بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه ، **گروه** ریاضی و آمار

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد(M.sc)

گرایش : محض (آنالیز)

عنوان :

قضایای نقطه ثابت برای انقباض های ضعیف در فضاهای متریک مخروطی

استاد راهنما :

دکتر حمیدرضا رحیمی

استاد مشاور :

دکتر محمد صادق عسگری

پژوهشگر :

آزیتا ادیب فر

زمستان ۱۳۹۱

تقدیم به:

خدا را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه ی درخت وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. از تمامی زحماتی که در این راه برایم کشیدند تا من بتوانم در کمال آسایش و راحتی تحصیل کنم و به این مرحله از زندگی برسم بسیار خرسندم و در اینجا لازم می دانم که این رساله را به وجود عزیز و گرامیشان تقدیم نمایم.

تشکر و قدردانی :

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز لازم می دانم از زحمات پدر و مادر گرامی ام و کلیه دوستانی که در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده اند کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. همچنین از زحمات اساتید محترم و مهربان دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی و به خصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر حمید رضا رحیمی که با راهنمایی های خود راهگشای اینجانب بوده اند و جناب آقای دکتر محمد صادق عسگری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن این جانب را مورد راهنمایی قرار دادند کمال تشکر و سپاسگذاری را دارم.

بسمه تعالی

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب آزیتا ادیب فر دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی ۸۹۰۶۴۱۴۵۹۰۰ در رشته ریاضی محض که در تاریخ ۹۱/۱۱/۲۴ از پایان نامه خود تحت عنوان : قضایای نقطه ثابت برای انقباض های ضعیف در فضاهای متریک مخروطی با کسب نمره ۱۸ و درجه بسیار خوب دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم :

۱- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب ، مقاله و ...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه های موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام .

۲- این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است .

۳- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل ، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم .

۴- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت .

نام و نام خانوادگی : آزیتا ادیب فر

تاریخ و امضاء :

بسمه تعالی

درتاریخ : ۹۱/۱۱/۲۴

دانشجوی کارشناسی ارشد خانم آزیتا ادیب فر از پایان نامه خود دفاع نموده و با نمره ۱۸ بحروف هجده و با درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت .

امضاء استاد راهنما

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا به بیان و بررسی نتایج نقطه ثابت مشترک برای نگاشت های انقباضی ضعیف (به طور ضعیف انقباضی) می پردازیم. سپس، نتایج تعمیمی را که اخیرا توسط چودهاری و متیا به دست آمده است بررسی می کنیم. در ادامه، نقاط برخورد و ثابت مشترک را برای یک جفت از نگاشت ها در فضاهای متریک مخروطی مشخص می کنیم. در انتها، فضای متریک مخروطی را تعریف کرده و به بیان و اثبات قضایای مربوط برای نگاشت های انقباضی ضعیف نوع اول و دوم می پردازیم.

مقدمه

نظریه نقطه ثابت یکی از قوی ترین ومفید ترین ابزار های مدرن ریاضیات می باشد و به خصوص نقش مهمی در بسیاری از جنبه های آنالیز تابعی غیر خطی ایفا کرده است. این نظریه در سالهای گذشته بیشتر شامل مباحث هندسی و توپولوژیکی در فضاهای باناخ بوده است. در سال های اخیر، نویسندگان و محققان زیادی این نظریه را در فضاهای مختلف بیان و گسترش داده اند. فضاهای متریک مخروطی در سال ۲۰۰۷ توسط هیوانگ و اکسیان معرفی شد. البته قبل از این مفهومی مشابه نیز توسط زیکی در سال ۱۹۸۰ ارائه شد شده بود. هیوانگ و اکسیان بعد از تعریف دقیق همگرایی و تمامیت در فضاهای متریک مخروطی، اصل انقباض باناخ را در این فضاها اثبات کرده اند.

پس از آن مسائلی از وجود و یکتایی نقطه ثابت برای نوع انقباضی عملگرها روی مجموعه های مرتب جزیی مطرح و اثبات گردیده است.

همچنین، نظریه نقطه ثابت در فضاهای متریک مخروطی و نرمال توسط پیرو[4]، موخمدیجیو و وستسنکو و واندرگرافت [5] و دیگران توسعه یافته است.

تحقیق پیش رو متشکل از سه فصل است که بخش عمده مطالب آن از مراجع [8] ،[15] ، [16] ، [18] ، [21] و [24] استخراج شده است.

فصل اول با عنوان" تعاریف و قضایای مقدماتی " از چهار بخش تشکیل شده است.

در بخش اول به بیان تعاریف و قضایای نگاشت های ضعیف و به طور ضعیف انقباضی، می پردازیم. سپس قضیه نقطه ثابت برای نگاشت های انقباضی را مطرح می کنیم و در ادامه پیوستگی نگاشت های انقباضی را بررسی می کنیم. در بخش دوم این فصل، چند تعریف و قرار داد را ذکر می کنیم و در ادامه به تعاریف مخروط نرمال و منظم می پردازیم. همچنین فضاهای متریک مخروطی و ویژگی مربوط به آن را بررسی می کنیم. در بخش سوم، ابتدا قضایای مربوط به دنباله ها را در فضای متریک مخروطی بررسی می کنیم. سپس ویژگی های مربوط به مخروط های نرمال و منظم را همراه با رابطه

بین آنها بیان و اثبات می کنیم. در بخش چهارم، قضایای اصل انقباض باناخ و انقباض کنان در فضای متریک مخروطی را بیان و اثبات می کنیم.

فصل دوم با عنوان " قضایای نقطه ثابت برای نگاشت ها بدون شرط پیوستگی در فضای متریک مخروطی " شامل دو بخش است.

در بخش اول تعاریف و قضایای نقطه ثابت را مطرح می کنیم. در بخش دوم، قضایای اساسی را برای نگاشت ها بدون شرط پیوستگی در فضای متریک مخروطی مطرح می کنیم.

فصل سوم با عنوان " انقباض های ضعیف نوع اول و دوم در فضاهای متریک مخروطی " از سه بخش تشکیل شده است.

در بخش اول، قضایای انقباضی و به طور انقباضی ضعیف را مطرح و اثبات می کنیم. در بخش دوم به اثبات قضایای انقباض های ضعیف نوع اول و مثال های مربوط به آن می پردازیم. در بخش سوم، قضایای انقباض های ضعیف نوع دوم را مورد بررسی قرار داده و قضایای مربوط به آن را مطرح می کنیم.

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

این فصل با عنوان " تعاریف و قضایای مقدماتی " شامل چهار بخش است. در بخش اول، نگاشت های انقباضی و به طور ضعیف انقباضی را تعریف می کنیم. و پیوستگی آنها را مطرح و بررسی می کنیم. در بخش دوم، به ذکر چند تعریف و قرارداد می پردازیم و در ادامه مخروط نرمال و منظم را تعریف می کنیم. در بخش سوم، ویژگی های مربوط به مخروط های نرمال و منظم را همراه با رابطه بین آنها بیان و اثبات می کنیم. در بخش چهارم، قضایای اصل انقباض باناخ و انقباض کنان در فضای متریک مخروطی را بیان و اثبات می کنیم.

۱-۱. مرور تاریخی

در این بخش ابتدا به بیان تعاریف نگاشت های انقباضی و ضعیفاً انقباضی پرداخته، سپس قضایای مربوط را اثبات خواهیم کرد. در ادامه این بخش قضیه نقطه ثابت برای نگاشت های انقباضی که کاربرد فراوانی دارد را مطرح و اثبات می کنیم.

تعریف۱-۱-۱. فرض کنید $(X\ ,d)$ یک فضای متریک باشد یک نگاشت $T:X\rightarrow X$ را لیپشیتز گوییم اگر ثابت $q\in R$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم :

$$d\left(Tx,Ty\right)\leq qd\left(x,y\right)$$

کوچکترین ثابت q را که در نامساوی بالا صدق می کند، ثابت لیپشیتز T گوییم و با نماد $Lip\ (T)$ نمایش می دهیم.

در حالت خاص اگر $Lip\ \ (T)\in[0\ ,1)$ آنگاه T یک انقباض است و اگر $Lip\ (T)=1$، T را یک انبساط گوییم.

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. تابع $T:X\to X$ یک نگاشت انقباضی است اگر $0\le q<1$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x,y\in X$ داشته باشیم:

$$d\big(T(x),T(y)\big)\le qd(x,y)$$

گزاره ۱-۱-۳. هر نگاشت انقباضی پیوسته است.

برهان. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $T:X\to X$ یک نگاشت انقباضی روی (X,d) باشد:

اگر $\varepsilon>0$ و با در نظر گرفتن $\delta=\dfrac{\varepsilon}{q}$، اگر $d\ (x\ ,a)<\delta$

$$\Rightarrow d\big(T(x),T(a)\big)\le qd(x,a)\le q.\frac{\varepsilon}{q}=\varepsilon$$

$$\Rightarrow d\big(T(x),T(a)\big)<\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad T \text{ پیوسته است}$$

تعریف ۱-۱-٤. فرض (X,d_x) و $(Y\ ,d_y)$ یک فضای متریک باشد، آنگاه یک نگاشت $F:X\to Y$ پیوسته یکنواخت است. اگر برای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد یک $\delta>0$ به طوری که :

$$\forall x,x'\in X \qquad d_x(x,x')<\delta \quad\Rightarrow\quad d_y\ (f(x)\ ,f(x'))<\varepsilon$$

تعریف ۱-۱-۵. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد، یک نگاشت $T:X\to X$ نگاشت ضعیفاً انقباضی نامیده می شود اگر به ازای هر $x,y\in X$،

$$d(Tx,Ty)\le d(x,y)-\varphi\big(d(x,y)\big) \tag{۱}$$

که $\varphi:[0\ ,+\infty)\to[0\ ,+\infty)$ یک تابع غیر نزولی و پیوسته است که در آن $\varphi(t)=0$ اگر و تنها اگر $t=0$ باشد.

گزاره ۱-۱-۶. هر نگاشت انقباضی ضعیفاً انقباضی است.

برهان. برای نشان دادن این حکم کافی است در رابطه (۱) به جای $\varphi(t)=(1-k)t$ که $k\in(0,1)$ است را قرار دهیم.

$$d(Tx,Ty)\le d(x,y)-\varphi(d(x,y)) \qquad (۱)$$

$$\Rightarrow \quad d(Tx,Ty)-d(x,y)+k\,d(x,y)=k\,d(x,y)$$
$$\Rightarrow \quad d(Tx,Ty)\le k\,d(x,y)$$

یعنی T انقباضی است.

تعریف ۱-۱-۷ . فرض $\psi : X\to X$ یک تابع باشد. تابع ψ را در $x\in X$ پیوسته گوییم هرگاه برای دنباله $\{x_n\}$ در X که $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$ نتیجه بگیریم که : $\psi(x_n)\mapsto\psi(x_0)$

قضیه ۱-۱-۸. فرض کنید $(X,\le)$ یک مجموعه با رابطه جزئی آن باشد. همچنین d را طوری در نظر بگیرید که یک متریک روی X و (X,d) یک متریک کامل باشد.

فرض کنید $f : X\to X$ یک نگاشت نزولی با رابطه جزئی $\le$ باشد که شرایط زیر برقرار شود :

۱) وجود دارد $c\in[0,1)$ به طوری که $d(f(x),f(y))\le cd(x,y)$ باشد. $x\ge y$ به ازای $x,y\in X$،

۲) وجود دارد $x_0\in X$ به طوری که $x_0\le fx_0$ یا $x_0\ge fx_0$ پس F یک نقطه ثابت منحصر به فرد $\bar{x}$ دارد که برای هر $\bar{x}\in X$ داریم :

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x)=\bar{x}$$

برهان. فرض کنید $x_0\in X$ چنان باشد که $x_0\le f(x_0)$ یا $x_0\ge(fx_0)$ یکنواختی f نتیجه می دهد که یا $f^n(x_0)\le f^{n+1}(x_0)$ یا $f^n(x_0)\ge f^{n+1}(x_0)$ برای $n=0,1,2,...$، بنابر شرط (۱) در صورت قضیه داریم :

$$d\left(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)\right) \le cd\left(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)\right).$$

بنابراین داریم :

$$d\left(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)\right) \le c^n d\left(f(x_0), x_0\right).$$

نشان می دهیم که $\left\{f^n(x_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله کوشی است.

با فرض $n<m$ داریم :

$$\begin{aligned} d\left(f^n(x_0), f^m(x_0)\right) &\le \sum_{i=n+1}^{m} d\left(f^i(x_0), f^{i-1}(x_0)\right) \\ &\le \left(c^n + c^{n+1} + \dots + c^{m-n-1}\right) d\left(f(x_0), x_0\right) \\ &\le \frac{c^n}{1-c} d\left(f(x_0), x_0\right) \end{aligned}$$

بنابراین، $\left\{f^n(x_0)\right\}_{n=0}^{\infty}$ در واقع یک دنباله کوشی است. چون X کامل است، بنابراین داریم $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \bar{x}$ برای $\bar{x} \in X$. چون f پیوسته است، $\bar{x}$ یک نقطه ثابت از f است.

حال نشان می دهیم که $\bar{x}$ یک نقطه ثابت منحصر به فرد برای f است.

این کار را با نشان دادن این که $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \bar{x}$ برای هر $x \in X$ انجام می دهیم.

بنابراین برای $x \le x_0$ و $x \ge x_0$ واضح است زیرا در این موارد $f^n(x) \le f^n(x_0)$ یا $f^n(x) \ge f^n(x_0)$.

بنابر شرط (۱) در صورت قضیه داریم :

$$d\left(f^n(x), f^n(x_0)\right) \le c^n d(x, x_0)$$

با توجه به این که سمت راست نا مساوی به صفر میل می کند، اگر $n \to \infty$

بنابراین داریم :

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \bar{x}$$

در پایان داریم که فرض $x \in X$ دلخواه باشد و فرض x_2 و x_1 به صورت زیر می باشد :

$$x_1 \geq x \geq x_2 \quad , \quad x_1 \geq x_0 \geq x_2 \qquad (٣)$$

از رابطه (٣) داریم :

$$f^n(x_1) \geq f^n(x) \geq f^n(x_2) \quad \text{یا} \quad f^n(x_1) \leq f^n(x) \leq f^n(x_2) \qquad (٤)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_1) = \lim_{n\to\infty} f^n(x_2) = \bar{x} \qquad (٥)$$

با ترکیب (٤) و (٥) داریم : $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \bar{x}$.

هم اکنون اثبات کامل است.

۱-۲. تعاریف پایه ای و نتایج

در این بخش، ابتدا چند تعریف و قرار داد را ذکر می کنیم. در ادامه به تعاریف مخروط نرمال و منظم و ویژگی های مربوط به آن می پردازیم. همچنین، دربین توضیحات فضاهای متریک مخروطی و ویژگی مربوط به آن را بررسی می کنیم.

تعریف ۱-۲-۱. فضای برداری نرمدار X را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی $\{x_n\}_{n\in N}$ در X به یک عضو مانند x در فضای X همگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۲. فضای برداری نرمدار کامل $(X,\|.\|)$ را فضای باناخ گوییم.

قرارداد: 0_E را صفر برداری فضای باناخ E تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی و P یک زیر مجموعه غیر تهی از E باشد. P یک مخروط نامیده می شود اگر و فقط اگر:

۱) P بسته، غیر تهی و $P \neq \{0_E\}$،

۲) اگر $a, b\in R$ و $a, b \geq 0$ و $x, y\in P$ آنگاه $ax+by\in P$،

۳) اگر $x \in P$ و $-x \in P$ آنگاه $x = 0_E$ (یعنی $P\cap(-P) = \{0_E\}$).

مثال ۱-۲-٤. فرض کنید $E = R^2$ و $P=\{(x,y)\in E : x,y\geq 0\}\subset R^2$. در این صورت P یک مخروط است.

تعریف ۱-۲-۵. یک رابطه دو تایی $(\leq)$ روی یک مجموعه غیر تهی X را یک رابطه ترتیب جزیی نامیم. هرگاه انعکاسی، پادمتقارن و متعدی باشد. یعنی به ازای هر $x,y,z\in X$ سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) $x\leq x$،

۲) اگر $x\leq y$ و $y\leq x$ آنگاه $y=x$،

۳) اگر $x\leq y$ و $y\leq z$ آنگاه $x\leq z$.

هر مخروط $P\subseteq E$ یک رابطه جزئی روی E به صورت زیر القا می کند :

$x\leq y$ اگر و تنها اگر $y-x\in P$

برای هر $x,y\in E$.

قرارداد ۱-۲-٦. نماد $x<_E y$ وقتی $x\leq y$ و $x\neq y$ باشد برقرار خواهد بود. همچنین $x<<y$ برقرار است هرگاه $y-x\in \operatorname{int} \mathrm{P}$، که $\operatorname{int}P$ درون P تعریف می شود. اگر $\operatorname{int}P\neq\phi$ باشد، مخروط P صلب نامیده می شود.

تعریف ۱-۲-۷. فرض کنید P یک مخروط باشد. مخروط P را نرمال گوییم، اگر یک مقدار $K>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای همه $x,y\in P$ با $0_E\leq x\leq y$ داشته باشیم:.

$$\|x\|\leq K\|y\|.$$

کوچکترین عدد ثابت که در رابطه بالا صدق می کند را ثابت نرمال مخروط می گوییم.

تعریف ۱-۲-۸. فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی و $P\subset E$ یک مخروط باشد. مخروط P منظم نامیده می شود، اگر هر دنباله صعودی که از بالا کراندار است همگرا باشد.

یعنی اگر $\{x_n\}$ دنباله ای باشد به طوری که :

برای تعدادی $y\in E$ $\quad x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n\leq\ldots\leq y$

در این صورت $x\in E$ وجود دارد به طوری که : $\lim_{n\to+\infty}\|x_n-x\|=0$.

تذکر ۱-۲-۹. معادلاً مخروط P منظم نامیده می شود اگر و فقط اگر هر دنباله نزولی که از پایین کراندار است همگرا باشد.

تعریف ۱-۲-۱۰. فرض کنید (X,d) یک فضای متری مخروطی باشد، $A\subset X$ را از بالا کراندار گوئیم اگر وجود داشته باشد $c\in E$ با $c\rangle\rangle 0_E$ به طوری که برای هر $x,y\in A$، $d(x,y)\le c$. همچنین، A را کراندار گوئیم اگر $\delta(A)=\sup\{d(x,y):x,y\in A\}$ در E وجود داشته باشد. اگر سوپریمم وجود نداشته باشد گوئیم A بیکران است . همچنین ، A را کاملاً کراندار گوئیم اگر برای هر $c\in E$ با $c\rangle\rangle 0_E$، A را بتوان به صورت اجتماعی از مجموعه های N_i برای $i=1,2,3,...,n$ ، نوشت، که $\delta(A)\langle\langle c$.

تعریف ۱-۲-۱۱. فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی باشد، $P\subseteq E$ یک مخروط و X یک مجموعه غیر تهی باشد. نگاشت $d:X\times X\to E$ یک متریک مخروطی روی X است هرگاه:

۱)برای هر $x,y\in X$، $0_E\le d(x,y)$ و $d(x,y)=0_E$ اگر و تنها اگر $x=y$،

۲)برای هر $x,y\in X$، $d(x,y)=d(y,x)$،

۳)برای هر $x,y,z\in X$، $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$.

در این صورت (X,d) را یک فضای متریک مخروطی می نامند.

مثال ۱-۲-۱۲. فرض کنید $E=R^2$ و $P=\{(x,y)\in E\mid x,y\ge 0\}\subset R^2$ و $X=R$ و $d:X\times X\to E$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\forall (x,y)\ ,(x',y')\in X=R^2$$
$$d((x,y),(x',y'))=(|x-x'|+|y-y'|\ ,\alpha\ \max\{|x-x'|,|y-y'|\})$$

که در آن $\alpha\ge 0$ مقدار ثابت مثبت است. در این صورت (X,d) یک فضای متری مخروطی است.

زیرا :

۱) $d((x,y),(x',y'))=0$

$$\begin{cases} \Rightarrow \left(|x-x'|+|y-y'|,\alpha \max\{|x-x'|,|y-y'|\}\right)= \\ \begin{cases} |x-x'|+|y-y'|=0 \Rightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases} \\ \alpha \max\{|x-x'|,|y-y'|\}=0 \xrightarrow{\alpha>0,\alpha\neq 0} \begin{cases} |x-x'|=0 \\ |y-y'|=0 \end{cases} \Rightarrow x=x', y=y' \Rightarrow (x,y)=(x',y') \end{cases} \end{cases}$$

۲) $d\left((x,y),(x',y')\right)=\left(|x-x'|+|y-y'|,\alpha \max\{|x-x'|,|y-y'|\}\right)$

$=\left(|x'-x|+|y'-y|,\alpha \max\{|x'-x|,|y'-y|\}\right)$

$= d\left((x',y'),(x,y)\right)$

شرط (۲) برقرار است.

۳) $d\ ((x,y)\ ,(x',y'))=\left(|x-x'|+|y-y'|\ ,\alpha\ \max\{|x-x'|,|y-y'|\}\right)$

$= \left(|x-z+z-x'|+|y-w+w-y'|\ \ ,\alpha\ \max\{|x-z+z-x'|,|y-w+w-y'|\}\right)$

$\leq \left(|x-z|+|y-w|+|z-x'|+|w-y'|\ \ ,\alpha\ \max\{|x-z|+|z-x'|,|y-w|+|w-y'|\}\right)$

$= \left(|x-z|+|y-w|\ \ ,\alpha\ \max\{|x-z|+|y-w|\}\right)+\left(|z-x'|+|w-y'|,\max\{|z-x'|,|w-y'|\}\right)$

$= d\ ((x,y)\ ,(z,w))+d\ ((z,w)\ ,(x',y')).$

شرط (۳) نیز برقرار است. بنابراین، (X,d) یک فضای متریک مخروطی است.

مثال ۱-۲-۱۳. فرض کنید $E=R^n$ و $K=\{(x_1\ ,\ ...\ ,x_n)\in R^n \mid x_i\geq 0\}$ و $X=R$ و
به ازای هر $x,y\in X$، $d:X\times X\mapsto E$ ضابطه آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d(x,y)=\left(|x-y|\ ,\alpha_1|x-y|\ ,\alpha_2|x-y|\ ,\ ...\ ,\ \alpha_{n-1}|x-y|\right)$$

که در آن $\alpha_i > 0$ به ازای $1 \le i \le n-1$ یک مقدار ثابت است. در این صورت (X,d) یـک فضـای متریک مخروطی است.

بررسی شرایط:

شرط اول: برای هر $x, y \in X$، داریم: $d(x,y) \ge 0$

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0 \;\to\; \left(|\mathrm{x}-\mathrm{y}|\;,\alpha_1|x-y|\;,\alpha_2|x-y|\;,\;\ldots\;,\alpha_{n-1}|x-y|\right) = 0$$
$$\xrightarrow[\alpha_i \ne 0]{\alpha_i > 0} \;|x-y| = 0 \;\longrightarrow\; x = y$$

شرط دوم: برای هر $x, y \in X$، داریم:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left(|x-y|, \alpha_1|x-y|, \alpha_2|x-y|, \ldots, \alpha_{n-1}|x-y|\right) \\ &= \left(|y-x|, \alpha_1|y-x|, \alpha_2|y-x|, \ldots, \alpha_{n-1}|y-x|\right) = d(y,x) \\ &\Rightarrow d(x,y) = d(y,x). \end{aligned}$$

شرط سوم: برای هر $x, y, z \in X$، داریم :

$$\begin{aligned} d\;(x,y) &= \left(|x-y|\;,\;\alpha_1|x-y|\;,\alpha_2|x-y|\;,\;\ldots\;,\alpha_{n-1}|x-y|\right) \\ &= (|x-z+z-y|\;,\alpha_2\,|x-z+z-y|\;,\;\ldots\;,\alpha_{n-1}\,|x-z+z-y|) \\ &\le (|x-z|+|z-y|\;,\alpha_1\,|x-z|+|z-y|\;,\;\ldots\;,\alpha_{n-1}\,|x-z|+|z-y| \\ &= (|x-z|\;,\alpha_1\,|x-z|\;,\;\ldots\;,\alpha_{n-1}\,|x-z|) + (|z-y|\;,\alpha_2\,|z-y|\;,\;\ldots\;,\alpha_{n-1}\,|z-y|) \\ &= d\;(x,z) + d\;(z,y). \;\Longrightarrow\; d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

هر سه شرط برقرار است، در این صورت (X,d) یک فضای متریک مخروطی است.