دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجهٔ دکتری در رشتهٔ ریاضی محض

عنوان:

نگاشت های نگهدارنده عملگرهای فردهولم و شبه فردهولم

استاد راهنما:

خانم دکتر شیرین حجازیان

استاد مشاور:

آقای دکتر محمد صال مصلحیان

به نگارش:

تکتم آقاسی زاده

دی ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

۱ پیش‌نیازها ٦

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدّماتی در فضاهای هیلبرت ۷

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز از جبر ۱۰

۳.۱ مفاهیم مورد نیاز از C^*–جبرها ۱۴

۴.۱ C^*–مدول های هیلبرت ۱٦

۵.۱ عملگرهای الحاق پذیر روی C^*–مدول‌های هیلبرت ۲۰

۲ نگاشت های نگهدارنده عملگرهای شبه A–فردهولم در C^*–مدول‌های هیلبرت ۲۴

۱.۲ عملگرهای شبه A–فردهولم روی یک C^*–مدول هیلبرت ۲٦

۲.۲ نگاشت های نگهدارندهٔ عملگرهای شبه A–فردهولم ۳۹

۳ **کلاسهای هم ارزی عملگرهای خطی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$** ۴۵

۱.۳ کلاسهای هم ارزی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ و تعاریف مقدماتی آن ۴۶

۲.۳ روابط بین کلاسهای هم ارزی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ۴۹

۳.۳ رده بندی کلاسهای هم ارزی روی $B(\mathcal{H})$ ٦۱

۴.۳ مقایسهٔ کلاسهای هم ارزی روی $B(\mathcal{H})$ و $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ ٦۳

۴ **کتاب‌نامه** ۷۰

۱

تاریخچه و مقدمه

مسائل خطی نگهدارنده در بسیاری از موضوعات ریاضی مشاهده می‌شود. در اینجا منظور از مسائل خطی نگهدارنده، مشخص کردن تمام نگاشت های خطی روی یک فضای خطی داده شده M است که زیر مجموعه‌ها یا روابط مشخصی را پایا نگه می‌دارد.
یکی از مهمترین زمینه‌هایی در ریاضیات که مسائل خطی نگهدارنده در آن به طور فعال مورد مطالعه قرار می‌گیرند، نظریهٔ ماتریس ها است که البته اخیراً به مسائل نگهدارنده در بعد نامتناهی آن یعنی نظریه عملگرها نیز توجه خاصی شده است.
یکی از مشهورترین مسائل در این شاخه مسئله *کاپلانسکی*[1] [۲۱] است که در زیر بیان می‌کنیم.

فرض کنید A و B دو جبر باناخ نیم ساده و $\varphi : A \to B$ یک نگاشت خطی یک به یک ، پوشا، یکدار و نگهدارنده معکوس پذیری باشد. در این صورت آیا می‌توان گفت که φ لزوماً یک همریختی جردن است؟

در حالت جابجایی *گلیسون*[2][۱٦] — *کاهان*[3] — *زلازکو*[4][۱۹] به این سوال جواب مثبت دادند و در حالت ناجابجایی *اپوتی*[5][۵] و *سرور*[6] [۳۴] نتایج جالبی را بدست آوردند. اپوتی در حالتی که A و B جبر فون—نویمان باشند به سوال بالا جواب مثبت داد. ایدهٔ اصلی او استفاده از پایا ماندن عناصر خودتوان توسط نگاشت های خطی یک به یک، پوشا و یکدار که نگهدارنده معکوس پذیری نیز می‌باشند، بود.
سرور نشان داد که نگاشتهای خطی یک به یک، پوشا و یکدار که نگهدارنده معکوس پذیری هستند روی جبر تمام عملگرهای کراندار روی یک فضای باناخ، عملگرهای با رتبه یک را نگه می‌دارند و در نتیجه با استفاده از این ساختار در حالت خاص مسئله را حل نمود.

---

[1] $Kaplansky$
[2] $Gleason$
[3] $Kahane$
[4] $Zelazko$
[5] $Aupetit$
[6] $Sourour$

در همین راستا *مبختا*[۷] و *شمرل*[۸] در [۲۸] قضیهٔ زیر را برای نگاشتهای خطی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (فضای توابع خطی کراندار از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}$) اثبات نمودند.

قضیه : فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با بعد نامتناهی باشد و $\phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ یک نگاشت خطی باشد که عملگرهای شبه فردهولم را در هر دو جهت نگه دارد و فرض کنید ϕ تا حد عملگرهای فشرده پوشا باشد در این صورت

$$\phi(\mathcal{K}(\mathcal{H})) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

و نگاشت القاء شده $\tilde{\phi} : \frac{\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\mathcal{K}(\mathcal{H})} \to \frac{\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ به صورت ضرب یک عضو معکوس پذیر از $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ در یک خودریختی یا پاد–خودریختی است.

یادآوری می‌کنیم که عملگرهای شبه فردهولم، عملگرهایی هستند که تصویر آنها در جبر کالکین از راست یا چپ معکوس پذیر می‌باشند.

C^*–مدولهای هیلبرت برای اولین بار در سال ۱۹۵۳ توسط کاپلانسکی با الهام از تعریف فضای هیلبرت تعریف شدند و از آن پس تلاش های فراوانی از سوی ریاضی‌دان های مختلف از جمله ویلیام پاشکه در راستای گسترش مفاهیم و قضایای مشابه بر روی C^*–مدول های هیلبرت، صورت گرفت. یک C^*–مدول هیلبرت در واقع یک فضای خطی است که مشابه فضای هیلبرت، به یک ضرب داخلی تجهیز شده است با این تفاوت که حوزهٔ مقادیر این ضرب داخلی زیر مجموعه‌ای از یک C^*–جبر است. از این حیث می‌توان C^*–مدول های هیلبرت را به عنوان گسترشی ناجابجایی از فضاهای هیلبرت محسوب کرد.

این رساله از سه فصل تشکیل شده است که فصل اول به بیان مفاهیم و قضایایی اختصاص دارد که در فصل های بعد به آن نیاز داریم.

در فصل دوم نگاهی کوتاه به عملگرهای شبه A–فردهولم روی یک C^*–مدول هیلبرت خواهیم

---

[۷] $Mbekhta$

[۸] $Semrl$

داشت و شباهت و تفاوت آنها را با عملگرهای شبه فردهولم در فضاهای هیلبرت بررسی می‌کنیم. همچنین قضیهٔ بالا را در چند حالت به C^*–مدول های هیلبرت تعمیم می‌دهیم.
هدف اصلی در فصل سوم بررسی کلاس های هم ارزی از عملگرهای خطی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ است که $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت می‌باشد. این کلاس های هم ارزی توسط رابطهٔ هم ارزی بین عناصر $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ بدست می آید. به این معنی که اگر P یک خاصیت روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ باشد، برای هر دو عملگر خطی φ_1 و φ_2 روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ گوییم $\varphi_1 \sim_P \varphi_2$ هرگاه $\varphi_1(T)$ دارای خاصیت P باشد اگر و فقط اگر $\varphi_2(T)$ دارای این خاصیت باشد. هر خاصیت P یک کلاس هم ارزی روی $\mathcal{L}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ (فضای عملگرهای خطی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$) ایجاد می کند.
در فصل مذکور به بررسی کلاس های هم ارزی با توجه به خاصیت هایی چون

فردهولم، شبه فردهولم، فشرده، رتبه متناهی، معکوس پذیر تعمیم یافته بودن و یا داشتن یک شبه–اندیس خاص

می‌پردازیم. اگر $\mathcal{I}$ نمایش عنصر همانی در $\mathcal{L}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ باشد، بدیهی است که کلاس هم ارزی $\mathcal{I}$ با توجه به هر یک از خاصیت‌های فوق دارای اعضایی است که آن خاصیت را در دو جهت نگه می‌دارند. بنابراین $\mathcal{I} \sim_P \varphi$ یعنی φ خاصیت P را در دو جهت نگه می‌دارد.به عبارتی T خاصیت P دارد اگر و فقط اگر $\varphi(T)$ خاصیت P داشته باشد.

در همین فصل همچنین کلاس های هم ارزی بررسی شده را در $\mathcal{L}_A(\mathcal{M})$ که جبر تمام عملگرهای خودالحاق روی C^*–مدول هیلبرت $\mathcal{M}$ است، بررسی می‌کنیم و تا جایی که مقدور است شباهت و تفاوت آن ها را با کلاس های هم‌ارزی روی $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ بررسی خواهیم کرد.

در نگاهی کلی، فصل های دوم و سوم در برگیرندهٔ مفاهیم و نتایج کاملاً جدیدی هستند که از آنها سه مقاله با عناوین

- Maps Preserving Semi-Fredholm Operators on Hilbert C^*–Modules,

- Some Equivalence Classes of Operators on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$,
- Some Equivalence Classes of Operators on $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$,

استخراج شده‌اند. پایان نامه در انتها با فهرستی از منابع و واژه‌نامه به اتمام خواهد رسید.

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدّماتی در فضاهای هیلبرت

در این فصل $\mathcal{H}$ را فضایی هیلبرت و $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ را فضای توابع خطی کراندار از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{H}$ با عمل ترکیب توابع به عنوان ضرب در نظر می‌گیریم و یادآوری می‌کنیم که $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ با نرم عملگری یک C^*-جبر است.

فرض کنیم $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. $N(T)$ را فضای پوچ T و $Im(T)$ را برد T در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $null(T) = dim(N(T))$ و $def(T) = dim(\mathcal{H}/Im(T))$ که منظور از dim همان بعد فضا می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱ $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را شبه فردهولم بالایی (پایینی) نامیم هر گاه برد آن بسته باشد و $null(T) < \infty$ ($def(T) < \infty$). مجموعه عملگرهای شبه فردهولم بالایی و پایینی را به ترتیب با $\mathcal{UF}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{LF}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم. T را شبه فردهولم نامیم هرگاه شبه فردهولم بالایی یا پایینی باشد و آن را فردهولم نامیم هرگاه $null(T) < \infty$ و $def(T) < \infty$. اندیس یک عملگر فردهولم عبارت است از

$$ind(T) = null(T) - def(T)$$

اگر T فردهولم باشد چون $def(T) < \infty$ با توجه به قضیهٔ ۱.۴.۷ در [۲۹]، بسته بودن برد T نتیجه می‌شود. مجموعه عملگرهای فردهولم و شبه فردهولم روی $\mathcal{H}$ را به ترتیب با $\mathcal{FR}(\mathcal{H})$ و $\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.

$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ را مجموعهٔ عملگرهای با رتبه متناهی روی $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ را مجموعهٔ عملگرهای فشرده روی $\mathcal{H}$ در نظر می‌گیریم. یاد آوری می‌کنیم که $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ یک ایده‌آل و $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ یک ایده‌آل بسته از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ می‌باشند و $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$. جبر خارج قسمتی $\frac{\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ را جبر کالکین روی $\mathcal{H}$ گوییم.

قضیه ۲.۱.۱ [قضیهٔ ۱.۴.۱۶[۲۹]](اتکینسون[۱]) فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی باشد اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آن گاه T یک عملگر فردهولم است اگر و تنها اگر $T + \mathcal{K}(\mathcal{H})$ عنصری معکوس پذیر در جبر کالکین $\frac{\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ باشد.

یادآوری این نکته ضروری است که قضیهٔ فوق در واقع برای یک فضای باناخ اثبات می‌گردد که ما حالت مورد نیاز خود را ذکر نموده‌ایم.

قضیه ۳.۱.۱ [بخش XI-۲ [۱۲]] فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی باشد اگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، آن گاه T یک عملگر شبه فردهولم است اگر و تنها اگر $T + \mathcal{K}(\mathcal{H})$ در جبر کالکین $\frac{\mathcal{B}(\mathcal{H})}{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ معکوس پذیر چپ یا راست باشد.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. عملگر T در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ را به طور نسبی منظم می‌نامند هرگاه عملگر S ای در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ وجود داشته باشد به طوری که

$$TST = T$$

در این صورت S را یک شبه وارون T گوییم.

---

[۱] $Atkinson$

مثال ۵.۱.۱ $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را یک عملگر تصویر گوییم هرگاه $P^{۲} = P = P^*$. در این صورت P به طور نسبی منظم است و I و P شبه وارون‌های P هستند زیرا $PIP = P$ و $PPP = P$.

از مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت که عملگر به طور نسبی منظم T می‌تواند بیش از یک شبه وارون داشته باشد.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید T به طور نسبی منظم و S یک شبه وارون T باشد.در این صورت S را وارون تعمیم یافته T نامیم هر گاه

$$STS = S$$

اگر T به طور نسبی منظم و S شبه وارون آن باشد آنگاه $S_\circ = STS$ وارون تعمیم یافته T است زیرا

$$S_\circ TS_\circ = (STS)T(STS) = S(TST)(STS) = ST(STS) = S(TST)S = S_\circ$$

و همچنین

$$TS_\circ T = TSTST = TST = T$$

مجموعهٔ عملگرهایی در $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ را که وارون پذیر تعمیم یافته هستند با $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم و آنها را عملگرهای منظم نیز می‌نامیم.

لم ۷.۱.۱ اگر S وارون تعمیم یافته T باشد ST، TS، $I-TS$ و $I-ST$ عملگرهای تصویر هستند.

برهان. به عنوان نمونه

$$(I-TS)(I-TS) = I - ۲(TS) + (TS)(TS) = I - TS.$$

□

قضیه زیر یکی ازمهمترین قضایا در بحث وارون پذیری تعمیم یافته یک عملگر است که‌این نوع عملگرها را دسته بندی می‌نماید.

قضیه ۸.۱.۱ [۳۰] فرض کنید $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ در این صورت $T \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ اگر و فقط اگر $Im(T)$ زیر فضای بسته‌ای از H باشد.

مثال ۹.۱.۱ هر عملگر فردهولم T وارون پذیر تعمیم یافته است زیرا $Im(T)$ بسته است.

۲.۱ مفاهیم مورد نیاز از جبر

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر و X یک فضای برداری باشد. $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ را فضای عملگرهای خطی از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{X}$ در نظر می گیریم. منظور از یک نمایش از $\mathcal{A}$ روی $\mathcal{X}$ یک همریختی $T : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ با ضابطه $a \mapsto T_a$ می باشد.

فرض کنیم T یک نمایش از $\mathcal{A}$ روی $\mathcal{X}$ باشد در این صورت $\mathcal{A}$–مدول چپ متناظر با این نمایش، فضای خطی $\mathcal{X}$ است که ضرب مدولی آن به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ و هر $x \in \mathcal{X}$ به شکل $ax := T_a(x)$ می‌باشد و همچنین اگر $\mathcal{X}$ یک $\mathcal{A}$–مدول چپ باشد می‌توان نمایش متناظر با آن را به صورت

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$$

$$a \mapsto T_a$$

که $T_a(x) := ax$ در نظر گرفت.

تعریف ۲.۲.۱ یک $\mathcal{A}$–مدول چپ $\mathcal{X}$ را نابدیهی نامیم اگر $\mathcal{A}\mathcal{X} \neq 0$ و آن را تحویل ناپذیر گوییم اگر نابدیهی باشد و $\mathcal{X}$ و $\{0\}$ تنها $\mathcal{A}$–زیر مدولهای $\mathcal{X}$ باشند. نمایش T از $\mathcal{A}$ روی $\mathcal{X}$ را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه $\mathcal{A}$–مدول چپ متناظرش تحویل ناپذیر باشد.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باشد، ایده آل P از $\mathcal{A}$ را اولیه گوییم اگر هسته یک نمایش تحویل ناپذیر $\mathcal{A}$ روی فضای برداری $\mathcal{X}$ باشد.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باشد، اشتراک همه ایده‌آل‌های اولیه $\mathcal{A}$ را رادیکال جاکوبسون یا به اختصار رادیکال $\mathcal{A}$ گوییم، و این مجموعه را با $rad(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{A}$ را نیم ساده گوییم، هرگاه $rad(\mathcal{A}) = 0$.

تعریف ۵.۲.۱ جبر $\mathcal{A}$ را ساده گوییم هرگاه $\{0\}$ و $\mathcal{A}$ تنها ایده‌آل‌های $\mathcal{A}$ باشند.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم I یک ایده‌آل سره از جبر $\mathcal{A}$ باشد. گوییم ایده‌آل I اول است هرگاه به ازای هر دو ایده‌آل J_1 و J_2 از $\mathcal{A}$ که $J_1J_2 \subseteq I$ داشته باشیم $J_1 \subseteq I$ یا $J_2 \subseteq I$.

تعریف ۷.۲.۱ جبر $\mathcal{A}$ را اول گوییم هرگاه ایده‌آل صفر یک ایده‌آل اول $\mathcal{A}$ باشد.

تعریف ۸.۲.۱ جبر $\mathcal{A}$ را نیم‌اول گوییم هرگاه ایده‌آل صفر تنها ایده‌آل دو طرفه مانند J از $\mathcal{A}$ باشد که $J^{2} = \{0\}$.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر و $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ نگاشتی خطی باشد. در این صورت

آ) φ را یک همریختی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

ب) φ را یک پاد–همریختی می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$

$$\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a).$$

پ) φ را یک همریختی جردن می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a \in \mathcal{A}$

$$\varphi(a^{2}) = (\varphi(a))^{2}.$$

لازم به ذکر است که φ یک همریختی جردن است اگر و فقط اگر به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$

$$\varphi(ab + ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a).$$

بدیهی است که هر همریختی یا پاد–همریختی یک همریختی جردن است.
اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. مثال بعد این نکته را روشن می‌کند.

مثال ۱۰.۲.۱ می‌توان همریختی جردنی ساخت که همریختی و پاد–همریختی نباشد.
فرض کنید $\mathcal{A}_1$، $\mathcal{A}_2$، $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ جبرهای یکدار و $\varphi_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}_1$ و $\varphi_2 : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}_2$ به ترتیب یک همریختی و یک پاد–همریختی باشند. قرار می‌دهیم $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ و $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$. در این صورت $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ تحت اعمال زیر دو جبر یکدار خواهند بود.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

پس $1_A = (1_{A_1}, 1_{A_2})$ و $1_B = (1_{B_1}, 1_{B_2})$. اکنون نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ با ضابطهٔ $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ یک همریختی جردن است. زیرا

$$\varphi((x, y)^2) = \varphi(x^2, y^2) = (\varphi_1(x^2), \varphi_2(y^2)) = (\varphi_1(x)^2, \varphi_2(y)^2)$$
$$= (\varphi_1(x), \varphi_2(y))^2 = \varphi(x, y)^2$$

اما φ در حالت کلی نه همریختی است و نه پاد–همریختی. زیرا کافی است φ_1 را همریختی ای در نظر بگیریم که پاد–همریختی نباشد و φ_2 را یک پاد–همریختی ای در نظر بگیریم که همریختی نباشد. بنابراین $x_1, x_2 \in \mathcal{A}_1$ وجود دارند به قسمی که

$$\varphi_1(x_1 x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2) \neq \varphi_1(x_2)\varphi_1(x_1)$$

و $y_1, y_2 \in \mathcal{A}_2$ وجود دارند به قسمی که

$$\varphi_2(y_1 y_2) = \varphi_2(y_2)\varphi_2(y_1) \neq \varphi_2(y_1)\varphi_2(y_2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= \varphi(x_1 x_2, y_1 y_2) \\
&= (\varphi_1(x_1 x_2), \varphi_2(y_1 y_2)) \\
&= (\varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2), \varphi_2(y_2)\varphi_2(y_1))
\end{aligned}$$

اما

$$\varphi((x_۱, y_۱)(x_۲, y_۲)) \neq \varphi(x_۱, y_۱)\varphi(x_۲, y_۲)$$

و

$$\varphi((x_۱, y_۱)(x_۲, y_۲)) \neq \varphi(x_۲, y_۲)\varphi(x_۱, y_۱)$$

بنابراین φ همریختی یا پاد−همریختی نمی‌باشد.

۳.۱ مفاهیم مورد نیاز از C^*−جبرها

تعریف ۱.۳.۱ یک مرکزساز دوگانه برای C^*−جبر $\mathcal{A}$ عبارت است از دوتایی (L, R) از نگاشت های خطی کراندار روی $\mathcal{A}$ به قسمی که به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$L(ab) = L(a)b, \quad R(ab) = aR(b), \quad R(a)b = aL(b).$$

لم ۲.۳.۱ [لم ۲.۱.۴ [۲۹]] اگر (L, R) یک مرکز ساز دوگانه روی C^*−جبر $\mathcal{A}$ باشد در اینصورت $\| L \| = \| R \|$.

حال اگر $\mathcal{A}$ را یک C^*−جبر در نظر بگیریم مجموعهٔ تمام مرکز سازهای دوگانه روی $\mathcal{A}$ را با $M(\mathcal{A})$ نمایش داده و آن را ضربگر $\mathcal{A}$ می‌نامیم. نرم یک مرکز ساز دوگانه (L, R) را با توجه به لم ۲.۳.۱ به صورت $\| (L, R) \| = \| R \| = \| L \|$ تعریف می‌کنیم. $M(\mathcal{A})$ یک زیر فضای بسته از $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{B}(\mathcal{A})$ می‌باشد که منظور از $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ جبر باناخ تمام نگاشت های خطی کراندار روی

$\mathcal{A}$ است.[بخش ۲.۱ [۲۹]]

اگر ضرب هر دو عنصر در $M(\mathcal{A})$ مانند $(L_۱, R_۱)$ و $(L_۲, R_۲)$ رابه صورت زیر تعریف کنیم

$$(L_۱, R_۱)(L_۲, R_۲) := (L_۱ L_۲, R_۲ R_۱)$$

$M(\mathcal{A})$ تحت این ضرب یک جبر می‌شود که با تعریف

$$\begin{aligned} L^* : \mathcal{A} &\to \mathcal{A} \\ L^*(a) &= (L(a^*))^* \end{aligned}$$

و

$$(L, R)^* = (R^*, L^*)$$

تبدیل به یک C^*–جبر یکدار می شود.[بخش ۲.۱ [۲۹]] (دوتایی (id_A, id_A) عنصر همانی در این C^*–جبر می‌باشد) و با توجه به نگاشت

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to M(\mathcal{A}) \\ a &\mapsto (L_a, R_a) \end{aligned}$$

می‌توان $\mathcal{A}$ را یک ایده‌آل بسته از $M(\mathcal{A})$ در نظر گرفت.

اگر $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر و $M(\mathcal{A})$ جبر ضربگر $\mathcal{A}$ باشد، $\frac{M(\mathcal{A})}{\mathcal{A}}$ را جبر کورونای $\mathcal{A}$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱ گوییم C^*–جبر یکدار $\mathcal{B}$ دارای بعد حقیقی صفر است و نماد $RR(\mathcal{B}) = 0$ را برای آن به کار می‌بریم اگر عناصر خود الحاق معکوس پذیر $\mathcal{B}$ در مجموعه عناصر خود الحاق آن چگال باشد. اگر C^*–جبر $\mathcal{B}$ یکدار نباشد بعد حقیقی آن را صفر گوییم هرگاه C^*–جبر یکدار شدهٔ $\mathcal{B}$ دارای بعد حقیقی صفر باشد.

تعریف ۴.۳.۱ C^*–جبر $\mathcal{B}$ دارای خاصیت FS است اگر عناصر خود الحاق با طیف متناهی در مجموعه عناصر خود الحاق آن چگال باشد.

لم ۵.۳.۱ [قضیهٔ ۲.۶ [۱۱]] C^*–جبر $\mathcal{B}$ دارای خاصیت FS است اگر و فقط اگر دارای بعد حقیقی صفر باشد.

از آنجا که هر جبر فون‌نویمان (W^*–جبر) بستار فضای تولید شده توسط تصویرهای خود است، لذا هر جبر فون‌نویمان از بعد حقیقی صفر است.

۴.۱ C^*–مدول های هیلبرت

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک C^*–جبر و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$–مدول چپ باشد ($\mathcal{M}$ همزمان یک فضای برداری روی میدان مختلط نیز می‌باشد) که به یک ضرب داخلی $\mathcal{A}$–مقدار مانند $\mathcal{A} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M} :< .,. >$ تجهیز شده باشد. در این صورت $\mathcal{M}$ را یک شبه $\mathcal{A}$–مدول هیلبرت می‌خوانیم هرگاه

آ) به ازای هر $x \in \mathcal{M}$، $0 \leq < x, x >$ و $< x, x > = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

ب) به ازای هر $x, y \in \mathcal{M}$، $< x, y > = < y, x >^*$.

پ) به ازای هر $x_1, x_2, y \in \mathcal{M}$، $< x_1 + x_2, y > = < x_1, y > + < x_2, y >$.

ت) به ازای هر $x, y \in \mathcal{M}, \lambda \in \mathbb{C}$، $< \lambda x, y > = \lambda < x, y >$.

ث) به ازای هر $x, y \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{A}$، $< ax, y > = a < x, y >$.

نتیجه ۲.۴.۱ ترکیب قسمت (ب) و (پ) در تعریف ۱.۴.۱ نتیجه می‌دهد که برای هر سه عنصر دلخواه x، y و z از $\mathcal{M}$ داریم

$$< x, y + z > = < x, y > + < x, z >$$

و اگر $a \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$، در این صورت

$$< x, ay > = < x, y > a^* \quad , \quad < x, \lambda y > = \bar{\lambda} < x, y > .$$

تعریف ۳.۴.۱ یک شبه $\mathcal{A}$−مدول هیلبرت را یک $\mathcal{A}$−مدول هیلبرت خوانیم هرگاه $\mathcal{M}$ با نرم $\| x \| := \sqrt{\| < x, x > \|}$ یک فضای تام باشد و هر زیر مدول بسته از $\mathcal{M}$ را یک زیر مدول هیلبرت از مدول هیلبرت $\mathcal{M}$ می‌نامیم.

مثال ۴.۴.۱ فرض کنید که $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت با توجه به خواص ضرب داخلی، به وضوح $\mathcal{H}$ یک مدول هیلبرت روی C^*−جبر اعداد مختلط است.