بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

پایداری همریختی‌ها برای معادلات تابعی نوع ۳Dکشی – ینسن روی C^* – جبرهای سه تایی

سمیه بهلولی

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

مرداد ۱۳۸۹

۱۳۸۹/۹/ ۸

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

[illegible]

استاد راهنما:

دکتر سعید استادباشی

پایان نامه خانم : **سمیه بهلولی** به تاریخ **۸۹/۵/۱۲** شماره **۶-۱۰۵۶-۲**

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸/۲ (به حروف هجده و دو دهم)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر سعید استادباشی

۲- داور خارجی: دکتر علی عبادیان

۳- داور داخلی: دکتر رسول آقالاری

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب اذانچیلر

تقدیم به

گنجینه های زندگی ام :

پدر و مادر بی همتایم

و

خواهر و برادر عزیزم

تقدیر و تشکر

خدایم سپاس، سپاس مر تو را برای همه چیز، سپاس بر آنچه به من دادی، سپاس بر آنچه زمن گرفتی، تو خود می دانی که تنها پناهم تو بودی، در آن شب ها و روزهای سخت که خستگی طاقتم می برد و ناامیدی رمقم می گرفت تو بودی. تو بودی که توانم دادی و آن تلاش های بی وقفه و مداوم را ثمر دادی. خدایا مباد رهایم کنی که به الطافت ایمان دارم.

از استاد راهنمای گرامی جناب دکتر استادباشی که خالصانه مرا از گنجینه علم و تجربیات خود بهره مند ساخته و در نهایت صبرو شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده و در تمام مراحل مورد لطف و محبت قرار دادند، تشکر می کنم.

از محضر اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر عبادیان و جناب آقای دکترآقالاری که داوری این رساله را بر عهده داشتند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

از خانواده عزیزم که در تمام مراحل تحصیل با من همدل و همراه بودند و پشتوانه عاطفی محکمی برای من بودند و همیشه از دعای خیرشان بهره مند بودم، تشکر و قدردانی می نمایم.

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنیم A و B دوC^*- جبر سه‌تایی باشند. هرگاه نگاشت مختلط ـ خطی $H : A \to B$ برای هر $x, y, z \in A$ در شرط زیر صدق کند

$$H([x,y,z]) = [H(x), H(y), H(z)]$$

آنگاه نگاشت H یک C^*- همریختی جبر سه‌تایی است. همچنین نگاشت مختلط ـ خطی $\delta : A \to A$ یک C^*- مشتق جبر سه‌تایی است هرگاه به ازای هر $x, y, z \in A$

$$\delta([x,y,z]) = [\delta(x), y, z] + [x, \delta(y), z] + [x, y, \delta(z)]$$

در این پایان‌نامه همریختی‌های بین C^*- جبرهای سه‌تایی و مشتق‌های روی C^*- جبرهای سه‌تایی را برای معادله تابعی کوشی — ینسن زیر بررسی می‌کنیم

$$f\Big(\frac{x+y}{۲}+z\Big) + f\Big(\frac{x+z}{۲}+y\Big) + f\Big(\frac{y+z}{۲}+x\Big) = ۲[f(x)+f(y)+f(z)]$$

واژه‌های کلیدی: معادله تابعی ینسن، همریختی بین جبرهای شبه باناخ، پایداری هایرز— اولام— راسیاس، جبر $P-$ باناخ.

پیش گفتار

این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۱۵] در ۲ فصل نوشته شده است.

در فصل اول به تعاریف و مفاهیم اولیّه پرداخته شده است که شامل شش بخش می‌باشد که چهار بخش اول شامل مباحثی از آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی و جبرهای باناخ می‌باشد. در بخش پنجم C^*- جبرهای سه‌تایی معرفی کرده‌ایم. همچنین در بخش ششم مفاهیم مقدّماتی از پایداری و تاریخچه پایداری بیان شده است .

فصل دوم شامل چهار بخش است که قسمت اصلی پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد. در بخش اول پایداری $generalized\ Hyers-Ulam$ همریختی‌های بین C^*- جبرهای سه‌تایی را برای معادلات تابعی $D_\mu f(x,y,z)=0$ بررسی کرده‌ایم. در بخش دوم همریختی‌های بین C^*- جبرهای سه‌تایی را بیان نموده و در بخش سوم همریختی‌های بین C^*- جبرهای سه‌تایی یکدار را بررسی کرده‌ایم. در بخش آخر نیز مشتق‌های روی C^*- جبرهای سه‌تایی را بررسی کرده و همچنین پایداری $generalized\ Hyers-Ulam$ مشتق‌های روی C^*- جبرهای سه‌تایی را برای معادلات تابعی $D_\mu f(x,y,z)=0$ بیان نموده‌ایم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدّماتی

در این فصل تعاریف، قضایا و لم‌هایی را که در طول این پایان نامه ازآنالیز حقیقی و آنالیز تابعی به آنها نیاز خواهیم داشت را بیان می‌کنیم.

۱.۱ مفاهیم مقدّماتی از آنالیز تابعی و حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ مجموعهٔ ناتهی G را یک گروه[۱] می‌نامیم هرگاه عمل دوتایی $\circ$ چنان تعریف شده باشد بطوریکه به ازای هر $a, b, c \in G$ داشته باشیم:

۱) $a \circ b \in G$؛

۲) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$؛

۳) عنصری چون $e \in G$ وجود داشته باشد بقسمی که به ازای هر $a \in G$، $a \circ e = e \circ a = a$ (وجود عنصر همانی در G)؛

۴) به ازای هر $a \in G$، عنصری مثل $\hat{a}$ وجود داشته باشد بطوریکه $a \circ \hat{a} = \hat{a} \circ a = e$.

---

[۱] Group

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم $(G,\circ)$ یک گروه باشد بطوریکه به ازای هر $a,b \in G$ داشته باشیم:

$$a \circ b = b \circ a$$

در این صورت $(G,\circ)$ را یک گروه آبلی[۲] می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه آبلی و p یک عدد اول باشد، گروه G را p—بخش‌پذیر[۳] گوییم هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n و هر $g \in G$، عنصری مانند $y \in G$ وجود داشته باشد، بطوریکه $p^n y = g$.

تعریف ۴.۱.۱ گروه آبلی G را بخش‌پذیر گوییم، هرگاه به ازای هر $g \in G$ و هر عدد صحیح غیرصفر m عنصری مانند $y \in G$ وجود داشته باشد، بطوریکه $my = g$.

تعریف ۵.۱.۱ مجموعهٔ ناتهی V را یک فضای برداری[۴] (خطی) روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم هرگاه V با عملی (جمع برداری) یک گروه آبلی بوده و به ازای هر $v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، $\alpha v \in V$ باشد. (این عمل راضرب اسکالر می‌نامند.) همچنین به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $v, w \in V$ داشته باشیم:

۱) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$؛

۲) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$؛

۳) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$؛

۴) $ev = v$ (که در آن e نشان دهندهٔ عنصر یکه $\mathbb{F}$ تحت عمل ضرب می‌باشد.) اعضای V را بردار و اعضای $\mathbb{F}$ را اسکالر می‌نامیم.

---

[۲] Abelian group.

[۳] $p-divisible$

[۴] Vector space

تعریف ۶.۱.۱ گردایهٔ τ از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد:

الف) $\varnothing \in \tau$ و $X \in \tau$؛

ب) هرگاه به ازای $i = ۱, \ldots, n$، $V_i \in \tau$،آنگاه $V_۱ \cap V_۲ \cap \ldots \cap V_n \in \tau$؛

پ) هرگاه $\{V_\alpha\}$ گردایهٔ دلخواهی از اعضای τ(متناهی، شمارش‌پذیر، یا شمارش‌ناپذیر) باشد، آنگاه $\cup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را یک فضای توپولوژیک[۵] و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد گوییم X هاسدورف[۶] است هرگاه هر دو نقطهٔ متمایز $a, b \in X$، متعلق به دو مجموعهٔ باز مجزا باشند.

تعریف ۸.۱.۱ فضای توپولوژیک X رابه‌طور موضعی فشرده[۷] می‌نامند هرگاه برای هر $x \in X$ یک مجموعه باز U شامل x موجود باشد بطوریکه $\bar{U}$ فشرده باشد.

تعریف ۹.۱.۱ یک فضای متری[۸] مجموعه‌ای است مانند X که در آن یک تابع فاصله (یا متر) مانند ρ با خواص زیر تعریف شده است:

الف) به ازای هر x و y در X، $۰ \leq \rho(x,y) < \infty$؛

ب) $\rho(x,y) = ۰$ اگر و فقط اگر $x = y$؛

پ) به ازای هر x و y در X، $\rho(x,y) = \rho(y,x)$؛

---

[۵] Topological space
[۶] Husdorff
[۷] Locally compact
[۸] Metric space

ت) به ازای هر x و y و z در X، $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

تعریف ۱۰.۱.۱ دنبالهٔ $\{p_n\}$ در فضای متری (X,d) را یک دنبالهٔ کشی[۹] نامند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی صحیح مانند N باشد بطوریکه اگر $n \geq N$ و $m \geq N$، $d(p_n, p_m) < \varepsilon$.

تعریف ۱۱.۱.۱ یک فضای متری که در آن هر دنبالهٔ کشی همگرا باشد تام[۱۰] نام دارد.

قضیه ۱۲.۱.۱ هرگاه $|x| < 1$ باشد آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

برهان : به قضیهٔ ۲۰.۳ در مرجع [۳۹] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۳.۱.۱ هرگاه $|x| < 1$، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

چنانچه $|x| \geq 1$ باشد در این صورت سری واگراست.

برهان : به قضیهٔ ۲۶.۳ در مرجع [۳۹] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۴.۱.۱ فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری مختلط باشد در این صورت، سری $\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N باشد بطوریکه اگر $m \geq n \geq N$،

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \varepsilon$$

برهان : به قضیهٔ ۲۲.۳ در مرجع [۳۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. یک نیم نرم[۱۱] روی X تابع حقیقی مقدار ρ روی X است بطوریکه در شرایط زیر صدق می‌کند:

---

[۹] Cauchy sequence

[۱۰] Complete

[۱۱] Semi-norm

الف) به ازای هر $x \in X$، $\rho(x) \geq 0$؛

ب) به ازای هر اسکالر α و هر $x \in X$، $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$؛

پ) به ازای هر $x, y \in X$، $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

ρ یک نرم است هرگاه علاوه بر شرایط فوق در شرط زیر نیز صدق کند:

ت) هرگاه $\rho(x) = 0$ آنگاه $x = 0$.

نرم را معمولاً با نماد $\|.\|$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱ یک فضای برداری به همراه یک نرم $\|.\|$ را یک فضای نرمدار می‌نامیم. هر فضای نرمدار را می‌توانیم به عنوان یک فضای متریک در نظر بگیریم که در آن فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ x, y یا $d(x, y)$، همان $\|x - y\|$ است و توپولوژی آن را **توپولوژی حاصل از نرم یا توپولوژی یکنواخت**[12] **می‌نامیم.**

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشد ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) تعریف می‌کنیم:

الف) $X^* = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \mid \text{است } f \text{،} \mathbb{C}\text{— خطی و پیوسته} \right\}$؛

ب) $X^*_{\mathbb{R}} = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \text{است } f \text{،} \mathbb{R}\text{— خطی و پیوسته} \right\}$.

X^* رادوگان مختلط X و $X^*_{\mathbb{R}}$ را دوگان حقیقی X می‌نامیم.

فضای X^* با اعمال جمع و ضرب اسکالر که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک فضای برداری می‌باشد.

$$(f_1, f_2 \in X^* \; ; \; x \in X) \qquad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

[12] Uniform topology

$$(\alpha f)(x) = \alpha . f(x) \qquad (f \in X^* \ , \ x \in X \ , \ \alpha \in \mathbb{C})$$

تعریف ۱۸.۱.۱ گوییم تابع مختلط f بر فضای هاسدورف به طور موضعی فشردهٔ X در بی‌نهایت صفر می‌شود اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $K \subset X$ باشد به‌طوری که به ازای هر x غیرواقع در K، $|f(x)| < \varepsilon$.

ردهٔ تمام توابع پیوستهٔ f بر X که در بی‌نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۱.۱ هر فضای باناخ[۱۳] یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیلهٔ نرمش تام می‌باشد.

فضای باناخ X رامختلط (حقیقی) گویند هرگاه اسکالرهامختلط (حقیقی) باشند.

مثال ۲۰.۱.۱ هرگاه X یک فضای هاسدورف موضعافشرده باشد آنگاه $C_0(X)$ تحت نرم $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ باشند، $T : X \to Y$ را یک تبدیل خطی گوییم هرگاه

$$T(\alpha x + \beta Y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad , \quad (x, y \in X \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{F})$$

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای برداری مختلط باشند، نگاشت $f : X \to Y$ را مزدوج خطی گوییم هرگاه برای تمام $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$،

$$f(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha} f(x) + \bar{\beta} f(y)$$

---

[۱۳] Banach space

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای خطی باشند، نگاشت $f : X \to Y$ را کشی — ینسن گوییم هرگاه نگاشت f به ازای هر $x, y \in X$ در معادلات زیر صدق کند.

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$۲f(\frac{x+y}{۲}) = f(x) + f(y)$$

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای خطی باشند، نگاشت $f : X \to Y$ را نگاشت جمعی گوییم هرگاه نگاشت f در معادله تابعی کشی صدق کند به عبارت دیگر در معادله تابعی زیر صدق کند

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad , \qquad (x, y \in X)$$

گزاره ۲۵.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای خطی باشند و نگاشت $f : X \to Y$ جمعی باشد در این صورت برای هر $x \in X$ و $r \in \mathbb{Q}$

$$f(rx) = rf(x)$$

برهان : چون نگاشت f جمعی است لذا به ازای هر $x, y \in X$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱)$$

با فرض $x = y = ۰$ در رابطهٔ (۱)

$$f(۰) = ۰ \qquad (۲)$$

حال با جایگزینی $-x$ به جای y در رابطهٔ (۱) و استفاده از رابطهٔ (۲) خواهیم داشت

$$f(-x) = -f(x) \quad , \qquad (x \in X) \qquad (۳)$$

با استقرا روی n داریم:

$$f(x_۱+x_۲+...+x_n)=f(x_۱)+f(x_۲)+...+f(x_n)$$

با فرض $x_j=x$ به ازای هر $۱\leq j\leq n$ در رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$$f(nx)=nf(x)\quad,\qquad(x\in X,n\in\mathbb{Z})\tag{۴}$$

فرض کنیم $n(\neq ۰)$ متعلق به $\mathbb{Z}$ باشد. با جایگزینی x با $\frac{x}{n}$ در رابطهٔ (۴)،

$$f(\tfrac{x}{n})=\tfrac{۱}{n}f(x)\quad,\qquad(x\in X,n\in\mathbb{Z})\tag{۵}$$

حال فرض کنیم $r=\frac{m}{n}$ عدد گویایی باشد. در این صورت با استفاده از روابط (۴) و (۵) خواهیم داشت:

$$f(rx)=f(m\cdot\tfrac{x}{n})=mf(\tfrac{x}{n})=\tfrac{m}{n}f(x)=rf(x)$$

در نتیجه برای هر $x\in X$ و برای $r\in\mathbb{Q}$،

$$f(rx)=rf(x).$$ ■

لم ۲۶.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای خطی و $f:X\to Y$ نگاشت جمعی و برای هر $\mu\in\mathbb{T}^۱:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=۱\}$ و هر $x\in X$ ، $f(\mu x)=\mu f(x)$ باشد. در این صورت نگاشت f مختلط ـ خطی می‌شود.

برهان : به قضیهٔ ۱.۲ در مرجع [۱۸] مراجعه شود. ■

قضیه ۲۷.۱.۱ نگاشت پیوسته حقیقی مقدار f را با ضابطهٔ زیر در نظر می‌گیریم :

$$f(x)=\begin{cases}xlog_۲^{(x+۱)} & x\geq ۰\\ \\ xlog_۲^{|x-۱|} & x<۰\end{cases}$$

در این صورت به ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$

$$|۲f\Big(\frac{x+y}{۲}\Big)-f(x)-f(y)|\leq ۲(|x|+|y|)$$

همچنین مقدار $\frac{|f(x)-H(x)|}{|x|}$ برای هر $x \neq ۰$ و هر نگاشت جمعی $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بی‌نهایت می‌شود.

برهان : به قضیهٔ ۲ در مرجع [۱۲] مراجعه شود. ∎

تعریف ۲۸.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. مجموعهٔ تمامی نگاشت‌های خطی از X به توی Y را با $L(X,Y)$ نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم $L(X,X) = L(X)$.

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدارباشند. به ازای هر $T \in L(X,Y)$، تعریف می‌کنیم:

$$||T|| = sup\{||Tx|| \ : \ ||x|| \leq ۱ \ , \ x \in X\} \tag{٦}$$

هرگاه $||T|| < \infty$، آنگاه T را نگاشت خطی کراندار می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. مجموعهٔ تمامی نگاشت‌های خطی کراندار از X به توی Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم. با اعمال جمع وضرب اسکالر به صورت زیر، $B(X,Y)$ به یک فضای خطی تبدیل می‌شود:

$$(T_۱ + T_۲)(x) = T_۱(x) + T_۲(x) \ \ , \quad (T_۱, T_۲ \in B(X,Y) \ , \ x \in X)$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x) \ \ , \quad (T \in B(X,Y) \ , \ x \in X \ , \ \alpha \in \mathbb{F})$$

در حالت خاص که $X = Y$ باشد، $B(X,Y)$ را به صورت $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳۱.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند باتعریف $||T||$ به صورت رابطهٔ (٦)، $B(X,Y)$ یک فضای نرمدار است و اگر Y یک فضای باناخ باشد آنگاه $B(X,Y)$ یک فضای باناخ خواهد بود.

برهان : به قضیهٔ ۱.۴ در مرجع [۴۱] مراجعه شود. ∎

تذکر ۳۲.۱.۱ در صورتیکه فضای Y میدان اسکالرها باشد، $B(X,Y)$ فضای دوگان X^* از X می‌شود و همچنین چون میدان اسکالرها یک فضای متری تام است پس بنا به قضیهٔ بالا X^* یک فضای باناخ می‌شود.

قضیه ۳۳.۱.۱ به ازای تبدیل خطی T از فضای خطی نرمدار X به‌توی فضای خطی نرمدار Y، هر یک از سه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می‌کند:

الف) T کراندار است؛

ب) T پیوسته است؛

پ) T در یک نقطه از X پیوسته است.

برهان : به قضیهٔ ۴.۵ در مرجع [۴۰] مراجعه شود. ■

تعریف ۳۴.۱.۱ فرض کنیم H یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک ضرب داخلی[۱۴] روی H نگاشتی است مانند $u : H \times H \to \mathbb{F}$ به طوری که برای هر x,y,z در H و هر α,β در $\mathbb{F}$، داشته باشیم:

۱) $u(\alpha x + \beta y, z) = \alpha u(x,z) + \beta u(y,z)$؛

۲) $u(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} u(x,y) + \bar{\beta} u(x,z)$؛

۳) $u(x,x) \geq 0$؛

۴) $u(x,y) = \overline{u(y,x)}$؛

۵) اگر $u(x,x) = 0$، آنگاه $x = 0$.

---

[۱۴] Lnner product

معمولا ضرب داخلی را با نماد $<.,.>$ نشان می‌دهند و زوج مرتب $(H, <.,.>)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌نامند.

تعریف ۳۵.۱.۱ فرض کنیم H یک فضای ضرب داخلی باشد از ضرب داخلی می‌توان به یک نرم رسید که آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$||h|| = <h, h>^{\frac{1}{2}} \qquad (h \in H)$$

حال اگر فضای H نسبت به این نرم کامل باشد، H را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

۲.۱ اندازه‌های مثبت

تعریف ۱.۲.۱ گردایه M از زیرمجموعه‌های X را یک $\sigma-$ جبر نامیم اگر M دارای خواص زیر باشد:

۱) $X \in M$؛

۲) هرگاه $A \in M$ باشد، آنگاه $A^c \in M$ که در آن A^c متمم A نسبت به X است؛

۳) هرگاه $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$، $A_n \in M$، آنگاه $A \in M$.

تعریف ۲.۲.۱ هرگاه M یک $\sigma-$ جبر در X باشد، آنگاه X رایک فضای اندازه‌پذیر[۱۵] و اعضای M را مجموعه‌های اندازه‌پذیر[۱۶] در X می‌نامیم.

[۱۵] Measueable space

[۱۶] Measureable set