بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی ، گرایش آنالیز عددی

عنوان

بررسی و تحلیل معادلات انتگرال- دیفرانسیل با تأخیر زمانی

استاد راهنما

دکتر یداله اردوخانی

استادان مشاور

دکتر مهدی دهقان و دکتر داریوش بهمردی

پژوهشگر

سلمه صداقت کالمرزی

تیر ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: صداقت کالمرزی نام: سلمه

عنوان: بررسی و تحلیل معادلات انتگرال-دیفرانسیل با تأخیر زمانی

استاد راهنما: دکتر یداله اردوخانی

استادان مشاور: دکتر مهدی دهقان و دکتر داریوش بهمردی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: الزهراء دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۰۲

واژگان کلیدی: معادلات انتگرال-دیفرانسیل، ولترا، تأخیر زمانی، پانتوگراف، خنثی، روش های طیفی، هم محلی، آنالیز همگرایی

تقدیم به . . .

گل های باغ زندگیم . . .

او که ایستادگیش استقامت آموخت، پدر بزرگوارم ،

او که شب زنده داریش عشق را ترجمه کرد، مادر عزیزتر از جانم ،

و او که مهربانی های بی پایانش انرژی بخشم بود، همسر عزیزم .

// سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

سپاس گزار افرادی هستم که بی حضورشان تدوین این مجموعه ممکن نبود. وظیفه خود می‌دانم از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر یداله اردوخانی و استادان مشاور، آقایان دکتر مهدی دهقان و دکتر داریوش بهمردی که در مدت انجام این رساله از رهنمودهای علمی و اخلاقی ایشان بهرمند شدم، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

سلمه صداقت کالمرزی

تیر ۱۳۹۲

اظهارنامه

تمام فصل های این رساله به غیر از فصل های اول و دوم به مطالب اصیل اختصاص دارند.

چکیده

در این رساله، روش های عددی برای به دست آوردن جواب های تقریبی معادلات تأخیری مطرح می شوند و با استفاده از توابع متعامد چبیشف، لژاندر و توابع دورگه لژاندر به حل عددی معادلات تأخیری می پردازیم.

ابتدا، معادلات تأخیری از نوع پانتوگراف در نظر گرفته می شوند. با استفاده از خواص توابع چبیشف انتقال یافته، روشی برای حل عددی این گونه معادلات پیشنهاد می شود. این روش، معادلات مفروض را به طور مستقیم به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می کند. با حل این دستگاه، جواب تقریبی برای این معادلات حاصل می گردد. آنالیز خطا برای به دست آوردن تعداد چندجمله ای های چبیشف مورد نیاز برای به دست آوردن دقت مورد نیاز، ارائه خواهد شد.

در ادامه، یك روش عددی برای حل معادلات تأخیری خنثی از نوع پانتوگراف پیشنهاد شده است. این معادلات با استفاده از خواص توابع لژاندر انتقال یافته به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می شوند و آنالیز همگرایی روش مورد بحث قرار می گیرد.

همچنین، یك روش عددی برای حل معادلات انتگرال -دیفرانسیل تابعی ولترا از نوع خنثی با استفاده از روش های طیفی ارائه می گردد و آنالیز همگرایی روش طیفی به کار رفته برای حل معادلات انتگرال -دیفرانسیل ولترای خنثی بررسی شده است.

در آخر، یك روش محاسباتی برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری خنثی با تأخیر وابسته به بردار حالت و تأخیر وابسته به زمان، بر پایه توابع متعامد دورگه لژاندر و بلاك پالس ارائه شده و تخمین خطای روش داده شده نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال -دیفرانسیل، ولترا، تأخیر زمانی، پانتوگراف، خنثی، روش های طیفی، هم محلی، آنالیز همگرایی

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰):

41A10, 45J05, 65G99, 65M12, 65M70

فهرست مطالب

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\|.\|_\infty$ نرم ماکسیمم

$\|.\|_۲$ نرم میانگین مربعات

(u,v) ضرب داخلی u و v

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

$C[a,b]$ مجموعه توابع پیوسته روی $[a,b]$

$x =^\circ y$ معادل بودن x و y

$\mathcal{P}_n$ فضای همه چندجمله ایهای از درجه حداکثر n

$span\{\phi_۱,\dots,\phi_n\}$ فضای تولید شده توسط $\phi_۱,\dots,\phi_n$

$L_n(t)$ چندجمله ای لژاندر از درجه n

$T_n(t)$ چندجمله ای چبیشف از درجه n

δ_{ij} دلتای کرونکر

$\otimes$ ضرب کرونکر

$T^{-۱}$ معکوس عملگر T

فصل ۱

مقدمه

بحث نظری مربوط به معادلات تأخیری و کاربرد این معادلات از آن جهت که معادلات تأخیری به عنوان مدل های ریاضی بسیاری از پدیده های فیزیکی استفاده می شوند، یك موضوع مهم در ریاضی کاربردی است. ابتدا تاریخچه ای از روش های ارائه شده برای حل این معادلات ارائه می گردد.

۱.۱ چگونگی پیدایش معادلات تأخیری

۱.۱.۱ معادلات پانتوگراف

معادلات پانتوگراف یکی از مهم ترین انواع معادلات دیفرانسیل تأخیری هستند و نقش مهمی را در بیان پدیده های مختلف بیان می کنند. این معادلات کاربردهای زیادی در بیولوژی، کنترل و الکترودینامیک دارند. آنالیز کمی و کیفی معادلات دیفرانسیل تأخیری از نوع پانتوگراف توسط افراد زیادی بررسی شده اند که در ادامه به تعداد محدودی از آنها اشاره می شود.

لی [۱] و لیو [۲] در [۷۲] به اثبات وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل تأخیری پانتوگراف پرداختند. گوگلیمی [۳] پایداری روش های تک گامی برای چنین معادلاتی را بررسی کرد [۴۴] و سپس نویسندگان [۱۰۷، ۱۰۸] به تحلیل روش های تک گامی و چند گامی برای معادلات فوق پرداختند.

نویسندگان مقاله [۹۳] روش هموتوپی را برای حل معادلات تأخیری پانتوگراف پیشنهاد دادند. در مقاله [۱۰۹] پایداری روش رونگه -کوتا برای معادلات پانتوگراف خنثی بررسی شد. نویسندگان این مقاله اثبات کردند که روش های گاوس- لژاندر به طور مجانبی پایدار نیستند ولی روشهای گاوس- رادو و گاوس- لباتو به طور مجانبی پایدارند.

---

[۱] Li
[۲] Liu
[۳] Gugliemli

سزر [۴] و همکارانش با استفاده از چندجمله ای های تیلور به حل عددی این سیستم ها پرداختند [۹۱، ۹۲].
نویسندگان مقاله [۵۱] روش عددی جدیدی را برای معادلات دیفرانسیل تأخیری از نوع پانتوگراف بر اساس روش های طیفی بیان کردند. آن ها روش طیفی لژاندر را برای به دست آوردن تقریب عددی با دقت بالا برای جواب واقعی به کار بردند و به صورت تئوری و عددی نشان دادند که روش پیشنهاد شده به شرط این که داده ها هموار باشند به صورت نمایی همگراست.
معادله ای که آنها بررسی کردند به صورت

$$\begin{cases} u'(t) = a(t)u(qt), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

بود که $0 < q < 1$ ثابت داده شده و a تابع هموار روی بازه $[0, T]$ است. روش هایی که تا آن موقع برای حل این معادلات پیشنهاد شده بود شامل روش های رونگه -کوتا و روش های هم محلی بودند. مشکل اساسی در به کار بردن روش های رونگه -کوتا برای معادله فوق کمبود اطلاعات تابع در نقاط شبکه بود. این داده های عددی توسط درونیابی به دست می آیند.
برونر [۵] و همکارانش در [۱۰] نشان دادند که برای جواب های هموار دلخواه معادله بالا، مرتبه همگرایی در نقاط شبکه روش های هم محلی که ریشه های چندجمله ای های از مرتبه m بودند از $p = m + 2$ تجاوز نمی کند و این در حالی است که وقتی روش هم محلی برای معادلات دیفرانسیل معمولی به کارگرفته می شود، مرتبه همگرایی $O(h^{2m})$ است.
ایشتیاق [۶] و همکارانش در [۵۲] روش طیفی لژاندر را برای معادله زیر تعمیم دادند:

$$\begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) + b_1(t)u(q_1 t) + b_2(t)u(q_2 t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

آنها نشان دادند روش طیفی روش عددی کارامد و بسیار دقیقی برای تقریب جواب معادلات تأخیری غیرخطی از نوع پانتوگراف می باشد.
در این رساله یک روش عملیاتی مستقیم برای حل معادلات تأخیری با چندین پانتوگراف

$$\begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) + \sum\limits_{r=1}^{l} b_r(t)u(q_r t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

را ارائه می دهیم. این روش شامل تبدیل مساله تأخیری به یک دستگاه معادلات جبری از طریق بسط توابع مورد نظر، توسط توابع متعامد با ضرایب مجهول می باشد.

[۴] Sezer
[۵] Brunner
[۶] Ishtiaq

۲.۱.۱ معادلات خنثی

یک دسته دیگر از معادلاتی که در این رساله مورد بررسی قرار می گیرد معادلات دیفرانسیل از نوع خنثی [۷] هستند. مشخصه بارز این گونه معادلات این است که تأخیر زمانی در مشتق تابع مجهول ظاهر می شود.
بررسی معادلات دیفرانسیل خنثی از لحاظ تئوری و عملی مورد علاقه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است. به عنوان مثال این معادلات در نوسانات ولتاژ و جریان در مسایل خطوط انتقال کاربرد دارند.
تحلیل عددی چنین معادلاتی به سالهای اخیر برمی گردد، از آن جمله می توان به مقاله [۱۴] اشاره کرد که نویسندگان آن با استفاده از روش های هم محلی به حل معادله غیرخطی

$$u'(t) = f(u(t), u(t-\tau), u'(t-\tau)), \qquad u \in R^n$$

پرداختند. آن ها نشان دادند که روش پیشنهادی سریع ولی با دقت کم می باشد.
در سال ۲۰۰۷ کوردرو [۸] و همکارش روش محاسباتی تاو را برای حل معادلاتی به شکل

$$\begin{cases} u'(t) = au(t) + bu(t-\tau) + cu'(t-\tau)) + f(x), & t > \circ, \\ u(t) = \psi(t), & t \leq \circ \end{cases}$$

پیشنهاد دادند. نویسندگان مقالات [۹۹]-[۱۰۳] روش های تک گامی θ ، روش های چندگامی و روش موجک را برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی خنثی از نوع پانتوگراف زیر به کاربرده و شرایط کافی برای پایداری مجانبی روش پیشنهادی خود را بیان کردند.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t), u(pt), u'(pt)), & t > \circ\,, \\ u(\circ) = u_\circ. \end{cases}$$

معادلات دیفرانسیل تأخیری خنثی توسط بیکر [۹] به دو دسته صریح و ضمنی تقسیم می شوند[۷]. بدیهی است مطالعه شکل های مختلف و روش های عددی موجود، متفاوت هستند . معادلات دیفرانسیل تأخیری خنثی از نوع صریح به صورت زیر معرفی می شوند:

$$u'(t) = f(t, u(t), u(\tau(t)), u'(\alpha(t))), \quad t \in [\circ, T).$$

یک نمونه از این معادلات مدل رشد جمعیت زیر است که توسط کوآنگ مطرح شده بود و قضیه یکتایی جواب و شرایط کافی برای وجود آن تا مدت ها به صورت مسأله باز باقی مانده بود. تا اینکه در سال ۲۰۱۰ در مقاله [۳۱] با استفاده از قضیه نقطه ثابت شرایط کافی برای وجود و یکتایی جواب به دست آمد.

$$u'(t) = u(t)[\alpha(t)u(t) - \beta(t)u'(t) - b(t)u(t-\tau(t)) - c(t)u'(t-\tau(t))],$$

[۷] Neutral
[۸] Cordero
[۹] Baker

که در آن α, β, b, c و τ توابعی پیوسته هستند.
معادلات دیفرانسیل تأخیری خنثی از نوع ضمنی به صورت زیر معرفی می شوند که به مدل هال [۱۰] معروفند.

$$\frac{d}{dt}[u(t) - G(t, u(t), u(\tau(t)))] = F[t, u(t), u(\alpha(t))],$$

یکی از اهداف این رساله به کار بردن روش های طیفی برای حل اینگونه معادلات و آنالیز همگرایی روش می باشد.

۳.۱.۱ معادلات انتگرال -دیفرانسیل ولترای تأخیری

در سال ۱۹۰۹ ولترا در حال مدلسازی جمعیتی به معادلاتی از نوع ترکیبی رسید که به ان مدل های توصیف کننده تأثیرات وراثتی، ترکیبی از معادلات انتگرال ولترا و دیفرانسیل توابع بود. این چنین معادلات تابعی را معادلات انتگرال -دیفرانسیل خطی نامید.
اواخر سال ۱۹۲۰، مدل سازی ریاضی مسائل مربوط به دینامیك جمعیت ها، ولترا را به معادلات انتگرال - دیفرانسیل تأخیری رهنمون ساخت. از این حیث ولترا را می توان پیشرو مدل سازی این نوع معادلات دانست. ساختار بسیاری از پدیده های واقعی می تواند به صورت یك معادله انتگرال -دیفرانسیل ولترای تأخیری مدل شوند.
به دست آوردن جواب دقیق معادلات انتگرال -دیفرانسیل تأخیری بسیار مشکل است و لازم است برای حل آن از تکنیك های عددی استفاده شود. دانستن این نکته ضروری است که معادلات انتگرال -دیفرانسیل دارای این خصوصیت هستند که اطلاعات هموار منجر به تولید جواب های هموار می شود. چنانچه در مورد معادلات انتگرال -دیفرانسیل تأخیری لزوما چنین چیزی برقرار نیست، به طوری که تأخیر منجر به تولید نقاط موسوم به ناپیوستگی نوع اول می شود که جواب معادله دیفرانسیل در این نقاط از همواری کمتری لااقل در نقطه آغازین، نسبت به توابع موجود در معادله برخوردار است. بنابراین برای حل این گونه معادلات و آنالیز همگرایی آنها باید درك عمیقی از خواص کیفی جواب های این گونه معادلات داشت.
تکنیك های عددی زیادی برای حل اینگونه معادلات پیشنهاد شده است. نویسندگان [۷۴] روش های هم مکانی را در فضای توابع اسپلاین کلاسیك برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول مطرح کردند.
نویسندگان [۴۵] نشان دادند که تقریب های هم مکانی در فضای اسپلاین $S_m^{(0)}$ منجر به پیدایش روش های m مرحله ای رونگه -کوتای ضمنی می شود که با انتخاب m نقطه گاوس به عنوان نقاط هم مکانی می توان به درجه دقت فوق همگرایی موضعی $2m$ رسید. روش های هم مکانی در فضای توابع اسپلاین کلاسیك $S_m^{(m)}$ برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم در [۴۶] و [۸۲] بررسی شد.
از جمله کارهای انجام شده در زمینه معادلات انتگرال تأخیری می توان به بررسی خواص همگرایی روش های هم مکانی و رونگه -کوتا ، روش اویلر، روش نقطه میانی، روش ذوزنقه ای و روش های هم مکانی نوع هرمیت اشاره کرد.

[۱۰] Hale

برونر و همکارش در سال ۱۹۷۴ به آنالیز کیفی و کمی روش های تک گامی مختلف بر مبنای روش های اویلر ضمنی و صریح برای معادلات انتگرال –دیفرانسیل پرداختند که به نوعی یك روش هم مکانی کاملا گسسته شده انگاشته می شود. تحلیل همگرایی سرتاسری و فوق همگرایی موضعی روش های هم مکانی در فضای چندجمله ای های تکه ای در [۱، ۱۵] انجام شد.
در مورد معادلات انتگرال –دیفرانسیل تأخیری، روش های چندگامی و همچنین روش های مستقیم استفاده از انتگرال گیری توسط بیکر مورد بررسی قرار گرفتند. از منابع مهم در زمینه تحلیل روش های هم مکانی برای معادلات انتگرال –دیفرانسیل ولترای تأخیری مقاله های ارزنده [۱۵]–[۲۱] می باشند.
نویسندگان مقالات [۳۹، ۶۳، ۹۵] روش طیفی لژاندر را برای به دست آوردن تقریب عددی با دقت بالا برای جواب معادلات انتگرال ولترا به کار بردند.
در این رساله با استفاده از روش های طیفی به حل عددی معادله انتگرال –دیفرانسیل ولترای تأخیری از نوع خنثی زیر که توسط برونر در سال ۲۰۰۹ بیان شده است پرداخته و سپس به بررسی همگرایی روش های طیفی برای اینگونه معادلات می پردازیم.

$$\frac{d}{dt}[u(t)-c(t)u(qt)] = a(t)u(t)+b(t)u(qt)+\int_{\circ}^{qt}[k_{۱,\circ}(t,s)u(s)+k_{۱,۱}(t,s)u'(s)]ds.$$

۴.۱.۱ معادلات دیفرانسیل تابعی خنثی با تأخیر زمانی متغیر

مسائل زیادی در فیزیك، مکانیك و بیولوژی، منجر به پدید آمدن معادلات دیفرانسیل تابعی خنثی با تأخیر زمانی وابسته به بردار حالت

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),x(\alpha(t,x(t)))),\dot{x}(\alpha(t,x(t)))), & \circ\le t\le T,\\ x(\circ)=x_{\circ}, \end{cases}$$

و معادلات دیفرانسیل تابعی خنثی با تأخیر وابسته به زمان زیر می شوند:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t),x(\tau(t)),\dot{x}(\phi(t))), & \circ\le t\le T,\\ x(\circ)=x_{\circ}, \end{cases}$$

که در آن $\alpha(t,x(t))$، $\tau(t)$ و $\phi(t)$ توابع تأخیر پیوسته به ازای همه $t\in[\circ,T]$ هستند. آنالیز کیفی و کمی این گونه مسائل توسط تعدادی از محققان مورد بررسی قرار گرفته است.
مؤلفین [۲۶] به تحلیل خواص همگرایی روش عددی مرتبه اول برای حل معادلات دیفرانسیل تأخیری خنثی پرداختند. جکیوایز [۱۱] و همکارانش [۵۳]–[۵۹] به بررسی همگرایی روش های عددی برای معادلات دیفرانسیل با تأخیر وابسته به زمان پرداختند. نویسندگان مقاله [۳۳] همگرایی روش های رونگه –کوتای پیوسته برای معادلات

[۱۱] Jackiewicz

دیفرانسیل با تأخیر وابسته به بردار حالت را مورد بررسی قرار دادند.
مقاله های [۸، ۶۰] با فرض این که تابع f در معادله های بالا در شرط لیپ شیتز نسبت به مؤلفه دوم خود صدق کند به بررسی همگرایی روش های موجك پرداختند. وانگ [۱۲] و همکارانش [۹۸] کران های جدیدی برای خطای روش های چندگامی برای این گونه مسائل ارائه دادند. نویسندگان مقاله [۱۱۰] یك بسته نرم افزاری جدید را برای حل عددی معادلات تأخیری با استفاده از روش های استاندارد گام به گام از قبیل روش رونگه -کوتا یا روش های چندگامی طراحی کردند. آنالیز پایداری روش های تك گامی برای حل عددی معادلات پانتوگراف در [۴۴] مورد بررسی قرار گرفت.
در [۹، ۱۲، ۱۳] یك روش جدید برای حل عددی معادله پانتوگراف از نوع خنثی با تأخیر وابسته به زمان با استفاده از روش رونگه -کوتای s- مرحله ای پیشنهاد شد. این روش بر پایه انتخاب خاصی از نقاط شبکه بود که توسط مؤلفین [۱۱] در رابطه با روش θ تولید شده بودند. به منظور حل معادلات تأخیری ایشیواتا [۱۳] و همکارانش دو روش عددی را با استفاده از شبکه بندی های خاص ارائه کردند. روش تقریب گویای $(۲m, m)$ قطعه ای با نقاط شبکه ای شبه یکنواخت [۴۸، ۵۰] و روش هم محلی گاوس با نقاط شبکه شبه اجباری [۴۹] . بیکر [۱۴] در مقاله [۷] به بررسی معادلات تأخیری فوق با استفاده از روش های متفاوت و مقایسه آنها پرداخت.
در این رساله از توابع دورگه لژاندر برای حل این گونه معادلات استفاده شده است.

۲.۱ حوزه های کاربرد معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال -دیفرانسیل تأخیری

در این قسمت، برخی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال دیفرانسیل تأخیری در زندگی واقعی را بیان می کنیم.

- اکولوژی [۱۵]

  مسأله معروف شکار وشکارچی [۹۴] و دینامیك جمعیت ها [۶۹، ۷۵].

- علم امراض [۱۶]

  شیوع بیماری های عفونی در افراد جامعه [۵].

- ایمنی شناسی [۱۷]

[۱۲] Wang
[۱۳] Ishiwata
[۱۴] Baker
[۱۵] Ecology
[۱۶] Epidemiology
[۱۷] Immunology

مدل های واکنش در برابر عفونت های ناشی از بیماری های ویروسی، مانند آنفولانزای نوع A، هپاتیت نوع B و عفونت های باکتریایی بر اثر تلقیح واکسن.[۴۰]

- فیزیولوژی [۱۸]

دستگاه تنفسی انسان و تنظیم غلظت خون [۲۸]، سیستم عصبی بدن.[۳۷]

- فیزیك [۱۹]

◁ انرژی لیزری سیستم تقویت نور بوسیله تشعشعات تحریک شده [۹۷].

◁ نوسانات ولتاژ و جریان در خطوط انتقال نیرو.

- فرایندهای تصادفی[۶]

تکان خوردن و جابجا شدن دست در افراد مبتلا به بیماری پارکینسون [۲۰].

- اقتصاد [۲۱]

سیاست سرمایه گذاری (مدل های حرکت دورانی بازار مواد اولیه [۸۴]).

- شبکه های عصبی [۲۲]

تأخیر زمانی بین زمان ارسال و دریافت پیام[۸۴].

- الکترودینامیك [۲۳]

◁ استودیو: در استودیو اجسامی با وزن ۵ تا ۳۶ کیلوگرم مانند دوربین فیلم برداری را می توان توسط دستگاهی موسوم به پانتوگراف تا ارتفاع ۵ متر به سرعت جابجا کرد [۸۹].

[۱۸] physiology
[۱۹] Physics
[۲۰] Parkinson
[۲۱] economics
[۲۲] neural network
[۲۳] Electro dynamic

شکل ۱.۰۱: پانتوگراف استودیو

◁ ترن الکتریکی : پانتوگراف وسیله ای است که جریان الکتریکی را از خطوط بالای ترن های الکتریکی جمع می کند.[۲۹]

۳.۱ تاریخچه مختصر روش های طیفی از آغاز تا کنون

روش های طیفی یك رده از گسسته سازی های خاص برای معادلات دیفرانسیل اند. اجزای کلیدی برای فرموله کردن آنها توابع آزمون (که توابع تقریب یا بسط نیز نامیده می شوند) و توابع تست (که توابع وزن نیز نامیده می شوند) می باشند.