بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی گرایش کاربردی

بررسی کارایی روش‌های اصلاح شده هموتوپی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

نگارش:

مرتضی میرزایی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل حسام الدینی

استاد مشاور:

دکتر محمد جواد مهدی پور

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم به مهربان فرشتگانی‌که

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن

و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست،

" تقدیم به خانواده عزیزم "

سپاسگزاری

اول دفتر به نام ایزد دانا   صانع پروردگار حی و توانا

سپاس خدایی که انسان را آفرید و او را به فضیلت تعلیم و تعلم بر دیگر مخلوقات برتری بخشید. شایسته است در آغاز این نوشتار، از همه عزیزانی که مرا در تهیه این رساله یاری نموده و بالاتر از آن، زندگی مرا با حضورشان شکل داده اند، تشکر نمایم. بیش و پیش از همه از خانواده گرامی‌ام تقدیر و تشکر نموده و از پدر و برادران بزرگوار، مادر مهربان و خواهر عزیزم برای نقش بی بدیل‌شان در یاری و همراهی‌ام سپاس‌گذارم. همچنین فرصت را مغتنم شمرده و از استاد راهنمای گران‌قدر، جناب آقای دکتر اسماعیل حسام الدینی که در این دوره افتخار شاگردی ایشان را داشتم، فروتنانه تقدیر می‌نمایم. حقیقت آن است که نوشتارم برای سپاس از اخلاق، دانش و ادب استادی که به حق بهترین راهنما و آموزگار دانشگاهی‌ام بوده است، قاصر است. امیدوارم که همواره شایسته افتخار شاگردی ایشان باشم. همچنین از آقای دکتر مهدی پور، مدیر گروه ریاضی و استاد جوان و دلسوز که زحمت مشاوره این پایان نامه را کشیده اند بسیار سپاس‌گذارم. سپاس و درود بر دیگر اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه صنعتی شیراز که در طول این دوره افتخار شاگردی و کسب دانش و معرفت را از ایشان داشتم.

در پایان و نه کمتر از آغاز، تشکر می‌کنم از دوستان و همکلاسی‌های عزیز و بزرگوارم که از همراهی و یاری‌شان بهره مند شدم، از جمله آقایان: ناصر زمانی، محسن ریاحی، محمدرضا پاکباز و سعید هاشمی.

در این بازار اگر سودی است با درویش خرسند است

خدایا منعمم گردان به درویشی و خرسندی

چکیده

بررسی کارایی روش‌های اصلاح شده هموتوپی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

نگارش:

مرتضی میرزایی

با پیشرفت فن‌آوری در سال‌های اخیر، استفاده از روش‌های عددی در حل مسائل دیفرانسیلی به سرعت گسترش یافته است. روش‌های مبتنی بر تکنیک هموتوپی ابزار قدرتمندی در حل معادلات جبری، معادلات دیفرانسیلی معمولی و جزئی، معادلات انتگرالی، دیفرانسیل- انتگرالی و حتی مسائل کنترل بهینه هستند. این روش‌ها قابلیت‌های زیادی مانند ترکیب با تقریبات پاده، تبدیلات لاپلاس و چند جمله‌ای‌های درونیاب را به منظور بهبود جواب حاصل شده، دارند. بنابراین، می‌توان از این روش‌ها در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی برای یافتن یک جواب تقریبی تحلیلی استفاده کرد. از مزیت‌های این روش‌ها می‌توان به همگرایی تضمین شده، حجم محاسبات کم و دقت بالای جواب‌های حاصل شده اشاره کرد. این پایان نامه به معرفی و بررسی برخی از روش‌های هموتوپی و روش‌های اصلاح شده آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌پردازد. برای بهبود کارایی روش‌های هموتوپی، از قابلیت‌های ذکر شده برای این روش‌ها استفاده شده است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فصل۱

پیشگفتار و مفاهیم مقدماتی

۱-۱ مقدمه

برای حل مسائل فیزیکی، در اکثر مواقع آن‌ها را به‌صورت مسائل ریاضی مدل‌سازی می‌کنند. برای بیان این مسائل که در طبیعت نیز وجود دارند از معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود [۳۵]. بنابراین اکثر این مسائل به‌صورت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و از نوع غیرخطی نمایش داده می‌شوند. گاهی حل این مسائل با استفاده از روش‌های کلاسیک کاری بسیار دشوار و حتی غیرممکن می‌باشد. در حالت کلی، به‌دست آوردن یک تقریب تحلیلی از مسائل غیرخطی با درجه غیرخطی بالا کاری دشوار است. در گذشته، بسط جواب یک مسئله غیرخطی، عمدتاً با نوع مسئله و تکنیک‌های تحلیلی مورد استفاده بیان می‌شد و ناحیه همگرایی سری جواب شدیداً به پارامترهای فیزیکی مسئله وابسته بود. باید توجه کنیم که توانایی یافتن جواب تحلیلی مسائل غیرخطی با افزایش درجه غیرخطی مسئله، کاهش یافته و جواب‌های تقریبی تحلیلی نیز تنها برای مسائل غیرخطی با درجه غیرخطی کم معتبر می‌باشد. در گذشته به دلیل عدم پیشرفت فناوری، برای حل این مسائل از روش‌های عددی، مشکلات زیادی وجود داشت. بنابراین همواره سعی شده است که جواب‌هایی تحلیلی به وسیله روش‌هایی مثل روش آدومین، روش هموتوپی، روش بسط تیلور و بسط تداخلی برای این مسائل یافت شود [۴۵]. روش تداخلی ابزاری قوی در حل معادلات غیرخطی برای مسائل مهندسی می‌باشد. البته این روش دارای محدودیت‌هایی نیز می‌باشد. یکی از نقاط ضعف این روش وابستگی آن به پارامتر تداخلی است. بسیاری از مسائل فیزیکی تداخلی نیستند و نمی‌توان از روش تداخلی برای حل و تفسیر آن‌ها استفاده کرد. این مشکل در فصل‌های بعد و با معرفی روش‌های هموتوپی حل می‌شود.

۱-۱-۱ مروری بر مطالب این پایان‌نامه

کلیات مطالبی که در این پایان‌نامه مورد بحث قرار می‌گیرند به‌صورت زیر است:
در فصل اول به بیان تعاریف و مقدمات درباره معادلات دیفرانسیل پرداخته می‌شود. همچنین برخی از روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل در این فصل معرفی می‌شوند.
در فصل دوم به معرفی و بررسی سه روش مهم که از تکنیک هموتوپی در حل مسائل دیفرانسیلی و انتگرالی استفاده می‌کنند پرداخته می‌شود.
در فصل سوم و چهارم نیز برخی از تکنیک های ساده و مفید که باعث بهبود جواب‌های حاصل شده به وسیله روش‌های هموتوپی می‌شود مورد مطالعه قرار می‌گیرند.
در فصل آخر نیز نتایج این پایان‌نامه و پیشنهادهایی جهت ادامه کار در این مبحث ارائه می‌شود.

۲-۱ تعاریف

۱-۲-۱ برخی تعاریف مقدماتی

در این فصل به بیان برخی تعاریف و مقدمات درباره معادلات دیفرانسیلی، انتگرالی و برخی از روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی پرداخته می‌شود.

تعریف ۱.۱: یک معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی (PDE[۱]) معادله‌ای است که شامل یک متغیر وابسته (یک تابع نامشخص) و مشتقات جزئی آن می‌باشد. می‌دانیم که در یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE[۲])، متغیر وابسته $u = u(x)$ تنها به متغیر مستقل x وابسته می‌باشد ولی در یک PDE متغیر وابسته به بیش از یک متغیر مستقل وابسته است.

مثال ۲.۱: در زیر نمونه‌هایی از PDE که به ترتیب نشان دهنده انتقال جریان گرما در یک ، دو و سه بعد می‌باشند ارایه شده است.

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t)\,, \\ &u_t(x,y,t) = k(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t))\,, \\ &u_t(x,y,z,t) = k(u_{xx}(x,y,z,t) + u_{yy}(x,y,z,t) + u_{zz}(x,y,z,t)). \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

[۱] Partial Differential Equation
[۲] Ordinary Differential Equation

تعریف ۳.۱: مرتبه یک PDE مرتبه بالاترین مشتق جزئی می‌باشد که در معادله ظاهر شده است. برای مثال معادلات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_{xx} + ۲xu_{xy} + u_{yy} = e^y,$$
$$u_{xxy} + xu_{yy} + ۸u = ۷y,$$

معادله اول یک معادله دیفرانسیل جزیی از مرتبه دوم است در حالی‌که معادله دیگر از مرتبه سوم می‌باشد.

تعریف ۴.۱: یک PDE را خطی گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشند:
الف) توان متغیر وابسته و هر مشتق جزئی در معادله یک باشد.
ب) ضریب متغیر وابسته و ضریب هر مشتق جزئی، ثابت یا متغیر مستقل باشد.
اگر هرکدام از شرایط بالا برقرار نباشد معادله غیرخطی نامیده می‌شود. معادلاتی که در آن‌ها توان قسمت غیرخطی بالاتر از سه باشد و یا معادلاتی که در آن‌ها عملگر خطی متناظر با شرایط اولیه داده شده در مسئله موجود نباشد را معمولاً معادلات غیرخطی قوی نامند. به عنوان مثال در معادله

$$u^{۵}(x)u^{(۴)}(x) + sin(u(x)) = ۰\,, \qquad (۲\text{-}۱)$$

با شرایط اولیه

$$u(۰) = A\ , u'(۰) = B\,. \qquad (۳\text{-}۱)$$

عملگر خطی برابر صفر است و این معادله نمونه‌ای از یک معادله دیفرانسیل غیرخطی قوی می‌باشد.

همانگونه که در معادلات جبری با توان‌های بالاتر از ۵ دستورالعمل خاصی برای حل آن‌ها نیست، حل PDE های با قسمت غیرخطی قوی نیز کاری بسیار دشوار و حتی در بعضی موارد غیر ممکن است.

مثال ۵.۱: معادلات دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t)+u_{xx}(x,t)=0\,, \\ &u_t(x,t)+u(x,t)u_x(x,t)=\alpha u_t(x,t)\,, \qquad \alpha\in\mathbb{N}, \\ &u_{tt}(x,t)+\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}+\frac{\partial^2 u^5(x,t)}{\partial x^2}+u^4(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0\,. \end{aligned} \tag{۱-۴}$$

معادله اول، معادله لاپلاس[۱] دوبعدی و خطی است. معادله دوم، معادله غیرخطی برگر[۲] و معادله آخر یک معادله غیرخطی قوی می‌باشد.

۱-۲-۲ جواب یک PDE

یک جواب از یک PDE تابعی مثل u است که در معادله و شرایط داده شده معادله صدق کند. یادآوری می‌کنیم که اگر توابع $u_1, u_2, ..., u_n$ جواب‌های معادله باشند، آنگاه هر ترکیب خطی از آنها که به‌صورت

$$u=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+...+c_nu_n, \tag{۱-۵}$$

باشد نیز جواب معادله است. مفهوم ترکیب دو یا بیش از چند جواب، **اصل انطباق** نامیده می‌شود. جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل معمولی به ضرایب دلخواه بستگی دارد. اما در معادلات دیفرانسیل جزئی، جواب عمومی معادله به توابع دلخواه بستگی دارد. به عنوان مثال PDE زیر:

$$u_x+u_y=0, \tag{۱-۶}$$

دارای جواب عمومی به‌صورت زیر است که در آن $f(x,y)$ یک تابع دلخواه مشتق پذیر است.

$$u=f(x,y), \tag{۱-۷}$$

بنابراین جواب معادله (۱-۶) می‌تواند به صورت یکی از توابع زیر باشد:

$$\begin{aligned} &u=x-y\,, \qquad u=e^{(x-y)}\,, \\ &u=sinh(x-y)\,, \qquad u=ln(x-y)\,. \end{aligned} \tag{۱-۸}$$

---
[۱] Laplace
[۲] Burger

همچنین هرتابع دیگری به فرم $f(x-y)$ نیز جواب این معادله است. این حقیقت که یک معادله ساده مانند (۱-۶) بینهایت جواب دارد، خود از مشکلاتی است که در مطالعه PDE ها باید بر آن غلبه کرد. بنابراین معمولاً ترجیح داده می‌شود که مستقیماً جواب‌های خصوصی این معادلات را بیابیم.

۱-۲-۳ شرایط مرزی

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مقایسه با جواب‌های خصوصی آن کاربرد کمتری دارد. برای یک PDE در یک ناحیه کراندارD، معمولاً متغیر وابسته u دراین ناحیه توصیف می‌شود. این اطلاعات مرزی مسئله، شرایط مرزی نامیده می‌شود که معمولا به سه صورت زیر هستند:

۱- شرایط مرزی دیریکله

در این حالت، تابع u معمولا روی مرز ناحیه کراندار توصیف می‌شود. برای مثال، برای یک میله به طول Lکه $\circ < x < L$ شرایط مرزی دیریکله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(\circ) = \alpha, \qquad u(L) = \beta,$$

که در آن α و β ثابت‌های مشخصی هستند.

۲- شرایط مرزی نیومن

در این حالت مشتق نرمال در جهت بردار نرمال بیرونی مرز توصیف می شود. برای یک میله به طول L، شرایط مرزی نیومن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$u_x(\circ, t) = \alpha, \qquad u_x(L, t) = \beta.$$

۳- شرایط مرزی ترکیبی

در این حالت یک ترکیب خطی از u و $\frac{\partial u}{\partial n}$ روی مرز مشخص می‌شود. لازم به یادآوری است که همیشه لازم نیست دامنه کراندار باشد. در بعضی از مسائل ممکن است قسمتی از دامنه یا کل آن در بینهایت باشد.

برای حل یک معادله دیفرانسیل به وسیله روش‌های هموتوپی، آدومین و تکرار تغییراتی از

شرایط اولیه در یک نقطه آغازین و یا همان شرایط مرزی ترکیبی استفاده می‌شود. چنانچه شرایط اولیه داده نشده باشند، آن‌ها را به صورت ضرایب ثابت وارد مسئله می‌کنیم و جواب تقریبی را بر حسب آن‌ها به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از شرایط مرزی داده شده در مسئله به آسانی این ضرایب را تعیین می‌کنیم. برای مثال، فرض کنیم معادله دیفرانسیل زیر با شرایط مرزی دیریکله داده شده باشد:

$$u''(x) + u(x) + \varepsilon u^{۳}(x) = \circ\ ,\ u(\circ) = ۱\ ,\ u(۱) = \frac{۱}{۴},\ \ x \in [\circ, ۱]\,. \qquad (۹\text{-}۱)$$

در این صورت یک شرط اولیه به صورت $u'(\circ) = B$ به مسئله اضافه می‌کنیم. با استفاده از روش تداخلی هموتوپی که در فصل بعد شرح داده می‌شود و شرط مرزی $u(۱) = \frac{۱}{۴}$ در جواب تقریبی، خواهیم داشت $B = \circ$.

در بخش بعد به معرفی یکی از روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم و با ذکر معایب و مشکلات آن، در فصل بعد به معرفی روش تداخلی هموتوپی که از ادغام این روش و مفهوم هموتوپی به‌دست می‌آید و همچنین دیگر روش‌های هموتوپی پرداخته می‌شود.

۱-۳ بررسی روش تداخلی

روش‌های تحلیلی مختلفی برای مسائل غیرخطی موجود است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های تداخلی اشاره نمود که به خوبی شناخته شده هستند و به طور وسیعی بکار می‌روند. یکی از موفقیت‌های حیرت انگیز روش‌های تداخلی در کشف نهمین سیاره منظومه شمسی بوده است [۲۸]. روش‌های تداخلی از کمیت‌های تداخلی برای تبدیل یک مسئله غیرخطی به تعداد نامتناهی از زیر مسئله های خطی و سپس تقریب زدن جواب به وسیله مجموع جواب‌های تعدادی از زیر مسئله‌های اولیه است. در این روش فرض می‌کنیم که جواب معادله دیفرانسیل به صورت یک سری توانی از ε باشد و با تقلیل شرایط اولیه مسئله به یک مجموعه از شرایط اولیه و همچنین قراردادن سری در معادله دیفرانسیل و محاسبه ضرایب هم‌توان ε به یک دسته از معادلات ساده تر با شرایط اولیه خواهیم رسید. با حل این مسایل و قرار دادن آن‌ها در معادلات بعدی به جواب مسئله خواهیم رسید.

مثال ۶.۱: مسئله شرط اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y' = y^2 sin(\varepsilon t), \quad y(0) = 1. \tag{۱-۱۰}$$

یادآوری می‌کنیم که این مسئله با روش جدا سازی متغیر ها قابل محاسبه است و جواب تحلیلی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$y(t) = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon - 1) + cos(\varepsilon t)}.$$

برای حل این مسئله با روش تداخلی، فرض می‌کنیم که جواب مسئله یک سری توانی از ε به‌صورت زیر باشد:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(t). \tag{۱-۱۱}$$

شرایط مرزی مسئله به مجموعه شرایط مرزی زیر کاهش می‌یابد:

$$y_0(0) = 1 \ \ , y_0'(0) = 0 \ \ , y_k(0) = y_k'(0) = 0 \ \ , k \geq 1. \tag{۱-۱۲}$$

با قرار دادن رابطه (۱-۱۱) در رابطه (۱-۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} & y_0' + \varepsilon y_1' + \varepsilon^2 y_2' + \varepsilon^3 y_3' + \varepsilon^4 y_4' + \cdots \\ & = (y_0^2 + 2\varepsilon y_0 y_1 + \varepsilon^2 (2 y_0 y_2 + y_1^2))(\varepsilon t - (\frac{1}{3!})\varepsilon^3 t^3), \end{aligned} \tag{۱-۱۳}$$

با محاسبه ضرایب هم‌توان ε در رابطه (۱-۱۳) دستگاه معادلات دیفرانسیلی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & {y_0}' = 0, \ \ y_0(0) = 1, \\ & {y_1}' = t y_0^2, \ \ y_1(0) = 0, \\ & {y_2}' = 2 t y_0 y_1, \ \ y_2(0) = 0, \\ & {y_3}' = \left(2 y_0 y_2 + y_1^2\right), \ \ y_3(0) = 0, \\ & {y_4}' = t\left(2 y_0 y_3 + 2 y_1 y_2\right) - \tfrac{2}{3! t^3} y_0 y_1, \ \ y_4(0) = 0. \end{aligned}$$

با حل این معادلات و استفاده از شرایط اولیه مرتبط خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&y_0(t)=1,\;\; y_1(t)=\tfrac{1}{2}\,t^2,\;\; y_2(t)=\tfrac{1}{4}\,t^4,\\
&y_3(t)=\tfrac{1}{8}\,t^6-\tfrac{1}{24}t^4,\;\; y_4(t)=\tfrac{1}{16}\,t^8-\tfrac{1}{72}t^6\,.
\end{aligned}
\tag{۱۴-۱}
$$

بنابراین جواب تداخلی به‌دست آمده به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
y(t)=1+\frac{1}{2}\varepsilon t^2+\frac{1}{4}\varepsilon^2 t^4+\varepsilon^3\Big(\frac{1}{8}t^6-\frac{1}{24}t^4\Big)+\varepsilon^4\Big(\frac{1}{16}t^8-\frac{1}{72}t^6\Big)+O(\varepsilon^5). \tag{۱۵-۱}
$$

با مقایسه مقادیر به‌دست آمده از جدول ۱-۱ به ازای $\varepsilon = 0/1$ می‌بینیم که در روش تداخلی، بسط تیلور $sin(\varepsilon t)$ (نه خود تابع $sin(\varepsilon t)$) برای کنترل توان‌های ε در هر دو طرف رابطه (۱-۱۳) مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین توجه داریم که تقریب زدن با دو جمله از بسط

جدول ۱-۱: مقایسه جواب تحلیلی و تداخلی به دست آمده

t	جواب تحلیلی	جواب تداخلی
۰/۸	۱/۰۳۳۰۴	۱/۰۳۳۰۴
۱/۵	۱/۱۲۶۴۹	۱/۱۲۶۵۱
۲/۰	۱/۲۴۸۹۶	۱/۲۴۸۸۴
۳/۰	۱/۸۰۷۱۳	۱/۷۸۰۲۴

تیلور بر جواب تقریبی به‌دست آمده تاثیر می‌گذارد. در روش تداخلی فرض می‌شود که یک پارامتر کوچک باید در مسئله مورد نظر وجود داشته باشد. این پارامتر کاربرد روش مذکور را بسیار محدود می‌کند. جواب به‌دست آمده به وسیله این روش بسیار به انتخاب این پارامتر وابسته می‌باشد. همچنین با فرض انتخاب مناسب این پارامتر، جواب‌های به‌دست آمده ممکن است تنها برای مقادیر کوچکی از این پارامتر معتبر باشند. همچنین بسیاری از معادلات غیرخطی در علوم و مهندسی به هیچ پارامتری وابسته نیستند. بنابراین در فصل‌های بعد با ترکیب این روش و مفهوم هموتوپی به بیان روش‌هایی می‌پردازیم که از این محدودیت‌ها مبرا هستند. در بخش بعد به معرفی و یادآوری دو روش مهم برای به دست آوردن جواب‌های تحلیلی تقریبی معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم.