دانشکده علوم پایه

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

زوج نقطه ثابت در فضاهای متریک به طور جزئی مرتب

نگارش:

مهدیه سادات خاتمی

استاد راهنما:

دکتر رحیم علیزاده

استاد مشاور:

دکتر محمد اکبری تنکابنی

آبان ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

ساحت مقدس حضرت ولی عصر(عج)

و تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

اکنون که به فضل خدا، نگارش این پایان‌نامه به پایان رسیده، بر خود لازم می‌دانم از زحمات و راهنمایی‌های ارزشمند و بی‌شائبه استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر رحیم علیزاده که با دلسوزی و دقت فراوان مرا در اتمام این پایان‌نامه یاری نمودند و نیز از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد اکبری تتکابنی که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را برعهده گرفتند، سپاسگزاری نمایم. همچنین از اساتید محترم، جناب آقای دکتر بهروز رئیسی و دکتر اسماعیل فیضی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از پدر و مادر عزیز، دلسوز و مهربانم که در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاورم بوده و آرامش روحی و آسایش فکری مرا فراهم نمودند تا در محیطی مطلوب مراتب تحصیلی و نیز این پایان‌نامه را به نحو احسن به اتمام برسانم، بسیار سپاسگزارم.

برای همه عزیزان آرامش الهی، لطف و بخشش الهی، عشق و هدایت الهی، سلامتی و تندرستی و دلی شاد آرزومندم.

چکیده

در این پایان‌نامه فضاهای مدولار و متریک مدولار را به عنوان تعمیمی از فضاهای متریک معرفی نموده و به بررسی وجود نقطه ثابت برای این نوع فضاها می‌پردازیم. سپس با معرفی ویژگی یکنوای مرکب، به بررسی و تعمیم قضایای زوج نقطه ثابت برای نگاشت‌های دارای این ویژگی در فضاهای متریک به طور جزئی مرتب پرداخته و وجود و یکتایی جواب یک معادله دیفرانسیل و انتگرال با مقدار مرزی متناوب و نیز وجود و یکتایی جواب یک معادله انتگرال را به عنوان کاربردهایی از این قضایا بیان خواهیم نمود. همچنین وجود زوج نقطه ثابت را برای نگاشت‌های دارای ویژگی یکنوای مرکب در فضاهای متریک مدولار به طور جزئی مرتب مورد بررسی قرار خواهیم داد.

کلیدواژه: فضاهای متریک مدولار، زوج نقطه ثابت، ویژگی یکنوای مرکب، مسئله با مقدار مرزی متناوب، معادله انتگرال.

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه معادلات دیفرانسیل و انتگرال از جمله علوم کاربردی است که نقش مهمی را در فیزیک، شیمی، صنعت، زیست شناسی و اقتصاد ایفا می‌کند. بررسی وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل و انتگرال که اغلب از مدل کردن مسائل به شکل معادلات ریاضی بدست آمده‌اند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. در بسیاری موارد وجود و یکتایی جواب یک معادله دیفرانسیل و انتگرال با وجود و یکتایی نقطه ثابت برای یک تابع مشخص معادل می‌باشد. از این رو قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک دارای جایگاه ویژه‌ای در ریاضیات می‌باشند. حال در صورتی که بخواهیم جواب یک دستگاه شامل دو معادله دیفرانسیل با دو تابع مجهول را بدست آوریم، در بسیاری موارد وجود و یکتایی زوج نقطه ثابت برای یک تابع مشخص، وجود و یکتایی جواب این دستگاه را تضمین خواهد کرد. برای این کار نیاز به قضایای زوج نقطه ثابت در فضاهای متریک به طور جزئی مرتب داریم. بسیاری از این قضایا در مورد نگاشت‌های دارای ویژگی یکنوای مرکب مطرح می‌گردند. در سال‌های اخیر افرادی چون نیتو[۱] و لوپز[۲] [۱۲]، ران[۳] و ریورینگز[۴][۱۴] و آگاروال[۵]، ال جبلی[۶] و اریگان[۷][۱] قضایای نقطه ثابت را برای نگاشت‌های انقباضی در فضاهای متریک به طور جزئی مرتب مورد بررسی قرار داده‌اند.

از طرف دیگر فضاهای متریک مدولار به عنوان تعمیم مهمی از فضاهای متریک به شمار می‌آیند. ایده اصلی شکل‌گیری این فضاها از روی فضاهای مدولار بود که اولین بار توسط ناکانو[۸][۱۳] مطرح و بعدها توسط لوکسیم‌بورگ[۹]، موزیلاک[۱۰]، اورلیچ[۱۱]، ماژور[۱۲] و تیورپین[۱۳] تعمیم داده شد([۶]، [۸]، [۹]، [۱۰] و [۱۵]).

در سال ۲۰۰۸ چیستیاکوف[۱۴] [۲، ۳] با ارائه یک مدولار روی یک مجموعه دلخواه مفهوم فضاهای متریک مدولار را تعریف نمود.

---

[۱] Nieto
[۲] Lopez
[۳] Ran
[۴] Reurings
[۵] Agarwal
[۶] El-Gebeily
[۷] O'Regan
[۸] Nakano
[۹] Luxemburg
[۱۰] Musielak
[۱۱] Orlicz
[۱۲] Mazur
[۱۳] Turpin
[۱۴] Chistyakov

در راستای مطالب گفته شده، این پایان‌نامه در چهار فصل به صورت زیر تدوین گردیده است.

فصل اول به معرفی فضای مدولار و متریک مدولار و بررسی وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی در این فضاها اختصاص یافته است. مطالب این فصل از [۳، ۷] اقتباس گردیده است.

در فصل دوم ویژگی یکنوای مرکب و زوج نقطه ثابت معرفی شده و چند قضیه وجود و یکتایی زوج نقطه ثابت برای نگاشت‌های دارای ویژگی یکنوای مرکب در فضاهای متریک به طور جزئی مرتب مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین وجود و یکتایی جواب یک مسئله با مقدار مرزی متناوب به عنوان کاربردی از این قضایا بیان خواهد شد. مطالب این فصل از [۴] استخراج شده است.

فصل سوم به تعمیم برخی از قضایای مطرح شده در فصل دوم می‌پردازد. همانند فصل قبل، در این فصل نیز وجود و یکتایی جواب یک معادله انتگرال به عنوان کاربردی از این قضایا بیان خواهد شد. مطالب این فصل برگرفته از [۵] می‌باشد.

در فصل پایانی به بررسی وجود زوج نقطه ثابت برای نگاشت‌های دارای ویژگی یکنوای مرکب در فضاهای متریک مدولار به طور جزئی مرتب خواهیم پرداخت. مطالب این فصل توسط نگارنده بیان و اثبات شده‌اند.

فصل ۱

نقطه ثابت در فضای متریک مدولار

در این فصل به ارائه تعاریف، مفاهیم مقدماتی، معرفی فضای مدولار و متریک مدولار می‌پردازیم. سپس وجود نقطه ثابت را برای نگاشت‌های انقباضی در فضای متریک مدولار بررسی می‌نماییم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پایه در فضای مدولار

اولین گام برای تعمیم فضاهای تابعی L^p در اوایل ۱۹۳۰ بوسیله اورلیچ[۱]و بیرن بائوم[۲] صورت گرفت. آن‌ها به جای حالت خاص $\varphi(x) = x^p$ فضای تابعی تعریف شده به فرم زیر را در نظر گرفتند که بعدها به فضای اورلیچ معروف شد:

$$L^\varphi = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \exists\lambda > ۰ : \int \varphi(\lambda|f(x)|)dm < \infty\}.$$

در اینجا m اندازه لبگ، $\varphi : \mathbb{R} \to [۰, \infty)$ تابعی غیرنزولی و پیوسته است که $u = ۰$ اگر و تنها اگر $\varphi(u) = ۰$ و هنگامی که $t \to \infty$، $\varphi(t) \to \infty$. تابع $\varphi(t) = ln(۱ + t)$ مثالی از این نمونه توابع است. کاربردهای بیشمار این فضاها در معادلات دیفرانسیل و انتگرال از جمله دلایل گسترش نظریه فضاهای اورلیچ بود. یکی از ساختارهایی که از نظریه فضاهای اورلیچ الهام گرفته، نظریه فضاهای مدولار توسط ناکانو[۳](۱۹۵۰) است. یک تابع مدولار روی این فضا با شرایط گفته شده در بالا به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\rho_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(|f(t)|)dm(t).$$

بعدها لوکسیم بورگ[۴]و اورلیچ[۵](۱۹۵۹) فضاهای مدولار را به شکل کلی‌تر زیر تعریف نمودند.

در طول این بخش X یک فضای برداری حقیقی دلخواه فرض شده است.

تعریف ۱.۱.۱. تابعک $\rho : X \to [۰, \infty]$ مدولار نامیده می شود، اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

۱) $\rho(x) = ۰$ اگروتنهااگر $x = ۰$؛

---

[۱] Orlicz
[۲] Birnbaum
[۳] Nakano
[۴] Luxemburg
[۵] Orlicz

۲) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ که $|\alpha| = ۱$، آنگاه $\rho(\alpha x) = \rho(x)$؛

۳) برای هر $\alpha, \beta \geq ۰$ که $\alpha + \beta = ۱$ نامساوی $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ برقرار باشد. هرگاه به جای شرط (۳) شرط زیر برقرار باشد، آنگاه ρ، s ـمدولار محدب نامیده می‌شود.

۴) برای هر $\alpha, \beta \geq ۰$ و $s \in (۰, ۱)$ که $\alpha^s + \beta^s = ۱$ داشته باشیم:

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s \rho(x) + \beta^s \rho(y).$$

در صورتی‌که $s = ۱$ باشد، ρ مدولار محدب نامیده می‌شود.

فرض کنیم ρ یک تابع مدولار باشد. X_ρ را فضای مدولار وابسته به ρ می‌نامیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_\rho = \{x \in X \quad : \quad lim_{\lambda \to ۰} \rho(\lambda x) = ۰\}.$$

همچنین اگر ρ مدولار محدب باشد، آنگاه فضای مدولار آن به صورت زیر خواهد بود:

$$X_\rho^* = \{x \in X \quad : \quad \exists \lambda > ۰ \quad \rho(\lambda x) < \infty\}.$$

بنابراین با توجه به تعریف فوق اگر ρ مدولار باشد، خواص زیر برقرار است:

۱) برای هر $x, y \in X_\rho$، $\rho(x + y) \leq \rho(۲x) + \rho(۲y)$.

۲) برای هر $x \in X_\rho$ و $\alpha \leq \beta \in \mathbb{R}$، $\rho(\alpha x) \leq \rho(\beta x)$.

۳) اگر ρ مدولار محدب و $\alpha \leq ۱$، آنگاه برای هر $x \in X_\rho$، $\rho(\alpha x) \leq \alpha \rho(x)$.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق، تابع زیر صعودی است.

$$\rho_x : [۰, \infty) \longrightarrow [۰, \infty]$$

$$\alpha \longmapsto \rho(\alpha x).$$

همان‌طور که دیده می‌شود، مدولار ρ در خاصیت زیرجمعی صدق نمی‌کند. بنابراین رفتاری مانند نرم یا فاصله ندارد. اما می‌توان از هر مدولار، یک F ـنرم را که تعریف آن در زیر آمده استخراج نمود.

تعریف ۲.۱.۱. تابعک $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$، $F-$ نرم نامیده می‌شود، اگر

i) برای هر $x \in X$، $\|x\| = 0$ اگروتنهااگر $x = 0$.

ii) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ که $|\alpha| = 1$ تساوی $\|x\| = \|\alpha x\|$ برقرار باشد.

iii) نامساوی $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$، برای هر $x, y \in X$ برقرار باشد.

iv) برای هر دنباله $\{x_n\} \in X$ و هر دنباله $\{\alpha_n\} \in \mathbb{R}$، اگر $\alpha_n \to \alpha$ و $\|x_n - x\| \to 0$ آنگاه $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \to 0$.

فرض کنیم $\|\cdot\|$ یک $F-$ نرم روی X باشد و $d(x, y) = \|x - y\|$. در صورت کامل بودن d، فضای خطی متریک (X, d)، $F-$ فضا نامیده می‌شود.

مثال ۳.۱.۱. در فضای مدولار X_ρ تابعک زیر یک $F-$ نرم است:

$$\|\cdot\|_\rho = inf\{\alpha > 0 \quad : \quad \rho(\tfrac{\cdot}{\alpha}) \leq \alpha\}.$$

زیرا

i) اگر $x = 0$ به وضوح $\|x\|_\rho = 0$. برعکس اگر $\|x\|_\rho = 0$ آنگاه

$$\|x\|_\rho = inf\{\lambda > 0 : \rho(\tfrac{x}{\lambda}) \leq \lambda\} = 0,$$

در نتیجه دنبــاله $\{\lambda_n\} < 1$ همگرابه صفر موجود است که $\rho(\frac{x}{\lambda_n}) \leq \lambda_n$. با گرفتن حد از طرفین این نامساوی خواهیم داشت

$$0 \leq \rho(x) = lim_{n\to\infty}\rho(\lambda_n \tfrac{x}{\lambda_n}) \leq lim_{n\to\infty}\rho(\tfrac{x}{\lambda_n}) \leq lim_{n\to\infty}\lambda_n$$

در نتیجه $x = 0$.

ii) با توجه به این که برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ که $|\alpha| = 1$،

$$\|\alpha x\|_\rho = inf\{\lambda > 0 \quad : \quad \rho(\frac{\alpha x}{\lambda}) = \rho(\frac{x}{\lambda}) \leq \lambda\},$$

داریم $\|\alpha x\|_\rho = \|x\|_\rho$.

iii) طبق خاصیت سوم مدولار برای $\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \geq 0$، $\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \geq 0$، $x = \frac{x}{\lambda_1}$ و $y = \frac{y}{\lambda_2}$ داریم

$$\rho(\frac{x}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{y}{\lambda_1+\lambda_2}) = \rho(\alpha\frac{x}{\lambda_1} + \beta\frac{y}{\lambda_2}) \leq \rho(\frac{x}{\lambda_1}) + \rho(\frac{y}{\lambda_2}).$$

حال اگر نسبت به λ_1 و λ_2 اینفیمم بگیریم، خواهیم داشت

$$\|x+y\|_\rho \leq \|x\|_\rho + \|y\|_\rho.$$

iv) برای هر دنباله $\{x_n\} \in X_\rho$ و هر دنباله $\{\alpha_n\} \in \mathbb{R}$، اگر $\alpha_n \to \alpha$ و $\|x_n - x\|_\rho \to 0$ نشان می‌دهیم $\|\alpha_n x_n - \alpha x\|_\rho \to 0$. با قراردادن $a_n = \alpha_n - \alpha$ و $y_n = x_n - x$ داریم $a_n \to 0$ و $\|y_n\|_\rho \to 0$. با در نظر گرفتن $\varepsilon > 0$ وقتی $n \to \infty$ خواهیم داشت $\rho(a_n\frac{x}{\varepsilon}) \to 0$. بنابراین برای n به قدر کافی بزرگ داریم $\rho(\frac{a_n x}{\varepsilon}) \leq \varepsilon$ و در نتیجه $\|a_n x\|_\rho \to 0$. $N > 0$ را چنان در نظر می‌گیریم که برای هر n و $|\alpha| \leq N$ ، $|\alpha_n| \leq N$. در نتیجه وقتی n به بینهایت میل کند داریم:

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\|_\rho \leq \|\alpha_n(x_n - x)\|_\rho + \|(\alpha_n - \alpha)x\|_\rho \leq \|Ny_n\|_\rho + \|a_n x\|_\rho \leq N\|y_n\|_\rho + \|a_n x\|_\rho \to 0.$$

هنگامی که ρ مدولار محدب روی X_ρ باشد، آنگاه تابعک زیر یک نرم است که نرم لوکسیم بورگ[1] نامیده می‌شود.

$$\|\cdot\|_\rho = inf\{\alpha > 0 \quad : \quad \rho(\frac{\cdot}{\alpha}) \leq 1\}.$$

زیرا

i) اگر $x = 0$ به وضوح $\|x\| = 0$. برعکس اگر $\|x\|_\rho = 0$ باشد، آنگاه

[1] Luxemburg norm

$$inf\{\alpha > 0 \quad : \quad \rho(\frac{x}{\alpha}) \leq 1\} = 0.$$

در نتیجه دنباله $\{\lambda_n\}$ که $0 < \lambda < 1$، همگرا به صفر موجود است که $\rho(\frac{x}{\lambda_n}) \leq 1$. اما $\rho(\frac{x}{\lambda_n}) \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n}$ و از آنجا که ρ مدولار محدب است، داریم $\rho(\lambda_n \frac{x}{\lambda_n}) \leq \lambda_n \rho(\frac{x}{\lambda_n}) \leq \lambda_n$. با گرفتن حد از طرفین این نامساوی خواهیم داشت:

$$0 \leq \rho(x) \leq lim_{n\to\infty}\lambda_n.$$

در نتیجه $x = 0$.

$(ii$

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_\rho &= inf\{\lambda > 0 \quad : \quad \rho(\frac{\alpha x}{\lambda}) \leq 1\} \\
&= inf\{\lambda > 0 \quad : \quad \rho(\frac{\mid \alpha \mid x}{\lambda}) \leq 1\} \\
&= inf\{\frac{|\alpha|}{s} \quad : \quad \rho(sx) \leq 1\} \\
&= \mid \alpha \mid inf\{s \quad : \quad \rho(\frac{x}{s}) \leq 1\} \\
&= \mid \alpha \mid \|x\|_\rho.
\end{aligned}$$

$(iii$ برای $\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \geq 0$، $\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \geq 0$، $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ وجود دارد که $\|x\|_\rho + \varepsilon > \rho(\frac{x}{\lambda_1})$ و $\|y\|_\rho + \varepsilon > \rho(\frac{y}{\lambda_2})$ داریم

$$\rho(\tfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}x + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}y) \leq \tfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\rho(x) + \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\rho(y).$$

اگر به جای x، $\frac{x}{\lambda_1}$ و به جای y، $\frac{y}{\lambda_2}$ قرار دهیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\rho &\leq \rho(\frac{x}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{y}{\lambda_1+\lambda_2}) \\
&\leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\rho(\frac{x}{\lambda_1}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\rho(\frac{y}{\lambda_2})
\end{aligned}$$

$$< \frac{\lambda_۱}{\lambda_۱+\lambda_۲}(\|x\|_\rho+\varepsilon)+\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱+\lambda_۲}(\|y\|_\rho+\varepsilon) < \|x\|_\rho+\|y\|_\rho+۲\varepsilon.$$

با توجه به اینکه مقدار ε دلخواه است، پس نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم پایه در فضای متریک مدولار

در این بخش به معرفی فضای متریک مدولار بعنوان تعمیمی از فضای متریک پرداخته و سپس ارتباط میان مدولار و متریک مدولار را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این بخش را با تعاریف مقدماتی در مورد فضای متریک مدولار آغاز می‌کنیم.

لازم به ذکر است که برای هر $\lambda > ۰$ و $x, y \in X$، $w(\lambda, x, y)$ را می‌توان به صورت $w_\lambda(x, y)$ نوشت.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X مجموعه ناتهی باشد. تابع $w : (۰,\infty)\times X\times X \to [۰,\infty]$ برای $\lambda \in (۰,\infty)$ روی X مدولار متریک نامیده می‌شود، اگر برای هر $x, y, z \in X$ شرایط زیر برقرار باشد:

(i) برای هر $\lambda > ۰$، $w_\lambda(x, y) = ۰$ اگروتنهااگر $x = y$؛

(ii) برای هر $\lambda > ۰$، $w_\lambda(x, y) = w_\lambda(y, x)$؛

(iii) نامساوی $w_{\lambda+\mu}(x, y) \leq w_\lambda(x, z) + w_\mu(y, z)$ برای هر $\lambda, \mu > ۰$ برقرار باشد.

اگر به‌جای (i) شرط زیر برقرار باشد، w روی X شبه (متریک) مدولار نامیده می‌شود.

$(i'$ برای هر $\lambda > ۰$، $w_\lambda(x, x) = ۰$.

توجه کنید که برای $\lambda > ۰$ و $x, y \in X$ نامنفی بودن $w_\lambda(x, y)$ از شرایط (i')، (ii) و (iii) نتیجه می‌شود. زیرا اگر $x = y$ و $\mu = \lambda > ۰$، آنگاه $۰ = w_{۲\lambda}(x, x) \leq w_\lambda(x, y) + w_\lambda(y, x) = ۲w_\lambda(x, y)$ و به عبارت دیگر برای هر $x, y \in X$، $w_\lambda(x, y) \geq ۰$.

اگر $w_\lambda(x, y)$ به $x, y \in X$ بستگی نداشته باشد، آنگاه با توجه به (i')، $w \equiv ۰$ واگر $w_\lambda(x, y)$ بـه $\lambda > ۰$

بستگی نداشته و مقدار آن متناهی باشد، آنگاه $w = w_\lambda$ یک متر روی X خواهد بود.

از مهم‌ترین خواص مدولار w روی مجموعه X این است که برای $x, y \in X$، تابع $\lambda \mapsto w_\lambda(x,y)$ روی $(0,\infty)$ غیرصعودی است. در واقع اگر $0 < \mu < \lambda$، آنگاه

$$w_\lambda(x,y) \leq w_{\lambda-\mu}(x,x) + w_\mu(y,x) = w_\mu(y,x) = w_\mu(x,y).$$

حال مثال‌هایی از مدولار متریک‌ها را روی X ارائه می‌کنیم.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید $x, y \in X$، $\lambda > 0$ و

$$w^a_\lambda(x,y) = \begin{cases} \infty & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

اگر (X,d) یک فضای متریک و $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ تابع غیرنزولی باشد، آنگاه

$$w^b_\lambda(x,y) = d(x,y)/\varphi(\lambda),$$

$$w^c_\lambda(x,y) = \begin{cases} \infty & \lambda \leq d(x,y), \\ 0 & \lambda > d(x,y), \end{cases} \quad \text{و همچنین} \quad w^d_\lambda(x,y) = \begin{cases} \infty & \lambda < d(x,y), \\ 0 & \lambda \geq d(x,y), \end{cases}$$

مثال‌هایی از مدولار متریک‌ها می‌باشند.

برای هر $x, y \in X$ حد راست و چپ به‌صورت زیر روی $[0,\infty]$ تعریف می‌شود.
برای مدولار w روی X و $x, y \in X$ قرار می‌دهیم

$$w_{\lambda^+}(x,y) := lim_{\epsilon \to 0^+} w_{\lambda+\epsilon}(x,y),$$

$$w_{\lambda^-}(x,y) := lim_{\epsilon \to 0^-} w_{\lambda-\epsilon}(x,y).$$

به وضوح نامساوی‌های زیر برقرار می‌باشند:

$$w_{\lambda^+}(x,y) \leq w_\lambda(x,y) \leq w_{\lambda^-}(x,y).$$

اگر w یک مدولار روی مجموعه X باشد، گوییم برای $x, y \in X$، $x \sim y$، اگر $lim_{\lambda\to\infty} w_\lambda(x,y) = \circ$.
رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی است. برای عنصر دلخواه $x_\circ \in X$،

$$X_w = X_w^\circ(x_\circ) = \{x \in X \quad : \quad x \sim x_\circ\}$$

یک مجموعه مدولار نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۲.۱. اگر w یک مدولار متریک روی X باشد، آنگاه تابع زیر یک متر روی X_w است.

$$d_w^\circ(x,y) = inf\{\lambda > \circ \ : \ w_\lambda(x,y) \leq \lambda\}, \qquad x,y \in X_w.$$

اثبات. فرض کنید $x, y \in X_w$ باشد. از آنجا که $x \sim y$، $\lambda_\circ > \circ$ وجود دارد که برای هر $\lambda \geq \lambda_\circ$، $w_\lambda(x,y) \leq ۱$. با قراردادن $\lambda_۱ = max\{۱, \lambda_\circ\}$ داریم $w_{\lambda_۱}(x,y) \leq ۱ \leq \lambda_۱$ که با توجه به تعریف $d_w^\circ(x,y)$، نامساوی $d_w^\circ(x,y) \leq \lambda_۱ < \infty$ نتیجه می‌شود. به وضوح با توجه به (i') تساوی $d_w^\circ(x,x) = \circ$ برقرار است. در ضمن اگر $d_w^\circ(x,y) = \circ$، آنگاه برای $\lambda > \circ$ دلخواه، $\mu > \circ$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\circ < \mu < \lambda$، و در نتیجه $w_\lambda(x,y) \leq w_\mu(x,y) \leq \mu$. حال با میل دادن μ به صفر، به تساوی $w_\lambda(x,y) = \circ$ و در نتیجه به تساوی $x = y$ می‌رسیم.
همچنین با توجه به خاصیت (ii) از تعریف مدولار متریک، تساوی $d_w^\circ(x,y) = d_w^\circ(y,x)$ برقرار است.
در آخر نشان می‌دهیم برای هر x, y, z در X_w نامساوی $d_w^\circ(x,y) \leq d_w^\circ(x,z) + d_w^\circ(y,z)$ برقرار است.
از آنجا که برای هر $\lambda > d_w^\circ(x,z)$ و $\mu > d_w^\circ(y,z)$ داریم $w_\lambda(x,z) \leq \lambda$ و $w_\mu(y,z) \leq \mu$. بنابراین

$$w_{\lambda+\mu}(x,y) \leq w_\lambda(x,z) + w_\mu(y,z) \leq \lambda + \mu.$$

پس $d_w^\circ(x,y) \leq \lambda + \mu$ و وقتی $\lambda \to d_w^\circ(x,z)$ و $\mu \to d_w^\circ(y,z)$ نتیجه مطلوب حاصل می‌گردد. □

حال برای مدولار متریک‌های $w = w^a, w^b, w^c, w^d$، X_w و d_w° را بدست می‌آوریم.

مثال ۴.۲.۱. برای $w = w^a$ داریم $X_w = \{x_\circ\}$ و $d_w^\circ(x,y) = \circ$. برای $w_\lambda^b(x,y) = d(x,y)/\varphi(\lambda)$، اگر تابع φ از بالا کراندار باشد، آنگاه $X_w = \{x_\circ\}$ و $d_w^\circ(x,y) = \circ$. در غیر این صورت $X_w = X$ و $d_w^\circ(x,y) = \psi^{-۱}(d(x,y))$ که ψ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi(\lambda)=\lambda\varphi(\lambda), \quad \lambda>0.$$

به وضوح ψ یک تابع اکیداً صعودی است که $lim_{\lambda\to 0^+}\psi(\lambda)=0$ و $lim_{\lambda\to\infty}\psi(\lambda)=\infty$. همچنین اگر $\varphi(\lambda)=\lambda^p$ (p ثابت و مثبت) آنگاه $d_w^0(x,y)=(d(x,y))^{1/(p+1)}$. برای w^c و w^d، $X_w=X$ و $d_w^0(x,y)=d(x,y)$ خواهد بود.

در قضیه زیر متر دیگری را روی X_w قرار داده و به بررسی رابطه آن با متر d_w^0 خواهیم پرداخت.

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید w روی مجموعه X مدولار باشد. برای $x,y\in X_w$ قرار می‌دهیم:

$$d_w^1(x,y)=inf\{(\lambda+w_\lambda(x,y)) \quad : \quad \lambda>0\},$$

آنگاه d_w^1 روی X_w یک متر است و

$$d_w^0\leq d_w^1\leq 2d_w^0. \tag{1.1}$$

اثبات. برای هر $x,y\in X_w$، عدد حقیقی $\lambda>0$ موجود است که نامساوی $w_\lambda(x,y)<\infty$ برقرار باشد. در نتیجه مجموعه $\{\lambda+w_\lambda(x,y) \quad : \quad \lambda>0\}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^+$ است که ناتهی و از پایین کراندار است. لذا $0\leq d_w^1(x,y)<\infty$. حال اگر $x\in X_w$، آنگاه با استفاده از (i') تعریف مدولار متریک، برای هر $\lambda>0$، $\lambda+w_\lambda(x,x)=\lambda$ و در نتیجه $d_w^1(x,x)=0$. حال فرض می‌کنیم w در شرط (i) از تعریف مدولار متریک صدق کرده، $x,y\in X_w$ و $d_w^1(x,y)=0$. برای اینکه ثابت کنیم $x=y$، کافی است نشان دهیم برای هر $\lambda>0$، $w_\lambda(x,y)=0$. به برهان خلف فرض می‌کنیم برای $\lambda_0>0$، $w_{\lambda_0}(x,y)>0$. پس برای $\lambda\geq\lambda_0$، $\lambda+w_\lambda(x,y)\geq\lambda_0$. اگر $0<\lambda<\lambda_0$، آنگاه

$$0<w_{\lambda_0}(x,y)\leq w_\lambda(x,y)\leq\lambda+w_\lambda(x,y).$$

بنابراین برای هر $\lambda>0$، $\lambda+w_\lambda(x,y)\geq\lambda_1=min\{\lambda_0,w_{\lambda_0}(x,y)\}$. با گرفتن اینفیمم روی λ خواهیم داشت $d_w^1(x,y)\geq\lambda_1>0$ که یک تناقض است. پس تساوی $x=y$ برقرار است. همچنین تساوی

$d_w^1(x,y) = d_w^1(y,x)$ از شرط (ii) از تعریف مدولار متریک نتیجه می‌شود.

حال نشان می‌دهیم $d_w^1(x,y) \leq d_w^1(x,z) + d_w^1(y,z)$. با استفاده از تعریف d_w^1 برای هر $\varepsilon > 0$، $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ و $\mu = \mu(\varepsilon) > 0$ موجود است که

$$\lambda + w_\lambda(x,z) \leq d_w^1(x,z) + \varepsilon, \quad \mu + w_\mu(y,z) \leq d_w^1(y,z) + \varepsilon.$$

بنا به (iii) از تعریف مدولار متریک داریم

$$\begin{aligned} d_w^1(x,y) &\leq (\lambda+\mu) + w_{\lambda+\mu}(x,y) \leq \lambda + \mu + w_\lambda(x,z) + w_\mu(y,z) \\ &\leq d_w^1(x,z) + \varepsilon + d_w^1(y,z) + \varepsilon. \end{aligned}$$

با توجه به دلخواه بودن $\varepsilon > 0$، نامساوی مطلوب برقرار خواهد بود.

حال نشان می‌دهیم نامساوی‌های (۱ ۰ ۱) برقرارند. برای این‌که ثابت کنیم $d_w^0 \leq d_w^1$، فرض می‌کنیم $\lambda > 0$ دلخواه باشد. اگر $\lambda \leq w_\lambda(x,y)$، آنگاه طبق تعریف d_w^0 نتیجه می‌شود $d_w^0(x,y) \leq \lambda$. اما اگر $\lambda > w_\lambda(x,y)$، آنگاه $d_w^0(x,y) \leq w_\lambda(x,y)$. با قراردادن $\mu = w_\lambda(x,y)$ داریم $\mu < \lambda$ و بنابراین $\mu = w_\lambda(x,y) \leq w_\mu(x,y)$ که از آن‌جا تساوی $d_w^0(x,y) \leq \mu = w_\lambda(x,y)$ نتیجه می‌گردد. بنابراین برای هر $\lambda > 0$، $d_w^0(x,y) \leq max\{\lambda, w_\lambda(x,y)\} \leq \lambda + w_\lambda(x,y)$. با گرفتن اینفیمم از طرفین برای هر $\lambda > 0$ داریم $d_w^0(x,y) \leq d_w^1(x,y)$.

حال نشان می‌دهیم $d_w^1 \leq 2d_w^0$. برای این کار $\lambda > 0$ را طوری اختیار می‌کنیم که $d_w^0(x,y) < \lambda$. با استفاده از تعریف d_w^0، $w_\lambda(x,y) \leq \lambda$ و بنابراین $d_w^1(x,y) \leq \lambda + w_\lambda(x,y) \leq 2\lambda$. حال اگر $\lambda \to d_w^0(x,y)$ خواهیم داشت $d_w^1(x,y) \leq 2d_w^0(x,y)$. □

برای درک بهتر موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۶.۲.۱. با در نظر گرفتن $\varphi(\lambda) = \lambda^p$ برای $p > 0$ در مدولار $w = w^b$، از آنجا که تابع $f(\lambda) = \lambda + (d(x,y)/\lambda^p)$ مینیمم خود را در $\lambda_0 = (pd(x,y))^{1/(p+1)}$ اختیار می‌کند، داریم