], \varepsilon_0 > 0$ حداکثر دارای دو سیکل حدی است. اما مقدار این ε_0 به خانواده تک پارامتری وابسته است و بنابراین هیچ تضمینی برای یکنواختی کران به دست آمده وجود ندارد.

در [۱۳، ۱۲، ۱۰] دومرتیر[۸] و لی[۹]، انشعابات در خانواده (۳) را برای هر مقدار ν بررسی کردند. به ویژه آن‌ها وجود سیکل‌های حدی با چندگانگی ۴ را برای برخی مقادیر بزرگ ν اثبات کردند. در مطالعه آنها تنها حالت $\mu_2 = \pm 1$ در نظر گرفته شد. با این محدودیت نمی‌توان یک نتیجه کامل از انشعابات صورت گرفته در همسایگی $\lambda = 0$ همان طور که مورد نظر ماست را به دست آورد.

برای $\nu \neq 0$ می‌توان سیکل‌های حدی را از صفرهای انتگرال آبلی به دست آورد، اما مطالعه ارائه شده در دومرتیر و لی [۱۳، ۱۲، ۱۰] اجازه گذر از انتگرال آبلی به تابع فاصله وقتی $\nu \to 0$ را نمی‌دهد. این به این دلیل است که هر گاه $\nu = 0$، تقارن موجود در هامیلتونی یک تباهیدگی در شکافت ایجاد می‌کند به طوری که ممکن است دامنه اعتبار مقایسه بین صفرهای انتگرال‌های آبلی و صفرهای تابع فاصله با پارامتر $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ به سمت صفر میل کند هر گاه $\nu \to 0$.

ما در اینجا علاقه‌مند به شکستن تباهیدگی در نگاشت پوانکاره به واسطه وجود تقارن $(x, y) \to (-x, y)$ هستیم. در حالت (iii) (شکل ∞)، تنها توجه خود را معطوف به ایجاد سیکل حدی از طوقه‌های خارجی می‌کنیم. هدف ما در این رساله نشان دادن این نکته است که تباهیدگی موجود در انتگرال‌های آبلی برای شکافت تابع فاصله در همسایگی کامل از فضای پارامترها برقرار است. نحوه بررسی ما این اجازه را می‌دهد که وجود یک همسایگی از مبدا در فضای پارامتری را ثابت کنیم که در آن حداکثر دو سیکل حدی برای دستگاه‌های نظیر موجود است. این نتیجه، نتیجه ارائه شده توسط ایلیف و پرکو [۲۳] را تعمیم می‌دهد.

در فصل دو مفاهیم، تعاریف و نتایج مقدماتی مورد نیاز در فصول بعدی را بیان می‌کنیم. در ادامه این فصل به معرفی ایده‌آل باوتین و دولاک و تجزیه تابع فاصله در ایده‌آل باوتین می‌پردازیم. در فصل سوم

[۶] I.D. Iliev
[۷] L.M. Perko
[۸] F. Dumortier
[۹] C. Li

ضمن معرفی انتگرال آبلی و برخی خصوصیات آن نتایج مورد نیاز برای این سیستم‌ها را در بخش اول گردآوری کرده‌ایم. همین طور در بخش دوم رابطه تعداد صفرهای آن را با قسمت دوم مسأله شانزدهم هیلبرت بیان می‌کنیم. در فصل چهار سیستم‌های چبیشف را به نقل از کتاب [۳۴] معرفی می‌کنیم و همچنین در بخش دوم این فصل نشان می‌دهیم که انتگرال‌های آبلی می‌توانند دارای خاصیت چبیشف باشند. در فصل پنج ضمن اینکه اختلالات میدان‌های برداری که نگاشت پوانکاره آنها همانی است را مشخص می‌کنیم، نشان می‌دهیم که در تمامی حالات تحت بررسی قسمت اصلی تابع فاصله و باقیمانده آن را می‌توان در ایده‌آل باوتین تجزیه کرد و با استفاده از بزرگ‌نمایی مناسب پایداری قسمت اصلی را در حالات مختلف ثابت می‌کنیم. در نهایت در فصل شش دیاگرام انشعاب شکافت میدان برداری را در یک همسایگی کامل از فضای پارامتری تشریح می‌کنیم. در حقیقت نشان می‌دهیم که دیاگرام‌های انشعاب در حالت مرکز سراسری و پاندول بریده شده همیومرف هستند، اما دیاگرام انشعاب در هر حالت ∞ شکل متفاوت است. در این حالت مدل چند جمله‌ای ساده‌ای برای دیاگرام‌های انشعاب در هر حالت ارائه می‌کنیم. هر دو حالت توسط یک چند جمله‌ای اما در بازه‌های متفاوت مدل می‌شود. مطالب فصل پنج و شش قویاً متکی بر نتایج ارائه شده از مقاله [۲۹] است.

فصل ۲

مفاهیم مقدماتی و نتایج اولیه

در بخش اول این فصل مفاهیم مقدماتی نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل بررسی و نتایج اولیه به دست آمده را بدون اثبات آنها بیان می‌کنیم. در بخش دوم با تعریف نگاشت پوانکاره و تابع فاصله در نزدیکی سیکل‌های حدی، رهگیری آنها را ادامه داده و نظریه انشعاب سیکل‌های حدی و برخی از مفاهیم آن را معرفی می‌کنیم. دب بخش سوم ایده آل بوتین را معرفی کرده و گزاره‌ای را بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد تابع فاصله در ایده آل باوتین به طور متناهی تجزیه می شود. مطالب این فصل برمبنای مراجع [۱۷، ۴۲، ۱۹، ۴۵، ۴۱] تنظیم شده‌اند.

۲—۱ سیستمهای دینامیکی

پدیده‌های فیزیکی و طبیعی مانند حرکت آونگ، حرکت سیارات، تغییر جمعیت موجودات زنده و همچنین مسائل علوم مهندسی را می‌توانیم به عنوان یک سیستم در نظر بگیریم. فضای فاز را مجموعه وضعیت‌های ممکن برای یک سیستم تعریف می‌کنیم. این مجموعه نسبت به زمان متغیر است. هدف ما بررسی و تحلیل فضای فاز است، که با X نمایش داده و با فضای برداری متریک $\mathbb{R}^n$ در ریاضی مدل می‌شود. تابع مشتق‌پذیر $\phi_t(x^\circ) = \phi(t, x^\circ)$ وضعیت نقطه x_t را در زمان t با نقطه شروع x° مشخص

می‌کند، به عبارتی $x_t = \phi_t(x^\circ)$. این تابع را جریان یک سیستم می‌نامیم. به طور طبیعی تابع جریان دارای ویژگی‌های زیر است.

$$\phi_\circ \;=\; id \tag{۱}$$

$$\phi_{s+t} \;=\; \phi_s \; o \; \phi_t \tag{۲}$$

$$\phi_{-t} \;=\; -\phi_t \tag{۳}$$

ویژگی (۱) بیانگر عدم تغییر وضعیت سیستم در زمان صفر است و ویژگی (۲) بیان می‌کند که رفتار سیستم با انتقال زمان تغییر نمی‌کند. از ویژگی (۳) نتیجه می‌شود جوابها نسبت به مبدأ زمان متقارن هستند به عبارتی در زمانهای منفی جهت جریان‌ها برعکس می‌شود.

تعریف ۱.۲ (X, ϕ_t) را یک سیستم دینامیکی گویند هر گاه X فضای فاز و ϕ_t یک جریان روی X باشد که دارای ویژگیهای (۱)، (۲) و (۳) است.

یک سیستم دینامیکی را معمولاً با معادله دیفرانسیل $\dot{x} = f(x)$ نمایش می‌دهند که $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$، f یک میدان برداری و ϕ_t جواب آن است. از این جا به بعد بحث را به فضای دو بعدی $\mathbb{R}^۲$ محدود می‌کنیم. پس دستگاه معادلات فوق را برای $x = (x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲$ و میدان برداری دو بعدی $f = (f_۱, f_۲)$ در نظر می‌گیریم و در این صورت سیستم را مسطح می‌گوییم.

قضیه زیر وجود یک جواب منحصر بفرد به طور پیوسته وابسته به شرط اولیه $x(\circ) = x^\circ$ را برای معادله دیفرانسیل با شرط اولیه

$$\dot{x} = f(x) \;, \qquad x(\circ) = x^\circ \tag{۴}$$

تضمین می‌کند.

قضیه ۲.۲ [۴۱] اگر E یک زیر مجموعه باز در $\mathbb{R}^۲$ و شامل x° و در سیستم (۴) $f \in C^۱(E)$، آنگاه یک $a > \circ$ و یک $r > \circ$ وجود دارد به طوری که برای هر $y \in N_r(x^\circ)$ معادله با شرط اولیه (۴) دارای جواب یکتای $\phi_t(y) = \phi(t, y)$ است که $\phi \in C^۱(G)$ و $G = [-a, a] \times N_r(x^\circ)$.

تعریف ۳.۲ یک مدار با نقطه آغازین x°، به صورت زیرمجموعه‌ای از فضای X به فرم $\gamma(x^\circ) = \{x \in X | x = \phi_t(x^\circ), t \in \mathbb{R}\}$ تعریف می‌شود. همچنین نقطه $\bar{x}$ را یک نقطه تعادل گویند هرگاه برای هر $t > \circ$ داشته باشیم $\phi_t(\bar{x}) = \bar{x}$.

متذکر می‌شویم که نقاط تعادل، مدارهایی از سیستم هستند که تحت جریان ثابت می‌مانند. همچنین در برخی از متون، نقاط تعادل تحت عنوان نقاط ثابت جریان ϕ_t و یا صفرها، نقاط بحرانی و یا نقاط منفرد میدان برداری f نامیده می‌شوند.

یک شروع مناسب برای تحلیل یک سیستم دینامیکی مسطح غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ می‌تواند تعیین نقاط تعادل و بررسی رفتار سیستم در نزدیکی آنها باشد. فرض کنیم $\bar{x}$ یک نقطه تعادل سیستم فوق باشد. در این صورت اگر $A = Df(\bar{x})$ ماتریس ژاکوبی f در نقطه $\bar{x}$ باشد، $A(x-\bar{x})$ را قسمت خطی f در $\bar{x}$ می‌نامیم. نقاط تعادل هذلولوی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف **۴.۲** نقطه تعادل $\bar{x}$ را یک نقطه تعادل هذلولوی گوییم اگر قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس $Df(\bar{x})$ ناصفر باشد. همچنین $\bar{x}$ را یک نقطه تعادل پایدار یا چاه (ناپایدار یا منبع) گوییم اگر قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی f در $\bar{x}$ منفی (مثبت) باشد. یک نقطه تعادل غیرهذلولوی حداقل دارای یک مقدار ویژه با قسمت حقیقی صفر است.

تعریف **۵.۲** نقطه تعادل $\bar{x}$ را مرکز سیستم $\dot{x} = f(x)$ می‌نامیم اگر یک $r > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که همه مدارهای آن در یک همسایگی محذوف $N_r(\bar{x})$ منحنی‌هایی بسته حول نقطه $\bar{x}$ باشند.

اگر در همه صفحه $\mathbb{R}^2$ به جز نقطه $\bar{x}$ مدارهای سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ منحنی‌های بسته همیومورف با دایره حول $\bar{x}$ باشند، مرکز را سراسری گویند. اگر $\bar{x}$ یک مرکز باشد مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی $Df(\bar{x})$ موهومی هستند.

قرارداد **۶.۲** در این رساله از این به بعد به منحنی‌های بسته حول یک مرکز، طوقه و به ناحیه حلقوی که به وسیله طوقه‌ها پر می‌شود یک طوق تناوبی می‌گوییم.

سیستم $\dot{x} = A(x-\bar{x})$ را خطی شده سیستم غیرخطی $\dot{x} = f(x)$ حول $x = \bar{x}$ می‌نامیم هرگاه $A = Df(\bar{x})$. با انتقال مبدا به نقطه $\bar{x}$ می‌توان فرم خطی شده را در مبدا به صورت $\dot{x} = Df(0)x$ در نظر گرفت.

در اینجا مفهوم همیومرفیسم را یادآوری می‌کنیم. تابع پیوسته و معکوس‌پذیر $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را یک همیومرفیسم گوییم هرگاه معکوس آن نیز پیوسته باشد و همچنین اگر h مشتق‌پذیر و معکوس آن نیز مشتق‌پذیر باشد، آنگاه h را یک دیفیومرفیسم می‌نامیم. حال معادل بودن توپولوژیکی دو سیستم مفروض را به کمک این مفهوم تعریف می‌کنیم.

تعریف **۷.۲** [۱۹] دو معادله دیفرانسیل مسطح $\dot{x} = f(x)$ و $\dot{x} = g(x)$ به ترتیب تعریف شده روی زیرمجموعه‌های باز U و V از $\mathbb{R}^2$ را به طور توپولوژیکی معادل گویند اگر یک همیومورفیسم $h : U \to V$

موجود باشد به طوری که h مدارهای میدان برداری f را بر مدارهای g ببرد و جهت افزایش زمان را حفظ کند.

قضیه زیر رفتار سیستم دینامیکی را در همسایگی نقاط تعادل هذلولوی به قسمت خطی آن کاهش می‌دهد.

قضیه **۸.۲** [۱۹] اگر $\bar{x}$ یک نقطه تعادل هذلولی $\dot{x}=f(x)$ باشد، آن‌گاه یک همسایگی از $\bar{x}$ موجود است که در آن f به طور توپولوژیکی معادل با میدان برداری خطی $\dot{x}=Df(\bar{x})(x-\bar{x})$ است.

مجموعه های حدی یکی دیگر از مفاهیم مقدماتی هستند که برای بررسی کیفی جریان‌های یک سیستم دینامیکی به آنها نیاز داریم. سیستم

$$\dot{x}=f(x) \qquad (۵)$$

را روی زیر مجموعه باز E در صفحه در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های α—حدی و ω—حدی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف **۹.۲** نقطه $p\in E$ را یک نقطه ω—حدی برای جریان $\phi(.,x)$ از سیستم (۵) گوییم هرگاه دنباله t_n وجود داشته باشد به طوری که وقتی $n\to\infty$ داشته باشیم $t_n\to\infty$ و

$$\lim_{n\to\infty}\phi(t_n,x)=p.$$

به طور مشابه اگر دنباله $t_n\to-\infty$، وقتی $n\to\infty$، وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}\phi(t_n,x)=q$$

و $q\in E$، آنگاه q را یک نقطه α—حدی برای جواب $\phi(.,x)$ گوییم.
مجوعه نقاط ω—حدی مدار Γ از سیستم (۵) را مجموعه ω—حدی می‌نامیم و با $\omega(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه نقاط α—حدی مدار Γ را با $\alpha(\Gamma)$ نمایش داده و آن را مجموعه α—حدی می‌نامیم. مجموعه $\alpha(\Gamma)\cup\omega(\Gamma)$ را مجموعه حدی مدار Γ از سیستم (۵) می‌گوییم.

قضیه بعدی ویژگی‌های مجموعه‌های حدی را بیان می‌کند.

قضیه **۱۰.۲** [۴۱] مجموعه‌های α و ω حدی مدار Γ از سیستم (۵) یک زیرمجموعه بسته از E هستند. اگر Γ در یک زیر مجموعه فشرده از $\mathbb{R}^۲$ قرار داشته باشد، آنگاه $\alpha(\Gamma)$ و $\omega(\Gamma)$ زیر مجموعه‌هایی ناتهی، همبند و فشرده از E هستند.

یکی دیگر از مفاهیم اساسی مورد نیاز برای تحلیل کیفی جریان‌های یک سیستم، جوابهای متناوب سیستم (۵) و به ویژه مدارهای متناوب ایزوله آن است.

تعریف ۱۱.۲ اگر T دوره تناوب جریان ϕ_t از سیستم $\dot{x} = f(x)$ باشد، یک سیکل، مدار تناوبی مانند Γ است به طوری که برای هر $x^\circ \in \Gamma$ و هر $t \in [\circ, T)$ داشته باشیم $\phi_{t+T}(x^\circ) = \phi_t(x^\circ)$ و $\phi_t(x^\circ) \neq x^\circ$ به علاوه یک مدار تناوبی ایزوله را یک سیکل حدی گوییم.
اگر Γ یک سیکل حدی از سیستم مسطح (۵) باشد که مجموعه ω–حدی (α–حدی) برای مدارهای دیگر نزدیک خودش باشد، آنگاه Γ را یک سیکل حدی پایدار یا ω–سیکل حدی (ناپایدار یا α–سیکل حدی) می‌گوییم.

یک سیکل حدی از سیستم مسطح (۵) صفحه را به دو ناحیه داخل سیکل حدی و خارج آن تقسیم می‌کند. در [۸] با از استفاده خمهای جردن تصویری شهودی برای سیکلهای حدی پایدار و ناپایدار ارائه شده است که در قضیه بعدی به این موضوع می‌پردازیم.

قضیه ۱۲.۲ [۴۱] اگر برای یک مدار از سیستم (۵) که در خارج از یک سیکل حدی Γ قرار دارد، مجموعه ω–حدی آن سیکل حدی Γ باشد، آنگاه Γ مجموعه ω–حدی همه مدارهای خارج از این سیکل حدی است. به علاوه هر مدار در خارج از یک سیکل حدی پایدار به طور مارپیچ به سیکل حدی نزدیک می‌شود وقتی $t \to \infty$.
همین نتایج به طور متناظر برای داخل سیکل حدی و همچنین α–سیکلهای حدی برقرار است.

اگر سیکل حدی Γ، برای مدارهای یک طرفش (داخل یا خارج) یک مجموعه ω–حدی و برای مدارهای طرف دیگرش مجموعه α–حدی باشد، آنگاه Γ را یک سیکل نیمه پایدار گوییم. همچنین اگر $\Gamma = \phi_t$ یک جواب تناوبی با دوره تناوب T از سیستم (۵) باشد، γ را هذلولوی گوییم هرگاه

$$\int_\circ^T \nabla . f(\phi_t) dt \neq \circ .$$

همچنین اگر قرار دهیم $A(t) = Df(\phi_t)$ سیستم (۵) را می‌توان حول مدار تناوبی ϕ_t به صورت زیر، خطی کرد،

$$\dot{x} = A(t)x.$$

تعریف ۱۳.۲ نقطه تعادل $\bar{x}$ را یک نقطه زینی گوییم هرگاه دو مدار $\gamma_۱, \gamma_۲$ موجود باشند به طوری که $\bar{x}$ نقطه ω–حدی آن دو و مدارهای $\gamma_۴, \gamma_۳$ موجود باشند که $\bar{x}$ نقطه α–حدی آن دو باشد و این مدارها تنها مدارهایی با این خاصیت باشند.

تعریف **۱۴.۲** مجموعه S را تحت جریان $\phi_t(x)$ از سیستم (۵) پایا می‌گوییم هرگاه برای هر $t > 0$ داشته باشیم $\phi_t(S) \subset S$.

یکی دیگر از مفاهیم هندسی که در سیستم‌های مسطح رخ می‌دهد ارتباط زینی یا اصطلاحاً گرافیک است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف **۱۵.۲** Γ را یک گرافیک برای (۵) گوییم هرگاه یک مجموعه ناتهی، فشرده و پایا متشکل از تعداد متناهی نقطه زینی ایزوله مانند $p_1, \ldots, p_s$ و مدارهای $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ باشد به طوری که مجموعه‌های ω و α حدی هر یک از این مدارها یکی از این نقاط تعادل زینی باشد.
اگر Γ مجموعه ω—حدی مسیر γ باشد به طوری که γ یک طرف Γ قرار گیرد، آن‌گاه Γ را یک گرافیک یک سویه گویند.

یک مدار که مجموعه αـحدی آن یک نقطه تعادل زینی و مجموعه ωـحدی آن نقطه تعادل زینی دیگری باشد را یک مدار هتروکلینیک گوییم. همچنین مداری که مجموعه‌های α و ω حدی آن یک نقطه تعادل زینی باشد را یک مدار هموکلینیک گویند.

تعریف **۱۶.۲** مدار بسته Γ حول یک مرکز را که تعداد متناهی نقطه زینی هذلولوی روی آن قرار دارد، یک پلی‌سیکل می‌نامیم.
به طور مثال اجتماع دو مدار هتروکلینیک و یک مدار هموکلینیک یک پلی‌سیکل است.

برای مشاهده رفتار یک سیستم مسطح می‌توان صفحه را به مجموعه‌های حدی مدارهای آن افراز کرد. این افراز نمای فاز سیستم نامیده می‌شود. نمای فاز یک سیستم اطلاعات زیادی در مورد رفتار آن سیستم را نمایش می‌دهد.
در سال ۱۹۰۱ میلادی ریاضی‌دان سوئیسی به‌نام بندیکسن[1] قضیه معروف پوانکاره—بندیکسن را در صفحه به صورت زیر ارائه داد. این قضیه در فضاهای با بعد بیشتر از دو قابل تعمیم نیست و بیان می‌کند که هر جواب کران‌دار که به یک نقطه نزدیک نمی‌شود یا یک جواب متناوب است، یا به یک سیکل حدی و یا به یک گرافیک میل می‌کند.

قضیه **۱۷.۲** (پوانکاره—بندیکسن)[۴۱] فرض کنیم E یک زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^2$ و برای $f \in C^1(E)$، Γ مداری از معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = f(x)$$

[1] I. Bendixon

باشد که واقع در زیرمجموعه فشرده F از E است. در این صورت مجموعه $\omega-$حدی مدار Γ یعنی $\omega(\Gamma)$ مجموعه‌ای ناتهی، فشرده و همبند است به یکی از سه حالت زیر است.

۱) فقط شامل یک نقطه تعادل است.

۲) ω_Γ یک مدار متناوب است.

۳) ω_Γ یک گرافیک است.

همچنین او با استفاده از قضیه گرین، یک شرط کافی برای عدم وجود سیکل‌های حدی به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱۸.۲ (شرط بندیکسن)[۴۱] فرض کنیم D یک ناحیه ساده، همبند و باز در $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر $divf = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ در ناحیه D تغییر علامت ندهد و صفر نباشد، آن‌گاه سیستم $\dot{x} = f(x)$ درون D دارای هیچ مدار تناوبی نیست.

در حالت کلی‌تر، می‌توان برای یک تابع حقیقی مقدار و مشتق‌پذیر $B(x_1, x_2)$ روی یک ناحیه ساده، همبند و باز در $\mathbb{R}^2$ شرط بندیکسن را تعمیم داد. قضیه بعدی به شرط دولاک معروف است.

قضیه ۱۹.۲ [۴۱] اگر $D \subset \mathbb{R}^2$ مجموعه‌ای ساده، همبند و باز و $B(x_1, x_2)$ تابعی حقیقی مقدار و مشتق‌پذیر روی D باشد به طوری که تابع $divBf = \frac{\partial (Bf_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (Bf_2)}{\partial x_2}$ در D تغییر علامت ندهد و برابر صفر نباشد، آن‌گاه سیستم $\dot{x} = f(x)$ درون ناحیه D فاقد مدار تناوبی است.

برای حالت $B(x_1, x_2) = 1$، شرط بندیکسن حالت خاصی از شرط دولاک است. البته یک روش کلی برای یافتن $B(x_1, x_2)$ وجود ندارد.

یکی از ایده‌های بررسی کیفی معادلات دیفرانسیل وابسته به پارامتر مطالعه پایداری جوابها نسبت به تغییرات پارامتر است که منجر به نظریه انشعاب می‌شود. در اینجا مفهوم اساسی ساختاری پایدار، مقدار انشعاب، شکافت جهانی به طور خلاصه بیان می‌شود.

برای سیستم $\dot{x} = f(x)$ به تعداد مدارها و جهت جریان روی مدارها، ساختار مدار و یا ساختار کیفی جریان گفته می‌شود. مطالعه تغییرات در ساختار کیفی جریان یک معادله یک سیستم دینامیکی وابسته به پارامتر را نظریه انشعاب گویند. برای $\bar{\lambda}$ سیستم را به طور ساختاری پایدار گویند هرگاه یک همسایگی از $\bar{\lambda}$ موجود باشد به طوری که رفتار سیستم در آن تغییر نکند؛ یعنی تعداد نقاط تعادل و جهت مدارها در آن حفظ شود. مقدار پارامتری که در آن ساختار مدارها پایدار نیست را مقدار انشعاب گویند.

تعریف ۲۰.۲ [۱۹] فرض کنیم $f(x, \lambda)$ یک میدان برداری وابسته به k پارامتر $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ باشد. برای مقدار ثابت $\lambda = \bar{\lambda}$ سیستم $\dot{x} = f(x, \bar{\lambda})$ را به طور ساختاری پایدار گوییم اگر عدد $\varepsilon > 0$

موجود باشد به طوریکه برای تمام مقادیر λ که در شرط $\|\lambda - \bar{\lambda}\| < \varepsilon$ صدق کنند، $\dot{x} = f(x, \lambda)$ به طور توپولوژیکی معادل $\dot{x} = f(x, \bar{\lambda})$ باشد.

خانواده‌ای از سیستم‌های پارامتری شده و متقاطع با رویه پارامترهای انشعاب که تعداد پارامترها برابر با همبعد رویه انشعاب است را یک شکافت گویند. اگر این خانواده شامل همه سیستم‌هایی که می‌تواند در نزدیکی رویه انشعاب رخ دهد باشد آن را شکافت جهانی گویند.

تعریف ۲۱.۲ یک خاصیت را در مجموعه M عام گوییم هرگاه مجموعه نقاطی که دارای آن خاصیت هستند در M باز و چگال باشد.

خاصیت به طور ساختاری پایدار بودن یک سیستم وابسته به پارامتر در فضای پارامترها یک خاصیت عام است. بنابر این برای پارامترهای عام ساختار کیفی مدارهای سیستم نسبت به تغییرات کوچک پارامتر عام حساس نیست و نمای فاز سیستم تغییر نمی کند. این مطلب به طور دقیق تر در ادامه می آید.

تعریف ۲۲.۲ سیستم $\dot{x} = f(x)$ را روی زیرمجموعه باز E از $\mathbb{R}^۲$ در نظر می گیریم. نقطه $x \in E$ یک نقطه غیر سرگردان از جریان ϕ_t سیستم است اگر برای هر همسایگی U از x و هر $T > ۰$ یک $t > T$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\phi_t(U) \bigcap U \neq \emptyset \qquad (۶)$$

مجموعه غیر سرگردان Ω برای جریان ϕ_t مجموعه همه نقاط غیر سرگردان جریان ϕ_t در E است.

تنها نقاط غیر سرگردان نقاط تعادل ، نقاط روی مدارهای بسته و نقاط روی گرافیک‌ها هستند. قضیه زیر در سال ۱۹۶۲ میلادی توسط پی‌یکسو[۲] بیان شد که به وسیله آن می‌توان به طور ساختاری پایدار بودن جواب‌های سیستم را برای $f \in C^۱(E)$ بررسی کرد.

قضیه ۲۳.۲ [۴۵] فرض کنیم f یک میدان برداری از کلاس $C^۱$ روی زیرمجموعه فشرده E از $\mathbb{R}^۲$ باشد، آن‌گاه جواب‌های $\dot{x} = f(x)$ به طور ساختاری پایدار است اگر و تنها اگر

۱— تعداد نقاط تعادل و مدارهای متناوب متناهی بوده و همه آن‌ها هذلولوی باشند.

۲— هیچ مداری نقاط زینی را به هم وصل نکند.

۳— مجموعه نقاط غیر سرگردان تنها متشکل از نقاط تعادل و سیکل‌های حدی باشد.

به علاوه خاصیت به طور ساختاری پایدار بودن جواب‌های $\dot{x} = f(x)$ در $C^۱(E)$ خاصیتی عام است.

[۲] Peixot