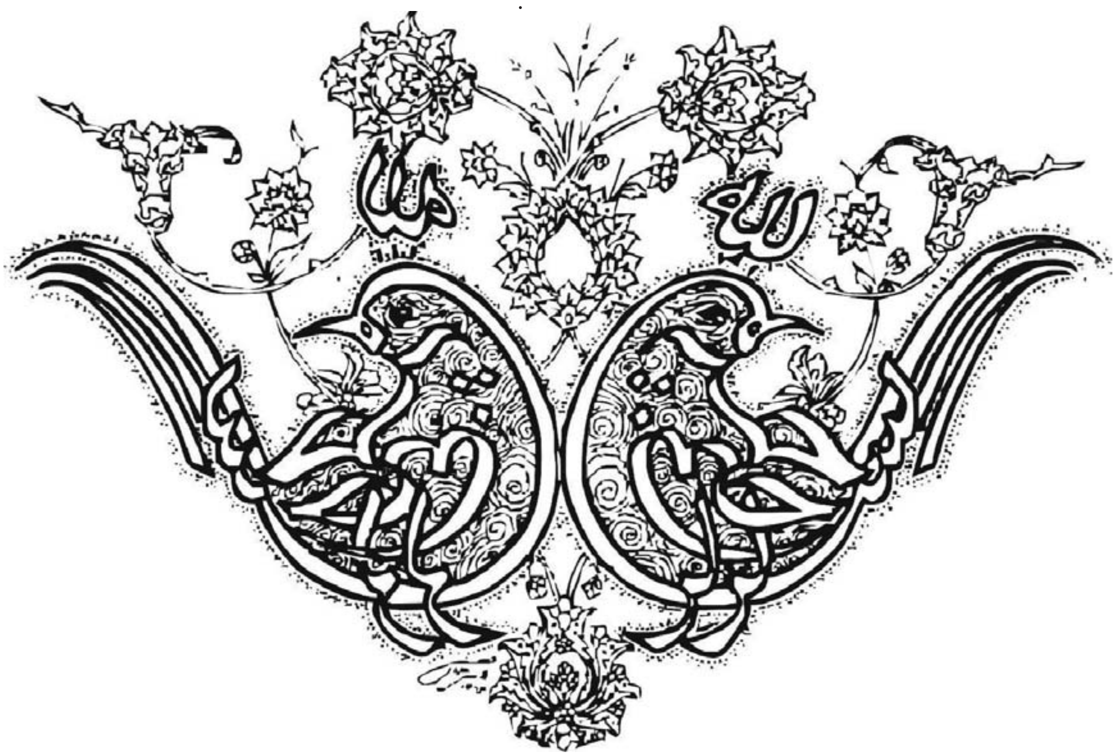

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی مالی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی مالی

مطالعه روشی عددی برای حل مسائل کنترل بهینه تصادفی و کاربرد آن در انتخاب سبد سهام

استاد راهنما:

دکتر علی دلاورخلفی

استاد مشاور:

دکتر سید محمدمهدی حسینی

دکتر داریوش فرید

پژوهش‌گر:

مسعود صفارزاده

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چراکه این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده‌اند، دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پراز فراز و نشیب آموختند، آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان...

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگان،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

سپاس گزاری

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

بر خود لازم می دانم از کلیه کسانی که بنده را در تدوین و نگارش این پایان نامه یاری نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. نمی توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را در وصف استادان خویش آشکار نمایم، که هر چه گویم و سرایم، کم گفته ام.

بسی شایسته است از استاد فرهیخته جناب آقای دکتر علی دلاور خلفی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کارساز و سازنده بارور ساختند و همچنین از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی و جناب آقای دکتر داریوش فرید که وقت خود را بی شائبه در اختیار من گذاشتند و با دقت نظر خاص مشاوره لازم در این خصوص ارائه نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

از اساتید فرزانه و دلسوز، جناب آقای دکتر قاسم بریدلقمانی (داور داخلی) و جناب آقای دکتر رسول روزگار (داور خارجی) که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

و با سپاس بی دریغ خدمت دوستان گران مایه ام، آقای دکتر محمد حیدری و خانم زهرا نیکوئی نژاد یزدی که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری داده اند.

جای دارد که از سرکار خانم عابدینی و عباسی زاده، بزرگواران دانشکده ریاضی، که همواره با محبت هایشان بنده را شرمنده کرده اند تشکر و قدردانی کنم.

و در نهایت بر خود واجب می دانم که از پدر، مادر، برادر و خواهرم که همواره با صبر و شکیبایی، کاستی ها و کج خلقی های بنده را تحمل کرده اند و با سعه صدر من را همراهی کردند کمال تشکر و سپاس را بجای آورم.

مسعود صفارزاده

شهریورماه ۱۳۹۲

چکیده

هدف از این پایان نامه مطالعه روشی عددی برای حل مسئله انتخاب سبدسهام بهینه با محدودیت‌های کراندار می‌باشد که ماکزیمم امیدریاضی تابع مطلوبیت را نتیجه دهد. ایده اصلی این روش تقریب با استفاده از زنجیرهای مارکوف می‌باشد. در روش تقریب با زنجیر مارکوف، فرآیند کنترل شده اصلی با یک زنجیر مارکوف کنترل شده مناسب روی فضای حالت متناهی تقریب زده می‌شود، که احتمالات انتقال این زنجیر مارکوف با استفاده از اصل برنامه‌ریزی پویا و معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن متناظر با آن بدست می‌آید. در ادامه پس از بیان تعاریف و مفاهیم لازم و معرفی مسئله انتخاب بهینه پرتفوی به حل آن با استفاده از زنجیرهای مارکوف تقریبی می‌پردازیم و سپس نتایج مربوط به شبیه‌سازی روش معرفی شده را ارائه می‌کنیم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

۱.۱ $\sigma-$جبرها و مجموعه‌های اطلاعاتی

آزمایش پرتاب یک سکه دو بار پشت سر هم را در نظر بگیرید. در این صورت مجموعه توانی از همه پیشامدهای ممکن از آزمایش پرتاب سکه به صورت دوبار متوالی فضای نمونه $\{HH, HT, TH, TT\}$ تشکیل می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$2^{\Omega} = \{\emptyset, \{HH\}, \{HT\}, \{TH\}, \{TT\}, \{HH, HT\}, ..., \{HT, TH, TT\}, \Omega\}. \quad (1\text{-}1)$$

در حالت کلی کاردینال مجموعه توانی $2^{|\Omega|}$ بسیار بزرگ می‌باشد و نوشتن همه عناصر از مجموعه توانی در عمل غیرممکن خواهد بود. این مطلبی است که ما را به شناخت زیر مجموعه‌هایی از مجموعه توانی با ساختاری معین علاقمند می‌سازد.

تعریف ۱.۱.۱ فضای نمونه‌ی Ω را درنظر بگیرید. کلاس $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های Ω، یعنی $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ یک $\sigma-$جبر است اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\Omega \in \mathcal{F}$.

۲. اگر $A \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $A^c \in \mathcal{F}$.

۳. اگر به ازای $i = 1, 2, ...$ ، $A_i \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ یک مجموعه اندازه‌پذیر نامیده می‌شود. معمولاً از $\sigma-$جبر برای نمایش مجموعه اطلاعاتی[۱] استفاده می‌شود. در حقیقت شرایط فوق مشخص کننده یک ساختار ریاضی برای نمایش مجموعه اطلاعاتی می‌باشد که تحت عمل متمم‌گیری و اجتماع‌های شمارا بسته است.

واضح است که مجموعه توانی 2^{Ω} خود یک $\sigma-$جبر است، ولی $\sigma-$جبرهای کوچکتر از مجموعه توانی نیز وجود دارند. برای مثال در آزمایش پرتاب یک سکه دو بار متوالی $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{HH\}, \{HT, TH, TT\}\}$ و $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{HH, TT\}, \{HT, TH\}\}$ هر دو $\sigma-$جبر می‌باشند. مفهوم اطلاعاتی از $\mathcal{F}_1$ را می توان چنین تفسیر کرد که آزمایش پرتاب سکه با آمدن دو بار شیر پشت سر هم پایان می‌یابد یا در غیر

[۱] Set Information

این صورت پیشامد $\{HT, TH, TT\}$ رخ خواهد داد. همچنین مفهوم اطلاعاتی از $\mathcal{F}_۲$ بیان می‌کند که هر دو پرتاب پیشامد یکسان دارند و یا در غیر اینصورت دو پیشامد متفاوت می‌باشند[۱۱].

تعریف ۲.۱.۱ در یک فضای احتمال هر خانواده صعودی از زیرمیدان‌های سیگمایی را یک فیلتر می‌نامیم. در واقع یک فیلتر نشان‌دهنده سیر افزایشی میزان اطلاعات با گذشت زمان است.

۲.۱ فضای احتمال

تعریف ۱.۲.۱ نگاشت $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ یک اندازه احتمال[۲] نامیده می‌شود هرگاه اندازه P در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $A \in \mathcal{F}$ ، $۰ \leq P(A) \leq ۱$

۲. $P(\emptyset) = ۰$ یا $P(\Omega) = ۱$.

۳. اگر $A_i \in \mathcal{F}$ و A_j برای $i \neq j, i, j = ۱, ۲, ۳, \ldots$ دو به‌دو مجزا باشند($A_i \bigcap A_j = \emptyset$)، آن‌گاه $P(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i)$.

در این صورت سه گانه $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ اگر A گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی تعریف شده روی فضای احتمالی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشد، آنگاه از$\mathcal{F}(A)$ برای نشان دادن $\sigma -$ جبر تولیدشده به‌وسیله A استفاده می‌کنیم. اگر $\mathcal{S}$ فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه $\mathcal{B}(S)$ نمادی برای نشان دادن $\sigma -$ جبری از زیر مجموعه‌های بورل $\mathcal{S}$ می‌باشد[۱].

۳.۱ متغیر تصادفی

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ دو فضای احتمال باشند. نگاشت $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ اندازه پذیر است اگر برای هر $B \in \mathcal{F}'$

[۲] Probability Measure

$$T^{-1}(B) = \{\omega : T(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

به علاوه اگر $\Omega' = \mathbb{R}$ و $\mathcal{F}' = \mathcal{B}$ سیگما جبر بورل و P' اندازه لبگ باشد در این صورت نگاشت T یک متغیر تصادفی[۳] است.

تعریف ۲.۳.۱ تابع توزیع از یک متغیر تصادفی X با F_X نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P[X \leq x]. \qquad (۱-۲)$$

برای هر مجموعه بورل A،

$$P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) = P(X \in A). \qquad (۱-۳)$$

۴.۱ فرآیند تصادفی

در زیر به برخی از فرآیندهای تصادفی معروف اشاره می‌شود.

تعریف ۱.۴.۱ فرآیند تصادفی $\{X(t) : t \in I\}$ یک خانواده از متغیرهای تصادفی می‌باشد در حالی‌که $t \in I$ یک مجموعه اندیس‌گذار است. اگر $I = Z$ آن‌گاه $\{X(t) : t \in I\}$ یک فرآیند تصادفی گسسته زمان یا یک دنباله تصادفی می‌باشد و اگر I یک مجموعه شمارا باشد، آن‌گاه $\{X(t) : t \in I\}$ یک فرآیند تصادفی پیوسته زمان می‌باشد.

یک فرآیند تصادفی می‌تواند به عنوان یک تابع $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ تعریف شود به‌طوری‌که

$$X : (t, \omega) \to X(t, \omega) = X_t(\omega).$$

برای هر $t \in I$، نگاشت $X_t(.) : \Omega \to \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی می‌باشد.

برای یک $\omega \in \Omega$ دلخواه $X(., \omega) : I \to \mathbb{R}$ یک نگاشت از مجموعه اندیس گذار I به $\mathbb{R}$ می‌باشد که مسیر نمونه‌ای یا یک مسیر نامیده می‌شود. یک مسیر نمونه‌ای، توصیف‌کننده وضعیت فرآیند در زمان‌های مختلف برای یک $\omega \in \Omega$ داده شده می‌باشد.

[۳] Random Variable

برد یک متغیر تصادفی X، فضای حالت یا وضعیت[۴] و برای $\omega \in \Omega$ $X(t,\omega),$ وضعیت فرآیند در زمان t نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۴.۱ تابع توزیع یک فرآیند تصادفی متناهی البعد $\{X(t) : t \in I\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mu_{t_۱,...,t_n}((-\infty,x_۱)\times ... \times(-\infty,x_n)) &= F_{t_۱,t_۲,...,t_n}(x_۱,x_۲,...,x_n)\\ &= P[X_{t_۱}\leq x_۱, X_{t_۲}\leq x_۲,...,X_{t_n}\leq x_n]\\ &= P[\bigcap_{i=۱}^{n}\{\omega\in\Omega : X_{t_i}\leq x_i\}].\end{aligned}$$

تعریف ۳.۴.۱ فیلتر $\{\mathcal{F}_t : t \in I\}$ داده شده است. در این‌صورت فرآیند تصادفی $\{X_t\}$ یک مارتینگل است هرگاه

۱) $\{X_t\}$ سازگار با $\mathcal{F}_t$ باشد.

۲) $\{X_t\}$ انتگرال‌پذیر باشد یعنی $\mathbf{E}(|X_t|) < \infty$.

۳) به ازای $t_۰ < s < t < T$، (تقریبا مطمئن) $X_s = \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_s]$.

۱.۴.۱ فرآیند وینر

تعریف ۴.۴.۱ یک زیر مجموعه باز U از فضای اقلیدسی را در نظر بگیرید، $C^k(u)$ را مجموعه‌ای از تمام توابع حقیقی مقدار روی U، که دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه k می‌باشد، در نظر می‌گیریم[۱].

فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F},P)$ فضای احتمال و $\{\mathcal{F}_t, t\geqslant ۰\}$ فیلتر تعریف شده روی آن باشد. یک فرآیند $\{W(t), t\geqslant ۰\}$ یک فرآیند $\mathcal{F}_t-$وینر نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $w(۰) = ۰$، با احتمال ۱[۵] ($w.p.۱$)

۲) $W(t)$ ، $\mathcal{F}_t-$اندازه‌پذیر باشد و $\mathcal{F}_t(W(s)-W(t) : s\geqslant t)$ مستقل از $\mathcal{F}_t$ برای تمام $t > ۰$ باشد.

[۴] State

[۵] With Probability One

۳) نموهای $W(s) - W(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^{2}(s-t) > 0$ برای تمام $s > t > 0$ هستند.

۴) مسیرهای نمونه‌ای $W(.)$ در $C^{k}\,[0,\infty)$ هستند.

اگر $\sigma = 1$ باشد، آنگاه فرآیند $\{W(.) : t \geqslant 0\}$ یک فرآیند $\mathcal{F}_t$−وینر استاندارد نامیده می‌شود.

اگر $\mathcal{F}_t$ به‌صورت $\mathcal{F}(W(t) - W(s) : 0 \leqslant s \leqslant t)$ باشد، آنگاه پیشوند $\mathcal{F}_t$ حذف می‌شود و $\{W(.) : t \geqslant 0\}$ را به‌عنوان یک فرآیند وینر درنظر می‌گیریم.

گردایه متناهی از فرآیندهای $\mathcal{F}_t$−وینر مستقل را بردار ارزش فرآیند $\mathcal{F}_t$−وینر می‌نامیم. یک خاصیت بسیار مهم از فرآیندهای $\mathcal{F}_t$−وینر این است که $\mathcal{F}_t$−مارتینگل هم هستند (این خاصیت از قسمت‌های دوم و سوم تعریف به‌دست می‌آید). به‌عبارت دیگر، فرآیند وینر یک مثال متعارف از فرآیندهای مسیرنمونه‌ای پیوسته است که هم مارکوفی و هم مارتینگل هستند. در واقع فرآیند وینر دارای مسیرهای نمونه‌ای پیوسته است و همچنین مارتینگل بودنش اشاره به این دارد که روی هر فاصله زمانی کوچک دارای تغییرات بیکران با احتمال یک است.

اگر ما میل به انتخاب کلاس وسیعی از انتگرال‌ها داشته باشیم، تعریف فوق $\int_{0}^{t} \sigma(x(s))dW(s)$ را به‌وسیله هر ساختار گذری مستثنی می‌کند. با این حال، یک انتگرال مقید ممکن است بطریق ساده‌ای تعریف شود اگر کلاس انتگرال‌های مجاز را به‌طور صحیح محدود کنیم. ما قصد داریم شرایطی را روی تابع زیر انتگرال تحمیل کنیم تا این تابع به این نتیجه دلالت داشته باشد که زمانی‌که به‌صورت یک حد بالایی انتگرال‌گیری در نظر گرفته شده است، جواب انتگرال یک $\mathcal{F}_t$−مارتینگل باشد. بنابراین قادر به استفاده از تخمین‌های مارتینگلی در ساختار و کاربرد این انتگرال‌ها خواهیم بود.

توجه: در طول این پایان‌نامه به‌طور معمول فرض می‌شود که ضرایب در معادلات، متناهی هستند واین یک محدودیت برای اهداف ما نیست. چون فضای حالت فرآیندها برای اهداف عددی متناهی(کراندار) خواهند بود. به‌دلیل همین کرانداری در تعریف، تا حدودی درمان کاملی برای نظریه ی معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDE)[۶] فراهم می‌شود.

---

[۶] Stochastic Differential Equations

فرضیات ۵.۴.۱

فرآیند تصادفی $\{c(t) : t \geqslant 0\}$ را $\mathcal{F}_t$−سازگار می‌نامیم هرگاه $c(t)$، $\mathcal{F}_t$−اندازه‌پذیر برای هر $t \geqslant 0$ باشد. اگر $W(.)$ یک فرآیند $\mathcal{F}_t$−وینر و $c(.)$، $\mathcal{F}_t$−سازگار باشد، آنگاه $c(.)$ را غیرقابل پیش بینی [۷] نسبت به $W(.)$ می‌گوییم، زیرا $c(u)$ و $W(s) - W(t)$ برای $0 \leqslant u \leqslant t \leqslant s$ مستقل هستند. یک فرآیند $c(t, w)$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه مجموعه $\{(t, w) : c(t, w) \in A\}$ متعلق به σ−جبرتولید شده $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{F}$ باشد که در آن $\mathcal{B}([0, \infty))$، σ−جبری از زیر مجموعه‌های بورل $[0, \infty)$ است. فرض کنید $\sum_b(\mathcal{T})$ نشان‌دهنده مجموعه‌ای از فرآیندهای حقیقی مقدار، اندازه‌پذیر و $\mathcal{F}_t$−سازگار $\sigma(.)$ است که به‌طور یکنواخت برای $t \in [0, \mathcal{T}]$ و $w \in \Omega$ کراندار می‌باشد و فرض کنید $\sum_b$ نشان‌دهنده آن‌دسته از فرآیندهای تعریف شده روی $[0, \infty)$ که متعلق به $\mathcal{B}([0, \infty))$ برای هر $\mathcal{T} < \infty$ می‌باشند. یک فرآیند تصادفی را یک تابع ساده گوییم هرگاه یک دنباله از زمان‌های قطعی $\{t_i : i = 0, 1, ...\}$ که $0 = t_0 < t_1 < ... < t_i \longrightarrow \infty$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای $t \in [t_i, t_{i+1})$ داشته باشیم، $\sigma(t) = \sigma(t_i)$. مجموعه تمام توابع موجود در $\sum_b$ را با $\sum_b^*$ نشان خواهیم داد. حال با وجود این شرایط انتگرال را برحسب فرآیند وینر تعریف می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با آرگومان‌های تعریف شده در زیر، می‌توان به کتاب کاراتزاس[۸] و شریو[۹] مراجعه کرد[۱۵, ۱۱].

۲.۴.۱ فرآیند مارکوف

تعریف ۶.۴.۱ یک فرآیند تصادفی $\{X(t) : t \in I\}$ تعریف شده روی فضای احتمالی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ با فضای حالت Σ یک فرآیند مارکوف می‌باشد، اگر برای هر مجموعه بورل $B \in \mathcal{B}(\Sigma)$ و هر دنباله $\{t_i\}_{1 \leq i \leq n}$ و $t_1 < t_2 < ... < t_n < t \leq T$،

$$P[X_t \in B | X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}] = P[X_t \in B | X_{t_n}].$$

[۷] Nonanticipative

[۸] Karatzas

[۹] Shreve

شرط فوق بدین معنی است که فقط اطلاعات در زمان t_n مفید می‌باشد و اطلاعات قبل از زمان t_n فراموش می‌شوند. به عبارت دیگر، پیشامدهایی که در آینده اتفاق خواهد افتاد مستقل از پیشامدهایی است که در گذشته اتفاق افتاده و فقط به مجموعه اطلاعات در زمان حال بستگی دارد.

تعریف ۷.۴.۱ احتمال انتقال از فرآیند مارکوف $\{X(t) : t \in I\}$ برای $t, s \in I$ و $s < t$ و هرمجموعه بورل B به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{P}(s, X_s, t, B) = P[X_t \in B|X_s], \ w.p.1 \qquad (۱-۴)$$

برای t، s و B ثابت، $\hat{P}(s, ., t, B)$ یک تابع $\mathcal{B}(\Sigma)-$ اندازه‌پذیر و برای t، s و x ثابت، $\hat{P}(s, x, t, .)$ یک اندازه احتمال است. به علاوه یک فرآیند مارکوف $\{X(t) : t \in I\}$ برای $s \leq u \leq t$ در معادله چپمن کولموگروف صدق می‌کند:

$$\hat{P}(s, X_s, t, B) = \int_R \hat{P}(u, y, t, B)\hat{P}(s, X_s, u, dy), w.p.1. \qquad (۱-۵)$$

۳.۴.۱ زنجیر مارکوف

زنجیر مارکوف که به افتخار آندری مارکوف[۱۰] ریاضیدان روسی این‌گونه نام‌گذاری شده یک دستگاه ریاضی است که در آن انتقال از یک حالت به حالت دیگر صورت می‌گیرد که البته تعداد این حالات قابل شمارش است. زنجیر مارکوف یک فرآیند تصادفی بدون حافظه است بدین معنی که توزیع احتمال شرطی حالت بعد تنها به حالت فعلی بستگی دارد و به وقایع قبل از آن وابسته نیست. این ویژگی فقدان حافظه خاصیت مارکوفی نام دارد. دستگاه‌های مارکوفی اغلب در مواقعی به‌کار می‌روند که از احتمال، برای نشان دادن ویژگی‌های ناشناخته دستگاه استفاده می‌شود.

زنجیر مارکوف، یک فرآیند تصادفی گسسته زمان می‌باشد ولی برخی نیز در مورد فرآیندهای پیوسته زمان از اصطلاح زنجیر مارکوف استفاده می‌کنند. یک فرآیند تصادفی گسسته زمان شامل دستگاهی است که در هر مرحله در حالت خاص و مشخصی قرار دارد و به صورت تصادفی در هر مرحله تغییر حالت می‌دهد.

[۱۰] Andrey Markov

مراحل اغلب به‌عنوان لحظه‌های زمانی در نظر گرفته می‌شوند ولی می‌توان آن‌ها را فاصله فیزیکی یا هر متغیر گسسته دیگری در نظر گرفت. چون دستگاه به‌صورت تصادفی تغییر می‌کند، به‌طور کلی پیش‌بینی حالت زنجیر مارکوف در نقطه خاص در آینده غیرممکن است. با این حال ویژگی‌های آماری دستگاه در آینده قابل پیش‌بینی است. در بسیاری از کاربردها چیزی که دارای اهمیت است همین ویژگی آماری است[۱۱].

تغییر حالات دستگاه، انتقال نام دارد و احتمال‌هایی که به این تغییر حالت‌ها نسبت داده می‌شود احتمال انتقال نام دارد. مجموعه‌ای از حالت‌ها و احتمال انتقال‌ها به‌طور کامل یک زنجیر مارکوف را مشخص می‌کنند.

تعریف ۸.۴.۱ فرآیند $\{\xi_n, n < \infty\}$ یک زنجیر مارکوف با احتمالات مستقل از زمان $P(x,y) = p\{\xi_{n+1} = y | \xi_n = x\}$ روی یک فضای وضعیت متناهی S می‌باشد، هرگاه

$$P(\xi_{n+1} = x \mid \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, ..., \xi_n = x_n) = P(\xi_{n+1} = x \mid \xi_n = x_n),$$

که در آن x_i مقادیر ممکن از مجموعه فضای حالت می‌باشند.

در حقیقت به‌کارگیری روش مارکوف نیازمند این امر است که دستگاه نمایانگر فقدان حافظه باشد. یعنی حالت و وضعیت آینده دستگاه مستقل از وضعیت‌های گذشته آن بوده و تنها به آخرین جزء آن وابسته باشد.

احتمال تغییر حالت از حالت i ام به حالت j ام در n حرکت برابر است با

$$p_{ij}^{(n)} = p(\xi_n = j \mid \xi_0 = i),$$

در فصل‌های ۳ و ۴ به حل مسئله کنترل بهینه تصادفی با استفاده از این زنجیرها پرداخته می‌شود.

۵.۱ فضای احتمالی فیلتر شده و فرآیندهای سازگار

فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر بگیرید، فیلتر[۱۱] $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک خانواده از $\sigma-$جبرهای صعودی می‌باشد به طوری که برای هر $s \leq t$ داشته باشیم $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

[۱۱] Filtration

ویژگی صعودی بودن از یک فیلتر بیان کننده این مطلب است که اطلاعات در طول زمان فراموش نمی‌شوند. در این‌صورت فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq ۰}, P)$ یک فضای احتمال فیلترشده[۱۲] نامیده می‌شود.

فرآیند تصادفی $\{X(t) : ۰ \leq t \leq T\}$ روی فضای احتمال فیلترشده فوق یک فرآیند سازگار[۱۳] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر t از متغیر تصادفی $X(t)$ ،$\mathcal{F}_t-$اندازه‌پذیر باشد، یعنی برای هر t، $\mathcal{F}_t$ شامل همه اطلاعات در مورد $X(t)$ باشد.

در حالت گسسته زمان یک فرآیند H، یک فرآیند پیش‌بینی‌پذیر [۱۴] نامیده می‌شود اگر برای هر n متغیر تصادفی H_n، $\mathcal{F}_{n-۱}$ اندازه پذیر باشد، به طوری‌که بتوان مقدار فرآیند H را تقریباً با قطعیت در زمان n بر اساس اطلاعات تا زمان $n-۱$ پیش‌بینی کرد. در حالت پیوسته زمان فرآیند$\{H(t) : t \geqslant ۰\}$، یک فرآیند پیش‌بینی‌پذیر می‌باشد اگر و فقط اگر $H(t)$، $\mathcal{F}_{t-۱}-$ اندازه‌پذیر باشد. همه فرآیندهای از چپ-پیوسته، پیش‌بینی‌پذیر می‌باشند زیرا داریم $H(t) = \lim_{s\uparrow t} H(s) = H(s-)$. بنابراین اگر مقادیر فرآیند پیش‌بینی پذیر را در زمان‌های قبل از t بدانیم آن‌گاه می‌توان مقدار فرآیند را در زمان t با حد تعیین کرد.

۶.۱ زمان توقف

یک متغیر تصادفی $\tau : \Omega \to [۰, \infty]$ یک $\mathcal{F}_t-$ زمان توقف[۱۵] نامیده می‌شود، اگر برای هر $t \in [۰, \infty]$

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{۶-۱}$$

اگر $\{X(t) : t \geqslant ۰\}$یک فرآیند تصادفی سازگار با فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq ۰}$ باشد، آن‌گاه اولین زمان برخورد فرآیند X به مجموعه A را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_A = inf\{t \geq ۰ : X(t) \in A\}, \tag{۷-۱}$$

[۱۲] Filtrated probability space

[۱۳] Adapted

[۱۴] Predictable

[۱۵] Stopping Time