بنام خدا

دانشگاه تربیت معلم

موسسه ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد (فوق لیسانس) ریاضی

موضوع : دوگان دوم جبرهای باناخ

The second dual of Banach algebras

تدوین : مرتضی اسماعیلی

استاد راهنما : دکتر علیرضا مدقالچی

سال ۱۳۶۷ ریاضیات

تاسیس ۱۳۴۵ هجری شمسی

۱۰۴۷۹

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تربیت معلم

" بسمه تعالی "

جلسه دفاع از پایان نامه برادر/~~خواهر~~ مرتضی ارجمند لاهیجی ...... دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ریاضی در روز پنجشنبه .. مورخه ۱۳۷۰/۶/۲۴ در موسسه ریاضیات تشکیل گردید ونتیجه آزمون به شرح زیر تعیین میگردد. نمره این آزمون ۱۶ هفده و نیم .. میباشد.

۱- عالی ☐

۲- خوب ☒ (مثبت) +

۳- متوسط ☐ — نیاز به تجدید نظر دارد ☐ / نیاز به تجدید نظر ندارد ☐

۴- غیرقابل قبول ☐

استاد راهنما
دکتر علیرضا مدقالچی

ممتحنین داخلی
۱- دکتر طاهر قاسم‌خانی قلعه‌ای عنبرانی
۲- دکتر علیرضا مدقالچی

ممتحنین خارجی
دکتر ارسلان شادمان

سرپرست موسسه ریاضیات
دکتر غلامحسین مصاحب
علیرضا مدقالچی

۱۰۴۷۹

مقدمه

درسال ۱۹۵۱، ارنس (Arens) دوعمل ضرب روی دوگان دوم جبر A، A^{**}، در [1] و [2] معرفی کردکه درواقع هریک ازآنها را می توان به عنوان توسیعی ازعمل ضرب در A درنظرگرفت. A^{**} با هریک ازاین دوعمل یک جبراست.

به جهت وابستگی ضرب های تعریف شده روی A^{**} با ضرب A، ارتباط زیادی بین این دوجبروجود داردکه ازجمله می توان به زیرجبربودن تصویر A تحت نگاشت کانونی π، $\pi(A)$، در A^{**} اشاره کرد. بطورکلی π یک همومورفیسم ایزومتریکی ازجبر A بتوی جبر A^{**} است. اگردوضرب ارنس در A^{**} برهم منطبق باشند، A ارنس - منظم نامیده می شود.

ازآن تاریخ به بعدتدریجاً خواصی ازضرب های ارنس مشخص شده اندکه درسال ۱۹۷۹ یک بررسی اجمالی ازاین نتایج به عمل آمده وبه انضمام کارهایی جدیددر [11] ارائه شده است. ما مجموعه ی مطالب طرح شده را به همراه مقدمات موردنیازدرشش فصل به شرح ذیل آورده ایم.

فصل اول اختصاص به مقدمات توپولوژیکی وفضایی درارابطه با تبدیلات خطی دارد. در فصل دوم ضرب های ارنس ونتایج اولیه آن موردبررسی قرارگرفته اند. فصل سوم مشتمل بردوبخش است که دربخش اول آن توابع تقریبا متناوب وتقریبا متناوب ضعیف در A^{*}، وارتباط آنها با ارنس - منظم بودن A وبررسی روابط بین تقریب همانی A وهمانی A^{**} مطرح شده است، دربخش دوم کامیوتنت (commutant) یک زیرمجموعه از جبر A و وجودیک ایزومورفیسم ایزومتریکی بین A^{**} وکامیوتنت یک مجموعه را آورده ایم. درفصل چهارم مطالعه خواص نگاشت کانونی π از A به A^{**} موردنظرمی باشد که درچهاربخش ایده آلها، طیف وراديكال، همومورفیسم ها وپادهمومورفیسم ها، و B^{*}-جبرها تنظیم شده است. بررسی جبرهای پوچساز (Annihilator algebras) را به فصل پنجم واگذارنموده ودرفصل ششم که شامل سه بخش است جبرهای کانولوشن (Convolution algebras) بیان شده اندکه بخش های آن به ترتیب به $L(G)$، $\ell^{1}(S)$، وفشرده سازیها اختصاص دارند. دراینجا ازبیان جزئیات خودداری کرده ودر ابتدای هربخش توضیحات بیشتری راآورده ایم.

درتدوین این پایان نامه همواره هدایت وراهنمایی های استادگرامی آقای دکتر علیرضا مدقالچی راهگشا بوده است که بدینوسیله ازایشان قدردانی وتشکرمی کنم.

همچنین ازآقای دکتر ارسلان شادمان از دانشگاه تهران که وقت خود را صرف مطالعه این پایان‌نامه نموده و به عنوان ممتحن در جلسه دفاعیه شرکت کردند، از آقای دکتر طاهر قاسمی هنری به عنوان ممتحن داخلی، و از کلیه اعضای هیئت علمی موسسه ریاضیات و گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

مرتضی اسماعیلی

شهریورماه ۱۳۶۷

فهرست

(فصل اول)

مقدمات توپولوژیکی و نکاتی در ارتباط با اپراتورها

۱-۱-۱ تعریف .

فرض کنیم A یک فضای برداری روی میدان اسکالر F باشد ،نیزفرض کنیم در A عمل ضرب تعریف شده باشدبقسمی که به ازاء هر $\alpha,\beta\in F$ وهر $x,y,z\in A$ ،داشته باشیم :

(i) $\quad x(yz)=(xy)z,$

(ii) $\quad x(y+z)=xy+xz \ \& \ (x+y)z=xz+yz,$

(iii) $\quad \alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y).$

دراینصورت A رایک جبر روی F می نامیم ،بالاخص اگر $(F=R)F=\mathbb{C}$ آنگاه A یک جبرمختلط (حقیقی)نامیده می شود .

نگاشت $p:A\longrightarrow R$ باخواص ذیل رایک نرم روی A می نامندهرگاه به ازاء هر $x,y\in A$:

(i) $\quad p(x)\geqslant 0,$

(ii) $\quad p(x)=0 \iff x=0,$

(iii) $\quad p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),$

(iv) $\quad p(xy)\leqslant p(x)p(y).$

بنابه تعریف جبر A را با درنظرداشتن نرم p ،یک جبرنرمیده می نامند .

درجبرنرمیده A متریک d را با ضابطه‌ی $d(x,y)=p(x-y)$ تعریف می کنیم، اگر A تحت توپولوژی حاصل ازاین متریک ،یک فضای توپولوژیکی تمام باشدآنگاه A یک جبرباناخ نامیده می شود .

درجبرنرمیده A ،بانرم p ، $P(x)$ را با $||x||$ نمایش خواهیم داد .

۱-۱-۲ تعریف .

مجموعه‌ی تبدیلات خطی محدود ازجبرباناخ A به توی میدان اسکالر $\mathbb{C}$ را با $BL(A,\mathbb{C})$ نمایش داده واین مجموعه با اعمال جمع وضرب اسکالر نقطه به نقطه تبدیل به یک فضای برداری مختلط می شود .

بر $A^*=BL(A,\mathbb{C})$ یک نرم با ضابطه‌ی $||T||=\sup\{|T(x)|:||x||\leqslant 1\}$ تعریف می شود .

A^* تحت نرم مذکور یک فضای باناخ است . A^* را دوگان اول[1] A می‌نامیم
لازم به تذکر است که اگر X و Y دو فضای متری باشند و Y یک فضای باناخ، آنگاه
$BL(X,Y)$ یک فضای باناخ است ([18], 4.1) .بنابراین چون $\mathbb{C}$
تمام است ، A^* نیز یک فضای باناخ است .
لازم به تذکر است که معمولا $BL(A,A)$ با $BL(A)$ نمایش داده می‌شود .
بدین طریق فضای باناخ A^* نیز دارای یک دوگان است که به A^{**} نمایش
داده می‌شود و آن را دوگان دوم[2] جبر باناخ A می‌نامیم .

۱-۱-۳ فضای برداری توپولوژیکی[3] .

فرض کنیم τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد بطوریکه :
(a) مجموعه‌های یکانی بسته‌اند ،
(b) اعمال فضای برداری تحت توپولوژی τ پیوسته هستند ؛
تحت شرایط فوق τ یک توپولوژی برداری روی X ، و X یک فضای برداری
توپولوژیکی نامیده می‌شود [18] .

۱-۱-۴ تبصره .

هرجبر باناخ یک فضای برداری توپولوژیکی نرم‌پذیر است .

۱-۱-۵ توپولوژی ضعیف[4] .

فرض کنیم X یک مجموعه و Γ یک خانواده غیرخالی از نگاشت های $f:X\longrightarrow Y_f$
باشد که Y_f یک فضای توپولوژیکی می‌باشد ،فرض کنیم که τ خانواده اتحادیه
دلخواه از مقاطع متناهی مجموعه‌های $f^{-1}(V)$ باشد که $f\varepsilon\Gamma$ و V در Y_f باز است .
در این صورت τ یک توپولوژی روی X است و در واقع ضعیف ترین توپولوژی روی
X است که تحت آن همه اعضای Γ پیوسته‌اند .
τ توپولوژی ضعیف روی X القاء شده توسط Γ ،یا Γ ـ توپولوژی X
نامیده می‌شود .

1-first dual 2-second dual 3-topological vector space
4-weak topology

۱-۱-۶ قضیه ([18], 3.10).

فرض کنیم X یک فضای برداری و X' یک فضای برداری از فانکشنال های خطی (فضای برداری جداکننده) روی X باشند، در این صورت X' - توپولوژی X، را به یک فضای برداری توپولوژیکی با فضای دوگان X' تبدیل میکند.

۱-۱-۷ توپولوژی ضعیف یک فضای برداری توپولوژیکی.

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی (با توپولوژی) باشد بگونه‌ایی که X^* (دوگان X) نقاط روی X را جدا کند.

X^*-توپولوژی X، توپولوژی ضعیف X نامیده میشود.

۱-۱-۸ تبصره.

میدانیم که هر فضای برداری توپولوژیکی نرم‌پذیر است اگر و فقط اگر موضعا "محدب و موضعا "محدود باشد ([18], 1.39) و در نتیجه هر جبر باناخ موضعا "محدب میباشد، نیز میدانیم که در هر فضای توپولوژیکی موضعا "محدب X، X^* نقاط X را جدا میکند ([18], 3.4corollary)، بنابراین در هر جبر باناخ A، A^* نقاط A را جدا میکند.

۱-۱-۹ توپولوژی ضعیف ستاره[1].

فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی با فضای دوگان X^* باشد. به ازاء هر $x \in X$ یک فانکشنال خطی f_x روی f_x با ضابطه‌ی:

$$f_x(\Lambda)=\Lambda(x) \quad , \quad \Lambda \in X^*$$

تعریف میشود، و $B=\{ f_x : x \in X \}$ نقاط X^* را جدا میکند.

بنابر ۱-۱-۶ ویکی گرفتن B و X، X- توپولوژی روی X^* را توپولوژی ضعیف ستاره X^* مینامند. هر فانکشنال خطی ضعیف ستاره- پیوسته یکی از اعضای B میباشد.

۱-۱-۱۰ مجموعه‌ی جهت دار شده[2].

گوئیم نسبت "$\geqslant$" مجموعه‌ی غیرخالی D را جهت دار میکند در صورتیکه:

(a) به ازاء هر سه عضو دلخواه m، n، و p از D، اگر $m \geqslant n$ و $n \geqslant p$، آنگاه $m \geqslant p$.

(b) به ازاء هر دو عضو دلخواه از D، مانند x و y، اگر $x \geqslant y$ و $y \geqslant x$، آنگاه $x=y$.

(c) به ازاء هر عضو D مانند x، $x \geqslant x$.

1-weak*-topology 2-directed set

(d) به ازاء هردوعضودلخواه از D مانند x و y ،عضوی مانند p از D موجودباشد بطوریکه: $p \geq y$ و $p \geq x$.

۱-۱-۱۱ مثال .

دریک فضای توپولوژیکی، خانواده همسایگی های یک نقطه با نسبت " $\subsetneq$ "جهت دار میشود. همچنین خانواده زیرمجموعه های متناهی از مجموعه ی دلخواه S با نسبت " $\supsetneq$ "جهت دار میشود.

۱-۱-۱۲ تعریف .

فرض کنیم که X یک فضای توپولوژیکی باشد. تابع " f "ازمجموعه ی جهت دارشده D به توی X رایک شبکه[1] می نامیم. معمولا $f(\alpha)$ را با x_α وشبکه f را با $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ نمایش میدهند.

شبکه (x_α) را متقارب به عضو x می نامیم درصورتیکه به ازاء هرهمسایگی x مانند V عضوی از D مانند α_0 موجودباشدبطوری که اگر $\beta \geq \alpha_0$ آنگاه: $x_\beta \in V$.

لازم به توضیح است که درتعریف فوق مجموعه ی D توسط " $\geq$ "جهت دارشده است.

۱-۱-۱۳ تعریف .

فرض کنیم M یک فضای برداری روی میدان F و A یک جبرروی F باشند. دراین صورت M یک A مدول چپ[2] نامیده میشود اگریک نگاشت $(a,m) \longmapsto am$ از $A \times M$ بتوی M موجودباشد بطوریکه

(i) $(a+b)m=am+bm$, $(a,b \in A \ \& \ m \in M)$،

(ii) $a(m+n)=am+an$, $(a \in A \ \& \ m,n \in M)$،

(iii) $a(bm)=(ab)m$, $(a,b \in A \ \& \ m \in M)$.

نگاشت فوق الذکرضرب مدول[3] نامیده میشود.

A- مدول راست[4] به طریق مشابه با بکاربردن نمادهای فوق تعریف میشود؛ اگرنگاشت $(a,m) \longmapsto am$ دارای خواص ذیل باشدآنگاه M رایک A- مدول راست می نامند.

به ازاء هر $a,b \in A$ وهر $m,n \in M$:

1- net 2-left A-module 3-module multiplication 4-right A-module

(i) $m(a+b)=ma+mb$,

(ii) $(m+n)a=ma+na$,

(iii) $(ma)b=m(ab)$.

M یک A- مدول دوطرفه[1] نامیده می‌شود اگر A- مدول راست و A- مدول چپ باشد و ضرب های مدول دارای رابطه‌ی $a(mb)=(am)b$, $(a,b\varepsilon A$ & $m\varepsilon M)$ باشند.

۱-۱-۱۴ تعریف

فرض کنیم A یک جبر نرمیده و M یک فضای نرمیده روی F باشند. M یک A- مدول چپ نرمیده[2] نامیده می‌شود اگر M یک A- مدول چپ بوده و عدد ثابتی مثبت مانند K موجود باشد به طوریکه به ازاء هر $m\varepsilon M$ و هر $a\varepsilon A$:

$$||am||<K||a||\ ||m||.$$

اگر M یک A مدول چپ نرمیده باشد و به عنوان یک فضای نرمیده تمام باشد آنگاه M را یک A- مدول چپ باناخ[3] می‌نامند.

۱-۱-۱۵ تعریف.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمیده باشند و $T\varepsilon B(X,Y)$، عضو منحصر به فرد $T^*\varepsilon B(Y^*,X^*)$ موجود است بطوریکه: $<x,T^*y^*>=<Tx,y^*>$ و $||T^*||=||T||$، T^* را اپراتور الحاقی T[4] می نامند.

۱-۱-۱۶ تعریف.

فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند و U گوی بسته واحد در X، اپراتور $T\varepsilon B(X,Y)$ را فشرده[5] نامیم اگر $\overline{T(U)}$ در Y فشرده باشد.

۱-۱-۱۷ تعریف.

فرض کنیم که X و Y دو فضای نرمیده خطی باشند و $T\varepsilon B(X,Y)$، اپراتور T را ضعیفاً فشرده[6] نامیم اگر $\overline{T(U)}^w$ (بست $T(U)$ با توپولوژی ضعیف) فشرده باشد که U گوی بسته واحد در نظر گرفته می‌شود.

۱-۱-۱۸ لم.

(i) فرض می‌کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T\varepsilon B(X,Y)$. آنگاه T^* یک نگاشت پیوسته از Y^* به X^* می‌باشد هرگاه Y^* و X^* را با توپولوژی های ضعیف ستاره در نظر

1- A-bimodule 2-normed left A-module 3-Banach left A-module

4-adjoint of T 5-compact operator 6-weakly compact operator

بگیریم .

(ii) نگاشت طبیعی $\pi:X\longrightarrow\pi(X)$ یک همیومورفیسم است هرگاه X و $\pi(X)$ را با X^* توپولوژی به‌کار ببریم .

اثبات .

(i) فرض می‌کنیم $V=\{x^*\in X^*:x^*(x_i)\in V_i,\ 1\leq i\leq n\}$ که به‌ازاء هر i $V_i\ (1\leq i\leq n)$ مجموعه‌ی بازی در $\mathbb{C}$ است و $x_i\in X$. می‌دانیم که اعضای مبنای X- توپولوژی X^* به شکل فوق می‌باشند . بسادگی بررسی می‌شودکه $T^{*-1}(V)=\bigcap_{i=1}^{n}(\hat{Tx_i})^{-1}(V_i)$. لذا T^* پیوسته است .

(ii) مانندقسمت (i) یک عضو مبنای X^*- توپولوژی $\pi(X)$ به‌صورت $U=\{\pi(x):f_i(x)\in V_i\ ,1\leq i\leq n\}$ می‌باشدودرنتیجه $\pi^{-1}(U)=\{x\in X:f_i(x)\in V_i\ ,\ 1\leq i\leq n\}$ با توجه به‌ساختمان X^*- توپولوژی X می‌دانیم‌که $\pi^{-1}(U)$ یک مجموعه‌ی باز است ولذا π پیوسته است چون π یک‌بیک است داریم $\pi(V)=(\pi^{-1})^{-1}(V)$ ، وبنابراین اگر $V=\bigcap_{i=1}^{n}f_i^{-1}(V_i)$ مجموعه‌ی بازی در X باشدآنگاه

$$(\pi^{-1})^{-1}(V)=\pi(V)=\{\pi(x):f_i(x)\in V_i\ ,\ 1\leq i\leq n\}$$

می‌دانیم‌که این مجموعه‌در $\pi(X)$ با X^*- توپولوژی باز است ولذا π^{-1} نیز پیوسته است .

۱-۱-۱۹ قضیه .

اپراتورخطی $T\in B(X,Y)$ ضعیفا "فشرده‌است اگروفقط اگر $T^{**}(X^{**})\subseteq\pi(Y)$.

اثبات .

فرض کنیم S و S^{**} به‌ترتیب معرف گوی بسته‌واحددر X و X^{**} باشند ، بنابرلم قبل T^{**} از X^{**} (با X^*- توپولوژی) به‌توی Y^{**} (با Y^*- توپولوژی)پیوسته است . بسادگی بررسی می‌شودکه : $T^{**}\pi(x)=\pi(Tx)$, $(x\in X)$.

لذا T^{**} به‌عنوان توسیعی از T درنظرگرفته می‌شود . اگر S_1 را معرف X^*- بست $\pi(S)$ درنظربگیریم آنگاه $T^{**}(S_1)\subseteq\overline{T^{**}\pi(S)}=\overline{\pi(T(S))}\subseteq\overline{\pi(\overline{T(S)})}$ (i)

که $\bar{B}$ معرف Y^*- بست B می‌باشد . اگر T ضعیفا "فشرده‌باشد ، آنگاه $\overline{T(S)}$ در Y^*- توپولوژی Y فشرده‌است وبنابراین چون π همیومورفیسم است $\pi(\overline{T(S)})$ در Y^{**} ، Y^*- فشرده‌است ولذا ازآنجاکه Y^{**} با Y^*-توپولوژی هاسدرف است $\pi(\overline{T(S)})$ بسته‌است . پس از (i) نتیجه می‌گیریم $T^{**}(S_1)\subseteq\pi(\overline{TS})$. بنابر $S_1=S^{**}$ ([12] ,V-4-5) وبنابراین $T^{**}S^{**}\subseteq\pi(\overline{TS})$ ، لذا : $T^{**}X^{**}\subseteq\pi(Y)$.

بالعکس فرض کنیم $\pi(Y) \supseteq T^{**}X^{**}$. ازآنجاکه T^{**} از X^{**} (با X^*-توپولوژی) به‌توی Y^{**} (با Y^*-توپولوژی) پیوسته‌است وبنابرقضیه‌بانا خ-آلوغلو S^{**} در X^{**} ضعیف ستاره- فشرده‌است، $\pi(Y) \supseteq T^{**}S^{**}$ در Y^{**} با Y^*-توپولوژی فشرده است. چون $\pi(TS) \subseteq T^{**}S^{**}$ و $\pi(Y)$ و $\pi: Y \longrightarrow \pi(Y)$ یک Y^*- هیومورفیسم است داریم

$$\overline{\pi(TS)} \subseteq T^{**}S^{**} \quad , \quad \bar{\pi}^1(\overline{\pi(TS)}) = \overline{\bar{\pi}^1(\pi(TS))} = \overline{TS}$$

لذا $\overline{\pi(TS)}$ در Y^{**} با Y^*- توپولوژی فشرده‌است ودرنتیجه‌تصویرآن تحت نگاشت پیوسته $\bar{\pi}^1$، یعنی $\overline{TS}$ در Y با Y^*- توپولوژی فشرده‌است.پس T ضعیفا "فشرده‌است .

۱-۱-۲۰ نتیجه .

فرض می‌کنیم $T \varepsilon B(X,Y)$. اگریکی‌ازدوفضای X و Y منعکس باشد، آنگاه T ضعیفا فشرده‌است.

اثبات .

اگر Y منعکس باشد، آنگاه $T^{**}X^{**} \subseteq Y^{**} = \pi(Y)$؛ اگر X منعکس باشد، آنگاه

$$T^{**}X^{**} = T^{**}\pi(X) = \pi(TX) \subseteq \pi(Y) ;$$

درنتیجه‌بنابرقضیه‌قبل T ضعیفا "فشرده‌است .

۱-۱-۲۱ نتیجه .

مجموعه‌ی اپراتورهای ضعیفا "فشرده‌از X به Y یک مجموعه‌ی بسته‌در $B(X,Y)$ با توپولوژی نرم‌می‌باشد .

اثبات .

ازآنجاکه $||T^*|| = ||T||$، اگر $||T_n - T|| \longrightarrow 0$ آنگاه $||T_n^{**} - T^{**}|| \longrightarrow 0$.

اگر T_n ضعیفا "فشرده‌باشدآنگاه $(x^{**} \varepsilon X^{**})\, T_n^{**}x^{**} \varepsilon \pi(Y)$. چون $T^{**}x^{**} = \lim\limits_{n} T_n^{**}x^{**}$ و $\pi(Y)$ باتوپولوژی نرم‌در Y^{**} بسته‌است ؛ پس $T^{**}x^{**} \varepsilon \pi(Y)$ ولذا T نیزضعیفا "فشرده‌است .

۱-۱-۲۲ قضیه .

مجموعه‌ی اپراتورهای ضعیفا "فشرده‌از X به X یک ایده‌آل دوطرفه‌بسته $B(X)$ می‌باشد .

اثبات .

فرض کنیم $T,U,V \varepsilon B(X)$ و $\alpha,\beta \varepsilon \mathbb{C}$؛ که T و U ضعیفا "فشرده‌می‌باشند .

$$(\alpha T+\beta U)^{**}X^{**} = (\alpha T^{**}+\beta U^{**})X^{**} \subseteq \pi(X) \qquad (i)$$

(ii) $(TV)^{**}X^{**}=T^{**}V^{**}(X^{**})\subseteq T^{**}X^{**}\subseteq \pi(X)$,

(iii) $(VT)^{**}X^{**}=V^{**}T^{**}X^{**}\subseteq V^{**}\pi(X)=\pi(V(X))\subseteq \pi(X)$.

از (i) نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی اپراتورهای ضعیفاً فشرده در $B(X)$ یک زیرفضای برداری $B(X)$ است. از (i) و (ii) ایده‌آل راست بودن این مجموعه و از (i) و (iii) ایده‌آل چپ بودن آن نتیجه می‌شود.

۱-۱-۲۳ لم.

$T\varepsilon B(X,Y)$ ضعیفاً فشرده است اگر و فقط اگر $T^*:(Y^*$ ، Y-توپولوژی$)\longrightarrow(X^*$ ، X^{**}-توپولوژی$)$ پیوسته باشد.

اثبات.

فرض کنیم T ضعیفاً فشرده باشد. بنابر ۱-۱-۱۹ به ازاء هر $x^{**}\varepsilon X^{**}$ یک $y\varepsilon Y$ موجود است بطوری که $x^{**}(T^*y^*)=(T^{**}x^{**})y^*=y^*y$ ، $(y^*\varepsilon Y^*)$.

بنابراین اگر شبکه y_α^* ضعیف ستاره متقارب به y_0^* باشد، آنگاه شبکه $T^*y_\alpha^*$ ضعیفاً متقارب به $T^*y_0^*$ می‌باشد، زیرا اگر $V=\{x^*\varepsilon X^*:x_i^{**}(x^*)\varepsilon V_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$ یک حومه‌ی $T^*y_0^*$ در X^{**}- توپولوژی X^* باشد، آنگاه به ازاء هر i $(1\leqslant i\leqslant n)$ $y_i\varepsilon Y$ موجود است بطوری که $T^{**}x_i^{**}=\pi(y_i)$. چون y_α^* ضعیف ستاره متقارب به y_0^* می‌باشد لذا به ازاء هر i $(1\leqslant i\leqslant n)$ داریم $y_\alpha^*y_i\longrightarrow y_0^*y_i$. چون V یک حومه‌ی $T^*y_0^*$ می‌باشد لذا به ازاء هر i $(1\leqslant i\leqslant n)$، $y_0^*y_i\varepsilon V_i$. به ازاء هر i $(1\leqslant i\leqslant n)$، α_i ای موجود است که اگر $\alpha\geqslant\alpha_i$ آنگاه $y_\alpha^*y_i\varepsilon V_i$. بنابراین α' ای موجود است که اگر $\alpha\geqslant\alpha'$ آنگاه به ازاء هر i $(1\leqslant i\leqslant n)$، $y_\alpha^*y_i\varepsilon V_i$. بنابراین اگر $\alpha\geqslant\alpha'$ آنگاه $T^*y_\alpha^*\varepsilon V$. پس $T^*:(Y^*$ و Y- توپولوژی$)\longrightarrow(X^*$ ، X^{**}-توپولوژی$)$ پیوسته است.

بالعکس فرض کنیم T^* پیوسته باشد و $x_0^{**}\varepsilon X^{**}$. اگر y_α^* ضعیف ستاره متقارب به y^* باشد آنگاه $T^*y_\alpha^*$ ضعیفاً متقارب به T^*y^* می‌باشد. با توجه به تعریف توپولوژی ضعیف برای X^*، واضح است که $x_0^{**}T^*y_\alpha^*$ متقارب به $x_0^{**}T^*y^*$ می‌باشد. لذا $T^{**}x_0^{**}y_\alpha^*$ متقارب به $T^{**}x_0^{**}y^*$ می‌باشد. بنابراین $T^{**}x_0^{**}$ در Y^{**} یک فانکشنال خطی پیوسته روی Y^* با ضعیف ستاره توپولوژی می‌باشد. اکنون از قضیه ([12] ,V-3-9) نتیجه می‌شود $T^{**}x_0^{**}\varepsilon\pi(Y)$؛ پس T ضعیفاً فشرده است.

۱-۱-۲۴ قضیه .

$T\epsilon B(X,Y)$ ضعیفا "فشرده است اگروفقط اگر $T^*\epsilon B(Y^*,X^*)$ ضعیفا "فشرده باشد .

اثبات .

فرض کنیم T ضعیفا "فشرده باشد .بنا بر قضیه با ناخ- آلوغلوگوی بسته واحد S^* از Y^* ، ضعیف- ستاره فشرده است . لذا از ۱-۱-۲۳ نتیجه می‌شود T^*S^* در X^* با X^{**}- توپولوژی فشرده است .پس T^* ضعیفا "فشرده است .

بالعکس ،اگر T^* ضعیفا "فشرده باشد ،ازلم ۱-۱-۲۳ نتیجه می‌شودکه T^{**} از X^{**} (با X^*- توپولوژی)به توی Y^{**} (با Y^{***}- توپولوژی)پیوسته است . S و S^{**} گوی‌های بسته واحددر X و X^{**} می‌باشند. بنا بر([12], V-4-5) ، $\pi(S)$ در S^{**} ، X^*- چگال است ولذا ازپیوستگی T^{**} داریم:

$$T^{**}S^{**}=T^{**}(\overline{\pi(S)})\subseteq\overline{T^{**}\pi(S)}=\overline{\pi(TS)}.$$

پس $T^{**}S^{**}$ در Y^{***}- بست $\pi(TS)$ قرار دارد .بنا بر([12],V.3.13) ، Y^{***}- بست مجموعه‌ی محدب $\pi(TS)$ برابر با نرم- بست $\pi(TS)$ می‌باشد. بنابراین $T^{**}S^{**}\subseteq\pi(Y)$.

۱-۱-۲۵ تعریف .

فرض کنیم X_α $(\alpha\epsilon A)$ یک فضای توپولوژیکی باشد ، $X=\prod_{\alpha\epsilon A}X_\alpha$ معرف مجموعه‌ی همه توابع تعریف شده روی A مانند x می‌باشد بطوری که $x(\alpha)=x_\alpha\epsilon X_\alpha$.خانواده همه زیرمجموعه‌های X به شکل $U=\prod_{\alpha\epsilon A}U_\alpha$ که به جز تعداد متناهی از U_α ها بقیه برابر X_α می‌باشند ،یک مبنا برای یک توپولوژی روی X است که توپولوژی حاصلضربی برای X نامیده می‌شود . درتعریف مذکور U_α در X_α باز است .

۱-۱-۲۶ تعریف .

درتوپولوژی حاصلضربی برای $X=\prod_{\alpha\epsilon A}X_\alpha$ ، اگربه ازاء هر $\alpha\epsilon A$ ، $X_\alpha=Y$ ، آنگاه X را با نماد Y^A نمایش داده وتوپولوژی مذکور ،توپولوژی نقطه‌ای (pointwise topology)مجموعه‌ی توابع تعریف شده از A به Y نامیده می‌شود .

۱-۱-۲۷ مثال .

فرض کنیم M یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $C(M)$ مجموعه‌ی توابع مختلط تعریف شده روی M. با توضیحات فوق $C(M)=\mathbb{C}^M$.لذا $C(M)$ دارای یک ساختمان توپولوژیکی-

ـ می‌باشدکه یک عضو مبنای آن، مانند B، شامل همه توابع تعریف شده روی M است بطوریکه یک زیرمجموعه‌ی متناهی از M مانند $K=\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}$، وزیرمجموعه‌های باز U_i $(U_i\neq\mathbb{C}, 1\leqslant i\leqslant n)$ از $\mathbb{C}$ موجودندکه $(1\leqslant i\leqslant n)\{f(m_i):f\varepsilon B\}=U_i$، و $(m\notin K)$ $\{f(m):f\varepsilon B\}=\mathbb{C}$. به عبارت دیگر یک عضو مبنا برای توپولوژی نقطه‌ای $C(M)$ به صورت $(C(M))^{-1}(V)$ می‌باشدکه V یک عضو مبنا برای توپولوژی حاصلضربی $\mathbb{C}^M$ است .

بالاخص اگر $C(S)$ مجموعه‌ی توابع مختلط پیوسته ومحدود روی S باشد، آنگاه توپولوژی القاء شده توسط $\mathbb{C}^S$ روی $C(S)$ <u>توپولوژی نقطه‌ای $C(S)$</u> نامیده می‌شود .

۱-۱-۲۸ تعریف .

فرض کنیم N و N' دوفضای باناخ باشند و $L=B(N,N')$. <u>توپولوژی اپراتورضعیف (قوی)</u> در L، تحدید توپولوژی حاصلضربی ${N'}^N$ روی L می‌باشد، که در ${N'}^N$، N' با توپولوژی ضعیف (نرم) درنظر گرفته می‌شود . فرض کنیم شبکه $\{T_\alpha\}_{\alpha\varepsilon A}$ در $B(N,N')$، با توپولوژی اپراتورضعیف متقارب به T $(T\varepsilon B(N,N'))$ باشد . بنابراین T_α در ${N'}^N$ متقارب به T می‌باشدکه N' دارای توپولوژی ضعیف است . لذا به ازاء هر $x\varepsilon N$، $T_\alpha x$ در N' ضعیفاً به Tx میل می‌کند . پس با توجه به ساختمان توپولوژی ضعیف در N'، برای هر $G\varepsilon {N'}^*$ داریم : $GT_\alpha x\longrightarrow GTx$.

بالعکس اگر $\{T_\alpha\}_{\alpha\varepsilon A}\subseteq L$ و $T\varepsilon L$، وبه ازاء هر $G\varepsilon {N'}^*$ و $x\varepsilon N$، $\{GT_\alpha x\}_{\alpha\varepsilon A}$ متقارب به GTx باشد، آنگاه نتیجه می‌شود $T_\alpha x\longrightarrow Tx$ $(x\varepsilon N)$، ولذا $T_\alpha\longrightarrow T$ در ${N'}^N$، واز آنجا $T_\alpha\longrightarrow T$ در L با توپولوژی اپراتورضعیف .

با استدلال ساده‌تر نتیجه می‌شودکه $\{T_\alpha\}_{\alpha\varepsilon A}\subseteq L$ تحت توپولوژی اپراتورقوی به $T\varepsilon L$ متقارب است اگروفقط اگر به ازاء هر $x\varepsilon N$، $\lim\limits_{\alpha\varepsilon A}\|T_\alpha x-Tx\|=0$.

۱-۱-۲۹ قضیه .

$L=B(N,N')$ یک زیرمجموعه‌ی بسته ${N'}^N$، تحت توپولوژی اپراتورضعیف است .

اثبات ([9], page 39, lemma 1) .

۱-۱-۳۰ قضیه .

احکام زیر برای زیرمجموعه‌ی X از فضای باناخ A معادلند :

(i) هردنباله در X یک زیردنباله ضعیفا متقارب دارد (اصطلاحاً گفته می شود ـ