دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

ایدآل‌های قویاًتحویل‌ناپذیر در حلقه‌های تعویض‌پذیر

استادان راهنما

دکتر سید جمال هاشمی‌زاده دزفولی و دکتر رستم محمدیان

پژوهشگر

مسلم کرم پور

مهر/۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: کرم‌پور نام: مسلم

عنوان: ایدآل‌های قویاًتحویل‌ناپذیر در حلقه‌های تعویض‌پذیر

استادان راهنما: دکتر سید جمال هاشمی‌زاده دزفولی و دکتر رستم محمدیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر/۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۹۷

واژگان کلیدی: حلقه‌ارزیاب گسسته، حلقه حسابی، حلقه پروفر، توسیع تخت وفادار، ایدآل‌های تحویل‌ناپذیر، ایدآل‌های قویاًتحویل‌ناپذیر.

چکیده

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول تعاریف و مفاهیمی که برای فهم بهتر مطالب دو فصل دیگر مورد نیاز است، آمده است. در فصل دوم ابتدا به طور کامل حلقه‌های ارزیاب گسسته (DVR) مورد بررسی قرار گرفته‌اند. سپس حلقه‌های حسابی و پروفر بررسی شده است. در انتهای این فصل نیز ارتباط حلقه‌های حسابی و پروفر بررسی شده و نتیجه اصلی این فصل این است که حلقه R حسابی است، اگر و تنها اگر پروفر باشد. در فصل سوم ایدآل‌های تحویل‌ناپذیرو ایدآل‌های قویاًتحویل‌ناپذیر تعریف شده و در لم‌ها و قضایایی ویژگی‌های آنها مورد بررسی قرار گرفته است. و در انتهای این فصل ایدآل‌های قویاًتحویل‌ناپذیر در حلقه‌های نوتری مورد بررسی قرار گرفته است.

تقدیم به روح پدر بزرگم کسی که وجودش آرامش زندگی ام بود اما...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. وسلام و درود بر محمّد (ص) و خاندان پاك او.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از کلیه آموزگاران و دبیرانی که در دوران ابتدایی و راهنمایی و دبیرستان برای اینجانب زحمت کشیدند و با راهنمایی‌های ارزنده‌شان راه و رسم زندگی را در این وادی پر فراز و نشیب به من نشان دادند تشکر و قدردانی کنم.

در ادامه از اساتید گرانقدرم آقایان دکتر سید جمال هاشمی‌زاده دزفولی و دکتر رستم محمدیان، که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودندو زحمات راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند تشکر کنم.

از زحمات اساتید مهربانم، سرکار خانم دکتر شیرعلی، دکتر آذرنگ، دکتر فروزان‌فر و دکتر رضایی که در این دوره افتخار تحصیل در خدمت آنها را داشته‌ام سپاس‌گذارم و از خداوند منان سلامتی روزافزونشان را خواستارم.

همچنین جا دارد از دوست عزیزم جناب آقای فرهاد قربانی که در کار تایپ این پایان‌نامه به من کمك کرد تشکر ویژه‌ای داشته باشم.

و با تقدیر و تشکر شایسته از پدر و مادر دلسوز و مهربانم که نه می‌توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه‌بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. خدایا توفیقم ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست‌بودنشان بگذرانم.

مسلم کرم پور

مهر/۱۳۹۲

فهرست مطالب

مقدمه

آنچه در این پایان‌نامه آمده یك پژوهش روی مقاله‌ای است که در سال ۲۰۰۰ میلادی توسط $William J. Heizer$ و $Louis J. Ratliff$ و $David E. Rush$ مطرح شده است.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است در فصل اول این پایان‌نامه اصطلاحات و تعاریف و مفاهیم که به ما در فهم بهتر مطالب دو فصل دیگر کمك می‌کنند، آورده شده است. هر چند مطالب این فصل جهت یادآوری است، ولی اکثر تعریف‌ها با مثال بیان شده‌اند و صورت قضایای مورد نیاز که پایه‌ای برای فصل‌ها و مطالب بعدی است با ذکر مرجع نوشته شده‌اند.

در فصل دوم ابتدا مفهوم حلقه‌های ارزیاب گسسته (DVR) را بیان می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که موضعی‌سازی R در P، یعنی R_P در شرایطی که اگر R یك UFD و $P =< a >$ یك ایدآل اول R باشد، یك حلقه ارزیاب گسسته است. از این گزاره در فصل سوم برای اثبات یك لم مهم استفاده می‌شود. در نهایت پس از تعریف حلقه‌های حسابی و پروفر و بیان ویژگی‌های آنها روابطی که بین حلقه‌های حسابی و پروفر وجود دارد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم که حلقه R حسابی است اگر و تنها اگر پروفر باشد.

در فصل سوم ابتدا دو تعریف از ایدآل‌های تحویل‌ناپذیر و تعریف ایدآل‌های قویاً تحویل‌ناپذیر را بیان می‌کنیم. سپس رابطه میان خانواده‌هایی از ایدآل‌های تحویل‌ناپذیر، ایدآل‌های قویاً تحویل‌ناپذیرو ایدآل‌های اول در حلقه تعویض‌پذیر R را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در یك لم نشان می‌دهیم که هر ایدآل اول قویاً تحویل‌ناپذیر است و هر ایدآل قویاً تحویل‌ناپذیر، تحویل‌ناپذیر است. همچنین در یك قضیه بررسی می‌کنیم که اگر I یك ایدآل قویاً تحویل‌ناپذیر $M-$ ابتدایی در حلقه شبه موضعی (R, M) و I به طور کامل مشمول در $(I :_R M)$ باشد، آن‌گاه:

۱. $(I :_R M)$، ایدآل اصلی است.

۲. $I = (I :_R M)M$.

۳. برای هر ایدآل J در R نتیجه می‌شود که $I \subseteq J$ یا $J \subseteq (I :_R M)$.

نتیجه اصلی ما قضیه‌ای است که نشان می‌دهد اگر I یك ایدآل غیر اول با $ht(I) > ۰$ در حلقه نوتری R باشد، آن‌گاه I قویاً تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر I ابتدایی باشد و R_P، حلقه ارزیاب گسسته باشد هر جا $P = \sqrt{I}$ و $I = P^n$ برای هر عدد صحیح $n > ۱$.

مسلم کرم‌پور

مهر/۱۳۹۲

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم، اصطلاحات و تعاریفی که به ما در فهم بهتر مطالب دو فصل دیگر کمك می‌کنند، آورده شده است. توجه کنیم که همه‌ی حلقه‌های مورد بحث در این پایان‌نامه تعویض‌پذیر و یکدار فرض شده‌اند.

۱.۱ مشبکه و مجموعه کاملاً مرتب

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم P یك مجموعه ناتهی باشد یك ترتیب جزئی روی P رابطه‌ای دوتایی چون، $\leqslant$ است به طوری که براي هر $x, y, z \in P$:

۱. بازتابی $(x \leqslant y)$

۲. پاد تقارنی $(x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y)$

۳. متعدی $(x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$

مجموعه P را همراه با رابطه ترتیب جزئی $\leqslant$، مرتب جزئی یا جزئی مرتب نامیده و با نماد $(P, \leqslant)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. یك کران بالای زیر مجموعه B از A عنصری است مانند $d \in A$ به طوری که برای هر $b \in B$ داشته باشیم، $b \leqslant d$. زیر مجموعه ناتهی B از A که با $\leqslant$، خطی مرتب باشد یك زنجیر در A نام دارد.

تعریف ۳.۱.۱. هرگاه R یك ترتیب جزئی از A باشد، آن‌گاه عضوهای $a, b \in A$ را قابل مقایسه گویند، هرگاه: $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$. توجه کنیم که دو عضو یك مجموعه مرتب جزئی لزوماً قابل مقایسه نیستند.

تعریف ۴.۱.۱. یك ترتیب جزئی از مجموعه A که هر دو عنصرش قابل مقایسه باشند، یك ترتیب خطی نامیده می‌شود.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنیم A، مجموعه توانی (مجموعه همه زیر مجموعه‌های) مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. تعریف می‌کنیم، $C \leqslant D \Leftrightarrow C \subset D$، در این صورت A جزئی مرتب است، ولی خطی مرتب نیست. زیرا $\{۱, ۲\}$ و $\{۳, ۴\}$ قابل مقایسه نیستند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $(A, \leqslant)$ یك مجموعه جزئی مرتب باشد عنصر $a \in A$ در A ماکزیمال است اگر به ازای هر $c \in A$، که با a قابل مقایسه باشد داشته باشیم، $c \leqslant a$. به عبارت دیگر به ازای هر $c \in A$، هرگاه $a \leqslant c$، آن‌گاه $a = c$. توجه کنیم که اگر a ماکزیمال باشد لازم نیست به ازای هر $c \in A$، $c \leqslant a$. زیرا ممکن است $c \in A$ ای غیر قابل مقایسه با a وجود داشته باشد. به علاوه یك مجموعه ممکن است عنصر ماکزیمال بسیار داشته باشد یا اصلاً نداشته باشد.(مثلاً $\mathbb{Z}$ با ترتیب معمولی)

تعریف ۷.۱.۱. یك مشبکه عبارت است از یك مجموعه جزئی مرتب مانند A، به طوری‌که هر زیر مجموعه دو عضوی از آن مانند (a, b) دارای کوچك ترین کران بالا و بزرگ ترین کران پائین باشد. $\wedge$ نشان‌دهنده کوچك‌ترین کران بالا و $\vee$ نشان‌دهنده بزرگ‌ترین کران پایین است. هرگاه R یك ترتیب جزئی بر P و $a, b \in R$ باشد می‌نویسیم، $a \leqslant b$. بنابراین $a \wedge b$ و $a \vee b$ را به این صورت تعریف می‌کنیم: هرگاه $a \leqslant b$، آن‌گاه $a \wedge b = a$ و $a \vee b = b$.

لم ۸.۱.۱. *لم زرن: هرگاه A یك مجموعه جزئی مرتب ناتهی باشد به طوری‌که هر زنجیر در A کران بالایی در A داشته باشد، آن‌گاه A شامل عضو ماکسیمال است.*

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم B زیر مجموعه‌ای ناتهی از مجموعه جزئی مرتب $(A, \leqslant)$ باشد عنصر $c \in B$ کوچك‌ترین عنصر (مینیمم) B است اگر به ازای هر $b \in B$، $c \leqslant b$.

هرگاه هر زیر مجموعه نا تهی A کوچك‌ترین عنصر داشته باشد، آن‌گاه گویند A خوش‌ترتیب است. هر مجموعه خوش‌ترتیب مرتب خطی است. (ولی عکس آن درست نیست). زیرا به ازای هر $a, b \in A$ زیر مجموعه $\{a, b\}$ باید کوچك‌ترین عنصر داشته باشد، یعنی $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$.

تعریف ۱۰.۱.۱. T را یك مجموعه کاملاً مرتب گویند، هرگاه ترتیب جزئی $(T, \leqslant)$ دارای خاصیت مقایسه‌پذیری باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. مشبکه $(L, \vee, \wedge)$ رایك مشبکه توزیعی گوئیم ($\wedge$ نشان‌دهنده کوچك‌ترین کران بالا و $\vee$ نشان‌دهنده بزرگ‌ترین کران پایین است.) اگر برای هر $x, y, z \in L$ داشته باشیم:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

یا

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

فرض کنیم $x \leqslant y \leqslant z$. دراین‌صورت با توجه به تعریف ۷.۱.۱ به آسانی روابط بالا اثبات می‌شوند.

مثال ۱۲.۱.۱. با توجه به تعاریف بالا هر مجموعه کاملاً مرتب یك مشبکه توزیعی است.

۲.۱ حساب ایدآل‌ها

در این قسمت ابتدا ویژگی‌های جمع و ضرب ایدآل‌ها آورده شده و در ادامه با توجه به اهمیت تقسیم ایدآل‌ها در فصل سوم، مفهوم تقسیم ایدآل‌ها را بیان می‌کنیم. و در انتهای این قسمت مفهوم رادیکال یك ایدآل مورد بررسی قرار گرفته است.

نکته ۱.۲.۱. ویژگی‌های جمع و ضرب ایدآل‌ها:

۱. اگر $\{I_\lambda\}_{\lambda\in A}$ یك خانواده از ایدآل‌های حلقه R باشد، آن‌گاه برای هر $\lambda \in A$،

$$I_\lambda \subseteq \sum_{\lambda\in A} I_\lambda$$

۲. اگر I و J دو ایدآل حلقه R باشند، آن‌گاه $I + J = J + I$.

۳. اگر I و J و K ایدآل‌های حلقه R باشند، آن‌گاه $I + (J + K) = (I + J) + K$.

۴. اگر I و J دو ایدآل حلقه R باشند، آن‌گاه $IJ = JI \subseteq I \cap J$.

۵. اگر I و J و K ایدآل‌های حلقه R باشند، آن‌گاه $(IJ)K = I(JK)$.

۶. اگر I و J و K ایدآل‌های حلقه R باشند، آن‌گاه $I(J + K) = IJ + IK$.

برهان. برای اثبات این ویژگی‌ها تذکر ۲ . ۲۸ ازمرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم I و J دو ایدآل حلقه R باشند. در این صورت حاصل تقسیم I بر J را که با $(I : J)$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(I : J) = \{r \in R \mid rx \in I, \forall x \in J\}$$

به سادگی دیده می‌شود که $(I:J)$، خود نیز یک ایدآل R است. وهمچنین داریم: $I \subseteq (I:J)$. در حالت خاص که $I = ۰$، حاصل تقسیم

$$(۰:J) = \{r \in R \mid rx = ۰, \forall x \in J\}$$

پوچساز J نامیده می‌شود. و با $Ann(J)$ یا $Ann_R(J)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم I یک ایدآل حلقه تعویض‌پذیر و یکدار R باشد. رادیکال I را که با $\sqrt{I}$ یا $Rad(I)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}\ s.t\ r^n \in I\}$$

در حالت خاص اگر $I = ۰$، آنگاه به جای $\sqrt{I}$ می‌نویسیم، $\sqrt{۰}$ و آن را رادیکال پوچ حلقه R می‌نامیم و توجه می‌کنیم که:

$$\sqrt{۰} = \{x \in R \mid \exists n \in N\ s.t\ x^n = ۰\} = N(R)$$

۳.۱ ایدآل‌های حاصل از تحدید و توسیع نسبت به یک همریختی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم R و S دو حلقه و $f : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد در این صورت:

۱. اگر J یک ایدآل S باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(J) = \{r \in R : f(r) \in J\}$ یک ایدآل R است این ایدآل را با J^c نشان داده و آن را ایدآل حاصل از تحدید J نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \to S$ می‌نامیم.

۲. اگر I یک ایدآل R باشد، آن‌گاه $f(I)S$، یعنی ایدآل تولید شده توسط $f(I)$ در S، یک ایدآل S می‌باشد. این ایدآل را با I^e نشان داده و آن را ایدآل حاصل از توسیع I نسبت به همریختی حلقه‌ای $f : R \to S$ می‌نامیم.

لم ۱.۳.۲. *فرض کنیم R و S دو حلقه و $f : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. و I ایدآل R و J ایدآل S باشد در این صورت با توجه به نمادهای I^e و J^c در تعریف قبل داریم:*

۱. $I \subseteq I^{ec}$

۲. $J^{ce} \subseteq J$

۳. $I^e = I^{ece}$

۴. $J^{cec} = J^c$

برهان. لم ۴.۲۰ ۴ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

۴.۱ ایدآل‌های ماکسیمال و اول

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد در این صورت مجموعه ایدآل‌های سره حلقه R نسبت به رابطه شمول یک مجموعه مرتب است. هر عضو ماکسیمال این مجموعه مرتب را یک ایدآل ماکسیمال حلقه R می‌نامند.

به عبارت دیگر ایدآل M در حلقه R را یک ایدآل ماکسیمال نامیم هرگاه:

۱. $M \neq R$.

۲. اگر N یک ایدآل R باشد، به طوری‌که $M \subseteq N \subseteq R$، آن‌گاه $M = N$ یا $N = R$.

مثال ۲.۴.۱. به ازای هر عدد اول p، $p\mathbb{Z}$ یک ایدآل ماکسیمال $\mathbb{Z}$ است.

مثال ۳.۴.۱. اگر F یک میدان باشد آنگاه $\{۰\}$ یک ایدآل ماکسیمال F است.

قضیه ۴.۴.۱. *در هر حلقه یکدار حداقل یک ایدآل ماکسیمال وجود دارد.*

برهان. قرار می‌دهیم $X = \{I \mid R$یك ایدآل سره$I\}$، X بارابطه شمول یك مجموعه مرتب است . برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم، X با رابطه شمول دارای عضو ماکسیمال است. برای این منظور بنا به لم زرن کافی است نشان دهیم هر زنجیر در X دارای کران بالایی در X است. پس فرض کنیم $\{I_k\}_{k\in A}$ یك زنجیر در X باشد. قرار می‌دهیم: $I = \cup_{k\in A} I_k$، در این صورت I یك کران بالا برای این زنجیر در X است. $\square$

قضیه ۵.۴.۱. *فرض کنیم R یك حلقه و I یك ایدآل در R باشد. در این صورت هر ایدآل ماکسیمال $\frac{R}{I}$ به فرم $\frac{M}{I}$ است به طوری‌که M ایدآل ماکسیمال R شامل I است.*

نتیجه ۶.۴.۱. *اگر R یك حلقه تعویض‌پذیر ویکدار باشد، آن‌گاه هر ایدآل سره R مشمول در یك ایدآل ماکسیمال می‌باشد.*

نتیجه ۷.۴.۱. *فرض کنید R یك حلقه تعویض‌پذیر ویکدار باشد و $a \in R$ در این صورت $a \in U(R)$ اگر و تنها اگر برای هر ایدآل ماکسیمال M، a عضو M نباشد.*

تعریف ۸.۴.۱. ایدآل سره P در حلقه تعویض‌پذیر R اول نامیده می‌شود، هرگاه:

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \qquad \text{یا} \qquad b \in P$$

مثال ۹.۴.۱. به ازای هر عدد اول p، ایدآل $p\mathbb{Z}$، یك ایدآل اول $\mathbb{Z}$ است. همچنین $\{۰\}$ یك ایدآل اول $\mathbb{Z}$ است.

نکته ۱۰.۴.۱. به طور کلی در هر حوزه صحیح ایدآل $\{۰\}$ یك ایدآل اول است. در واقع ایدآل $\{۰\}$ در یك حلقه تعویض‌پذیر و یکدار ایدآل اول است اگر و تنها اگر حلقه، یك حوزه صحیح باشد.

نمادگذاری: مجموع ایدآل‌های اول حلقه R را با $Spec(R)$ نمایش می‌دهند:

$$Spec(R) = \{P \mid R \quad \text{ایدآل اول} \quad P\}$$

نمادگذاری: فرض کنید R یك حلقه باشد در این صورت مجموع همه ایدآل‌های ماکسیمال R را با $Max(R)$ نشان می‌دهیم و داریم $Max(R) = \{M \mid M \text{ایدآل ماکسیمال} R\}$.

تعریف ۱.۴.۱۱. فرض کنید R یك حلقه باشد در این صورت اشتراك همه ایدآل‌های ماکسیمال R را با $Jac(R)$ یا به طور ساده با $J(R)$ نمایش می‌دهیم:

$$J(R) = \bigcap_{M \in Max(R)} M$$

قضیه ۱.۴.۱۲. *فرض کنید I یك ایدآل سره حلقه تعویض‌پذیر و یکدار R باشد در این صورت I اول است اگر و تنها اگر حلقه $\frac{R}{I}$ دامنه صحیح باشد.*

برهان. لم ۳۰۲۳ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

نکته ۱.۴.۱۳. برای هر حلقه همواره داریم: $Max(R) \subseteq Spec(R)$. به طور کلی در حلقه‌های تعویض‌پذیر و یکدار آرتینی، $Max(R) = Spec(R)$. حلقه‌های متناهی حالت خاصی از حلقه‌های آرتینی هستند. همچنین در حلقه‌های منظم همواره داریم: $Max(R) = Spec(R)$.

۱.۵ حلقه‌های موضعی

تعریف ۱.۵.۱. به حلقه‌ای که دقیقاً یك ایدآل ماکسیمال دارد حلقه شبه موضعی می‌گویند.

مثال ۱.۵.۲. هر میدان یك حلقه شبه موضعی است.

مثال ۱.۵.۳. اگر M یك ایدآل ماکسیمال حلقه R باشد، آن‌گاه حلقه‌ی خارج‌قسمتی $\frac{R}{M^n}$ به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ یك حلقه شبه‌موضعی است. بنابراین به ازای هر عدد اول p، چون $M = p\mathbb{Z}$ یك ایدآل ماکسیمال $\mathbb{Z}$ است پس برای هر $n \geq 1$، $\frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{(p\mathbb{Z})^n}$ یك حلقه‌ی موضعی است.

تعریف ۱.۵.۴. به حلقه شبه موضعی که نوتری باشد، حلقه موضعی گویند.

ملاحظه ۵.۵.۱. *عبارت (R,M) حلقه‌ای موضعی است که در آن R حلقه موضعی و M ایدآل ماکسیمال منحصر به فرد است. میدان مانده‌ای حلقه موضعی (R,M)، میدان $\frac{R}{M}$ است. در حلقه موضعی (R,M) داریم $J(R)=M$.*

۶.۱ مجموعه بسته ضربی

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید R یك حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد و $S \subseteq R$، گوئیم S یك مجموعه بسته ضربی یا به اختصار یك مجموعه (MC) است، هرگاه:

۱. $۱ \in S$

۲. $a,b \in S \Rightarrow ab \in S$

مثال ۲.۶.۱. فرض کنیم a یك عضو دلخواه حلقه R باشد در این صورت:

$$S=\{۱,a,a^۲,...\}$$

یك مجموعه بسته ضربی است.

مثال ۳.۶.۱. فرض کنیم I یك ایدآل دلخواه حلقه R باشد. در این صورت $۱+I=\{۱+i \mid i\in I\}$ یك مجموعه بسته ضربی است.

قضیه ۴.۶.۱. *اگر P یك ایدآل اول باشد، آنگاه $S=R-P$ یك مجموعه بسته ضربی است.*

برهان. شرط اول: فرض کنیم $۱ \in P$ چون P یك ایدآل سره است پس، $۱ \in R-P$ لذا شرط اول برقرار است یعنی $۱ \in S$.
شرط دوم: فرض کنیم $a,b \in S$ در نتیجه $a,b \notin P$ چون P اول است،پس $ab \notin P$ در نتیجه $ab \in R-P=S$. □

مثال ۱.۶.۵. فرض کنید $\{P_k\}_{k\in A}$ یك خانواده از ایدآل‌های اول R باشد. در این صورت $S = R - \cup_{k\in A} P_k$ یك مجموعه بسته ضربی است.

قضیه ۱.۶.۶. *فرض کنیم R یك حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد و I ایدآل R و $S \subseteq R$ یك مجموعه‌ی بسته ضربی باشد. چنانچه $I \cap S = \varnothing$، آن‌گاه ایدآل اول P موجود است به طوری‌که $P \cap S = \varnothing$ و $I \subseteq P$.*

برهان. قضیه ۴ ۰ ۶ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۱.۶.۷. اگر I یك ایدآل سره حلقه تعویض‌پذیر و یکدار R باشد. در این صورت مجموع ایدآل‌های اول R شامل I رابا $Var(I)$ یا $V(I)$ نمایش می‌دهند:

$$Var(I) = \{P \in Spec(R) \mid I \subseteq P\}$$

۱.۷ ایدآل‌های ابتدایی و P-ابتدایی

تعریف ۱.۷.۱. ایدآل سره Q در حلقه تعویض‌پذیر و یکدار R ابتدایی نامیده می‌شود، هرگاه:

$$ab \in Q \Rightarrow a \in Q \quad \text{یا} \quad \exists n \in N \quad s.t \quad b^n \in Q$$

به عبارت دیگر ایدآل سره Q یك ایدآل ابتدایی است، هرگاه:

$$ab \in Q \Rightarrow a \in Q \quad \text{یا} \quad b \in \sqrt{Q}$$

ملاحظه ۱.۷.۲. *با توجه به تعریف بالا در هر حلقه تعویض‌پذیر و یکدار هر ایدآل اول، ابتدایی است.*

لم ۱.۷.۳. *۱. فرض کنید I ایدآلی از حلقه تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت I ابتدایی است اگر و تنها اگر حلقه $\frac{R}{I}$ حلقه صفر نباشد و هر مقسوم‌علیه صفر $\frac{R}{I}$ پوچ‌توان باشد.*

۲ . *فرض کنید $f : R \to S$ همریختی حلقه‌ای تعویض‌پذیر و Q ایدآل ابتدایی S باشد در این صورت $Q^c := f^{-1}(Q)$ ایدآل ابتدایی R است.*

برهان. لم ۴.۳۰ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

لم ۴.۷.۱. *فرض کنید Q یك ایدآل ابتدایی حلقه تعویض‌پذیر R باشد در این صورت $\sqrt{Q} =: P$ ایدآل اول R است و می‌گوئیم Q، P − ابتدایی است. به علاوه P کوچك‌ترین ایدآل اول R است که Q را شامل می‌شود. (زیرا هر ایدآل اول R که شامل Q باشد، باید P را نیز شامل شود. لذا P ایدآل اول مینیمال منحصر به فرد Q است).*

برهان. لم ۴.۵۰ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

۸.۱ ایدآل تحویل‌ناپذیر

تعریف ۱.۸.۱. ایدآل سره I در حلقه R را تحویل‌ناپذیر گوئیم هرگاه نتوان I را به صورت اشتراك دو ایدآل اکیداً بزرگ‌تر از I نوشت. به عبارت دیگر ایدآل سره I تحویل‌ناپذیر است هرگاه گزاره شرطی زیر برقرار باشد:

$$I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1 \quad \text{یا} \quad I = I_2$$

مثال ۲.۸.۱. هر ایدآل اول یك حلقه تعویض‌پذیر یك ایدآل تحویل‌ناپذیر است.

برهان. فرض کنیم P یك ایدآل اول حلقه R باشد و $P = I_1 \cap I_2$ در این صورت چون P ایدآل اول است پس $I_2 = P$ یا $I_1 = P$. □

قضیه ۳.۸.۱. *فرض کنید R یك حلقه تعویض‌پذیر نوتری باشد. در این صورت هر ایدآل سره R برابر با اشتراك تعداد متناهی ایدآل تحویل‌ناپذیر R است.*

برهان. قضیه ۴.۳۳ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

قضیه ۱.۸.۴. *در هر حلقه تعویض‌پذیر یکدار نوتری، هر ایدآل تحویل‌ناپذیر یك ایدآل ابتدایی است.*

برهان. فرض کنیم R یك حلقه نوتری و I یك ایدآل تحویل‌ناپذیر R باشد نشان می‌دهیم که I ابتدایی است. برای این منظور فرض کنیم $ab \in I$ و $b \notin I$ نشان می‌دهیم به ازای عدد طبیعی n داریم:

$$a^n \in I$$

چون R نوتری است زنجیر زیر از ایدآل‌های R ایستا است:

$$(I : a) \subseteq (I : a^۲) \subseteq (I : a^۳) \subseteq ...$$

پس عدد طبیعی n وجود دارد به طوری‌که $(I : a^n) = (I : a^{n+۱})$. حال ادعا می‌کنیم که $I = (I + Ra^n) \cap (I + Ra^{n+۱})$. برای نشان دادن این تساوی کافیست نشان دهیم $(I + Ra^n) \cap (I + Rb) \subseteq I$ لذا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x \in (I + Ra^n) \cap (I + Rb) \Rightarrow x = i_۱ + ra^n = i_۲ + r'b$$

$$\Rightarrow xa = i_۱a + ra^{n+۱} = i_۲a + r'ab \Rightarrow ra^{n+۱} = i_۲a + r'ab - i_۱a \in I$$

$$\Rightarrow r \in (I : a^{n+۱}) = (I : a^n) \Rightarrow r \in (I : a^n) \Rightarrow ra^n \in I$$

بنابراین $x = i_۱ + ra^n \in I$. در نتیجه $I = (I + Ra^n) \cap (I + Rb)$. چون I تحویل‌ناپذیر و $I = (I + Ra^n) \cap (I + Rb)$ و $I \subsetneqq I + Rb$ الزاماً باید داشته باشیم $I + Ra^n = I$. واز این تساوی بدست می‌آوریم $a^n \in I$. $\square$