دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

عنوان پایان‌نامه:

تعمیم مفاهیم هاسدورف، منظم و نرمال در فضاهای بستار دوتایی

استاد راهنما:

دکتر قاسم میرحسین خانی

استاد مشاور:

آقای محمود غلامی

دانشجو:

مهناز زندیان

خرداد ماه ۹۰

چکیده

در این پایان نامه فضاهای بستاردوتایی را معرفی می‌کنیم و برخی از خواص این فضاها را از قبیل نگاشت های پیوسته، ضرب فضای بستار دوتایی ، مجموعه‌های $g-$بسته، مجموعه‌ها و نگاشت های $\partial-$بسته که بین کلاسی از مجموعه‌های بسته و مجموعه‌های بسته تعمیم یافته هستند را معرفی کرده و ویژگی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار می دهیم.
سپس فضاهای بستار دوتایی هاسدورف و نرمال و منظم و همچنین تعمیم های آن ها را معرفی کرده و در پایان نگاشت های پیوسته دوتایی دوبه دو و نگاشت های بسته دوتایی دوبه دو را مورد بررسی قرار می دهیم.
کلمات کلیدی: فضاهای بستار دوتایی ، مجموعه‌های بسته تعمیم یافته، فضاهای بستار دوتایی هاسدورف، نرمال و منظم.

تقدیم به پدر و مادرم و همسرم آبتین امیری

با سپاس فراوان از پدر و مادر و همسرم که در تمام لحظات یار و یاورم بوده اند
همچنین از اساتید محترم جناب آقای دکتر میر حسین خانی و جناب آقای غلامی

فهرست مندرجات

مقدمه

فضاهای توپولوژی دوتایی توسط J.C.Kelly [۱۲] معرفی شد. چنین فضاهایی به دو توپولوژی قراردادی مجهز هستند. بعلاوه Kelly بسیاری از نتایج استاندارد اصل موضوع تفکیک در فضاهای توپولوژی را به فضاهای توپولوژی دوتایی تعمیم داد. بعد از آن مقالات زیادی در مورد تعمیم مفاهیم توپولوژی به فضاهای توپولوژی دوتایی نوشته شده است.

فضاهای بستار توسط E.Cech [۱۰] معرفی شدند و سپس افراد زیادی این فضاها را مورد مطالعه قرار دادند[۱۱، ۱۴، ۱۵].

مجموعه‌های بسته تعمیم یافته یا به طور خلاصه مجموعه‌های $g-$بسته در یک فضای توپولوژیک توسط Levine [۱۳]. معرفی شد و به وسیله‌ی آن‌ها بسیاری از ویژگی‌های مهم مجموعه‌های بسته به خانواده‌ی بزرگتری از مجموعه‌ها گسترش یافت.

مفاهیمی از قبیل مجموعه‌های بسته تعمیم یافته و نگاشت‌های پیوسته تعمیم یافته از فضاهای توپولوژیک به فضاهای بستار توسعه پیدا کردند.

در این پایان نامه ابتدا فضاهای بستار و سپس فضاهای بستار دوتایی را تعریف می کنیم، همچنین نگاشت های پیوسته و ضرب فضاهای بستار را معرفی می کنیم.

علاوه بر این نگاشت‌های پیوسته در فضاهای بستار را معرفی نموده و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را در این فضاها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

همچنین به بررسی مجموعه‌های $g-$بسته و مجموعه های $\partial-$بسته و نگاشت های $\partial-$پیوسته و رابطه‌ی آن ها با نگاشت‌های پیوسته در فضاهای بستار دوتایی می‌پردازیم .
سپس فضاهای بستار دوتایی هاسدورف، نرمال و منظم و تعمیم هایشان را مورد بررسی قرار می دهیم و در مورد ضرب خانواده ای از این فضاها و نگاشت های پیوسته بین آنها قضایایی را مطرح می کنیم.
در پایان نگاشت های پیوسته و بسته دوتایی دوبه دو را بیان کرده ویژگی‌های آن‌ها را در فضاهای بستار دوتایی مورد تحقیق قرار می‌دهیم.

فصل ۱

فضاهای بستار و فضاهای بستار دوتایی

در این فصل فضاهای بستار و نگاشت های پیوسته در فضاهای بستار را تعریف کرده و برخی از ویژگی‌های آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در قسمت سوم فصل به بررسی ویژگی مهم فضاهای بستار یعنی ضرب فضاهای بستار می‌پردازیم و پس از آن فضاهای بستار دوتایی را معرفی کرده و قضایای مهم آن را بازگو می کنیم.

۱.۱ فضاهای بستار

در این بخش فضاهای بستار را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ الف) نگاشت $u : P(X) \to P(X)$ را عملگر بستار روی X می نامیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) $u\emptyset = \emptyset$

۲) برای هر A زیرمجموعه‌ی X، $A \subseteq uA$

۳) برای هر B و A زیر مجموعه X، $A \subseteq B \Rightarrow uA \subseteq uB$.

ب) زوج مرتب (X, u) که u یک عملگر بستار روی X است را فضای بستار می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ عملگر بستار u روی مجموعه‌ی X را جمعی می‌نامیم، هرگاه :

$$A, B \subseteq X \Rightarrow u(A \cup B) = uA \cup uB$$

تعریف ۳.۱.۱ زیرمجموعه‌ی A از X در فضای بستار (X,u) را بسته می‌نامیم، هرگاه $uA = A$ و آن را باز می‌نامیم، هرگاه متمم آن بسته باشد.
مجموعه‌های تهی و کل فضا هم باز و هم بسته هستند.

تعریف ۴.۱.۱ فضای بستار (Y,v) را زیرفضای (X,u) گوییم، هرگاه $Y \subseteq X$ و به ازای هر $A \subseteq X$، $vA = uA \cap Y$ باشد.

مثال ۵.۱.۱ فرض کنید $X = \{۱,۲,۳\}$ باشد. نگاشت $u : P(X) \to P(X)$ که به صورت $u\emptyset = \emptyset$، $u\{۱\} = \{۱\}$، $u\{۲\} = \{۲\}$، $u\{۳\} = \{۳\}$،
$u\{۱,۲\} = u\{۱,۳\} = u\{۲,۳\} = uX = X$ تعریف شده است، در سه شرط بالا صدق می‌کند، بنابراین (X,u) یک فضای بستار است.

مثال ۶.۱.۱ فرض کنید (X,τ) فضای توپولوژیک باشد، و نگاشت $u : P(X) \to P(X)$ به صورت $u(A) = \overline{A}$ که در آن $\overline{A}$ بستار مجموعه A نسبت به توپولوژی τ می‌باشد. در این صورت u یک عملگر بستار روی مجموعه‌ی X است و جفت (X,u) یک فضای بستار می‌باشد.

نکته ۷.۱.۱ هر فضای توپولوژی فضای بستار است ، اما هر فضای بستار یک فضای توپولوژی القا می کند که در قضیه زیر آمده است.

تعریف ۸.۱.۱ الف)τ یک توپولوژی تعمیم یافته روی X می نامیم هرگاه:

۱)$\emptyset, X \in \tau$

۲)برای هر $A_i \in \tau$، $\cup A_i \in \tau$

ب)زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژیک تعمیم یافته می نامیم.

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنید (X, u) یک فضای بستار و τ مجموعه‌های باز فضای (X, u) باشد. در این صورت:

۱) τ یک توپولوژی تعمیم یافته روی X است.

۲) اگر u جمعی باشد آنگاه τ یک توپولوژی روی X است.

اثبات:

۱) $u\emptyset = \emptyset$، پس $\emptyset$ بسته است.

$X \subseteq uX$ و $uX \subseteq X$ بنابراین $uX = X$ و X بسته است.

فرض کنید A_i به ازای هر $i \in I$ بسته و $B = \cap A_i$ باشد. در این صورت داریم $uB \subseteq u(A_i) = A_i$ به ازای هر i، در نتیجه $uB \subseteq \cap_{i \in I} A_i = B$ است. بنابراین $B = uB$ که نشان می دهد B بسته می‌باشد.

۲) اگر u جمعی باشد و A و B بسته باشند، آنگاه $u(A \cup B) = uA \cup uB = A \cup B$. بنابراین $A \cup B$ بسته است. □

تعریف ۱۰.۱.۱ فضای بستار (X, u) را فضای $T_\circ$ می‌نامیم ، هرگاه به ازای هر جفت از نقاط $x, y \in X$، از $x \in u\{y\}$ و $y \in u\{x\}$ نتیجه بگیریم که $x = y$.

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنید (X,τ) فضای توپولوژیک و $u : P(X) \to P(X)$ عملگر بستار به صورت $u(A) = \overline{A}$ روی مجموعه‌ی X باشد. آنگاه تعبیر $T_\circ$ درفضای بستار همان تعبیر $T_\circ$ در فضای توپولوژیک است و برعکس.

اثبات: فرض کنید (X,u) فضای $T_\circ$ باشد. در این صورت به ازای هر جفت از نقاط $x,y \in X$ که $x \in u\{y\}$ و $y \in u\{x\}$ داریم $x = y$.

برهان خلف. فرض کنیم $x \neq y$ باشد و هر همسایگی از x شامل y و هر همسایگی از y شامل x باشد. در این صورت $y \in u\{x\}$ و $x \in u\{y\}$ است در نتیجه طبق فرض قضیه، $x = y$ که تناقض دارد.

برعکس.فرض کنید فضای توپولوژیک $T_\circ$ باشد.

برهان خلف. فرض کنیم که $x \in u\{y\}$ و $y \in u\{x\}$ و $x \neq y$. در این صورت همسایگی از x وجود دارد که شامل y نیست، یعنی $x \in U_x$ و $y \notin U_x$ و $y \notin u\{x\}$ که با فرض تناقض دارد.

۲.۱ نگاشت های پیوسته

در این بخش نگاشت‌های پیوسته در فضاهای بستار را تعریف کرده و به بررسی تعدادی از ویژگی های نگاشت‌های پیوسته در فضاهای بستار می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید (X,u) و (Y,v) فضاهای بستار باشند، نگاشت $f : (X,u) \to (Y,v)$ را پیوسته می‌نامیم، هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq X$، $f(uA) \subseteq vf(A)$ باشد.

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنید (X,u) و (Y,v) فضاهای بستار باشند. اگر نگاشت $f:(X,u)\to(Y,v)$ پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی $B\subseteq Y$ $uf^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(vB)$ است.

اثبات: $B\subseteq Y$ است، چون f پیوسته است پس $f(uf^{-1}(B))\subseteq vf(f^{-1}(B))\subseteq v(B)$ می‌باشد و بنابراین $f^{-1}(f(uf^{-1}(B)))\subseteq f^{-1}(vB)$ است. در نتیجه $uf^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(vB)$. $\square$

قضیه ۳.۲.۱ اگرنگاشت $f:(X,u)\to(Y,v)$ پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F از فضای بستار (Y,v)، $f^{-1}(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X,u) است.

اثبات: F زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از (Y,v) است، پس $vF=F$. نگاشت f پیوسته است بنابراین $uf^{-1}(F)\subseteq f^{-1}(vF)=f^{-1}(F)$. درنتیجه $f^{-1}(F)=uf^{-1}(F)$ می‌باشد. $\square$

قضیه ۴.۲.۱ اگر (X,u) و (Y,v) فضاهای بستار و نگاشت $f:(X,u)\to(Y,v)$ پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی باز G از فضای بستار (Y,v)، $f^{-1}(G)$ یک زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار (X,u) می‌باشد.

اثبات: فرض کنید G زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار (Y,v) باشد. پس $Y-G$ زیرمجموعه‌ی بسته از (Y,v) است. طبق قضیه‌ی ۳.۲.۱، $f^{-1}(Y-G)=X-f^{-1}(G)$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X,u) می‌باشد. درنتیجه $f^{-1}(G)$ زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار (X,u) است.

$\square$

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید (X,u) و (Y,v) و (Z,w) فضاهای بستار باشند. اگر $f:(X,u)\to(Y,v)$ و $g:(Y,v)\to(Z,w)$ نگاشت‌های پیوسته باشند، آنگاه

$g \circ f : (X, u) \to (Z, w)$ پیوسته است.

اثبات: فرض کنید $A \subseteq X$ باشد. نشان می دهیم که $g \circ f(uA) \subseteq wg \circ f(A)$.

$$gof(uA) = g(f(uA)) \subseteq g(vf(A)) \subseteq wg(f(A)) = wg \circ f(A)$$

بنابراین نگاشت $g \circ f$ پیوسته می باشد. □

قضیه **۶.۲.۱** فرض کنید (X, u) و (Y, v) فضاهای بستار و (A, u_A) زیرفضایی بسته از فضای بستار (X, u) باشد. در این صورت اگر نگاشت $f : (X, u) \to (Y, v)$ پیوسته باشد، آنگاه $f \mid A : (A, u_A) \to (Y, v)$ پیوسته است.

اثبات: فرض کنید $B \subseteq A$ باشد. در این صورت

$$(f \mid A)(u_A B) = (f \mid A)(uB \cap A) = (f \mid A)(uB) = f(uB) \subseteq vf(B) = v(f \mid A)(B)$$

در نتیجه نگاشت $f \mid A$ پیوسته می‌باشد. □

تعریف **۷.۲.۱** فرض کنید (X, u) و (Y, v) فضاهای بستار باشند. در این صورت نگاشت $f : (X, u) \to (Y, v)$ را بسته (باز) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی بسته (باز) F از فضای بستار (X, u)، $f(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته (باز) از فضای بستار (Y, v) باشد.

قضیه **۸.۲.۱** نگاشت $f : (X, u) \to (Y, v)$ بسته است، اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی B از Y و هر زیرمجموعه‌ی باز G از فضای بستار (X, u) شامل $f^{-1}(B)$ زیرمجموعه‌ی باز U از فضای بستار (Y, v) وجود داشته باشد، به‌طوریکه $B \subseteq U$ و $f^{-1}(U) \subseteq G$.

اثبات: فرض کنید نگاشت f بسته و B زیرمجموعه‌ی از Y و G زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار (X,u) باشد، به طوریکه $f^{-1}(B) \subseteq G$. در این صورت $f(X-G)$ زیرمجموعه‌ی بسته ازفضای بستار (Y,v) می باشد. فرض کنیم که $U = Y - f(X-G)$ باشد، پس U زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار (Y,v) است.

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(Y - f(X-G)) = X - f^{-1}(f(X-G)) \subseteq X - (X-G) = G$$

درنتیجه U زیرمجموعه‌ی بازی از فضای بستار (Y,v) است که شامل B و $f^{-1}(U) \subseteq G$ می‌باشد.

برعکس. فرض کنید که F زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X,u) باشد. در این صورت $f^{-1}(Y - f(F)) \subseteq X - F$ و $X - F$ زیرمجموعه‌ی بازی از فضای بستار (X,u) است. طبق فرض زیرمجموعه‌ی باز U از فضای بستار (Y,v) وجود دارد، به‌طوریکه $Y - f(F) \subseteq U$ و $f^{-1}(U) \subseteq X - F$، بنابراین $F \subseteq X - f^{-1}(U)$ و $Y - U \subseteq f(F) \subseteq f(X - f^{-1}(U)) \subseteq Y - U$ ، پس $f(F) = Y - U$ است. بنابراین $f(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (Y,v) و نگاشت f بسته است. $\square$

قضیه **۹.۲.۱** نگاشت های $f : (X,u) \to (Y,v)$ و $g : (Y,v) \to (Z,w)$ را درفضاهای بستار در نظر می گیریم، در این صورت :

۱) اگر f و g بسته باشند، آنگاه $g \circ f$ نیز بسته است.

۲)اگر $g \circ f$ بسته و f پیوسته و پوشا باشد، آنگاه نگاشت g بسته است.

۳) اگر $g \circ f$ بسته و g پیوسته و یک به یک باشد، آنگاه f بسته است.

اثبات:

۱) فرض کنیم که F زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X,u) باشد. f نگاشت بسته است پس $f(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته در فضای بستار (Y,v) می باشد. نگاشت g بسته است. درنتیجه $g(f(F))$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (Z,w) می باشد.
۲) فرض کنیم F زیر مجموعه‌ی بسته از فضای بستار (Y,v) باشد. نگاشت f پیوسته است بنابراین $f^{-1}(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X,u) می باشد، طبق فرض نگاشت $g\circ f$ بسته و پوشا است پس $g\circ f(f^{-1}(F)=g(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (Z,w) می‌باشد. در نتیجه $g(F)$ زیر مجموعه‌ی بسته ازفضای بستار (Z,w) و نگاشت g بسته می‌باشد.
۳) فر ض کنیم F زیر مجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X,u) باشد. نگاشت $g\circ f$ بسته است پس $g\circ f(F)$ بسته می‌باشد، از طرفی نگاشت g پیوسته و یک به یک است بنابراین $g^{-1}(g\circ f(F))=f(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (Y,v) و نگاشت f بسته می‌باشد.
$\square$

۳.۱ ضر ب فضا های بستار

ضرب خانواده‌ی $\{(X_\alpha,u_\alpha):\alpha\in I\}$ از فضاهای بستار، فضای بستار $(\prod_{\alpha\in I}X_\alpha,u)$ است که با $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,u_\alpha)$ نمایش داده می‌شود، که در آن $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ ضرب خارجی مجموعه‌های X_α، $\alpha\in I$ می‌باشد، و u عملگر بستار تولید شده توسط نگاشت تصویری $\pi_\alpha:(\prod_{\alpha\in I}X_\alpha,u)\to(X_\alpha,u_\alpha)$ و $\alpha\in I$ است بدین معنی که برای هر $A\subseteq\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ داریم $uA=\prod_{\alpha\in I}u_\alpha\pi_\alpha(A)$.

قضیه **۱.۳.۱** فرض کنید که $\{(X_\alpha,u_\alpha):\alpha\in I\}$ خانواده‌ی از فضاهای بستار و $\beta\in I$ باشد. در این صورت نگاشت تصویری $\pi_\beta:\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,u_\alpha)\to(X_\beta,u_\beta)$ بسته و پیوسته

می‌باشد.

اثبات: فرض کنید A زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار$\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha)$ باشد. $\pi_\beta(\prod_{\alpha\in I} u_\alpha\pi_\alpha(A)) = u_\beta\pi_\beta(A) = \pi_\beta(A)$ و $\prod_{\alpha\in I} u_\alpha\pi_\alpha(A) = uA = A$ می‌باشد. در نتیجه نگاشت π_β بسته است.

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ی فضای بستار$\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha)$ باشد. پس $\pi_\beta(uA) = \pi_\beta(\prod_{\alpha\in I} u_\alpha\pi_\alpha(A)) \subseteq u_\beta\pi_\beta(A)$ است. در نتیجه π_β پیوسته می‌باشد. $\square$

قضیه ۲.۳.۱ فرض کنید $\{(X_\alpha, u_\alpha) : \alpha \in I\}$ خانواده‌ی از فضاهای بستار و $\beta \in I$ باشد. در این صورت F زیرمجموعه‌ی بسته از (X_β, u_β) است، اگر و تنها اگر $F \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} X_\alpha$ زیرمجموعه‌ی بسته از $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha)$ باشد.

اثبات: فرض کنید F زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X_β, u_β) و $\beta \in I$ باشد. نگاشت تصویری $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha) \to (X_\beta, u_\beta)$ پیوسته است، بنابراین طبق قضیه ۳.۲.۱ $\pi_\beta^{-1}(F) = F \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} X_\alpha$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha)$ می‌باشد.

بر عکس. فرض کنید $F \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} X_\alpha$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha)$ باشد. نگاشت تصویری π_β بسته است، بنابراین $\pi_\beta(F \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} X_\alpha) = F$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X_β, u_β) می باشد. $\square$

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنید $\{(X_\alpha, u_\alpha) : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای بستار و $\beta \in I$ باشد. در این صورت G زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار(X_β, u_β) است، اگر و تنها اگر $G \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} X_\alpha$ زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha)$ باشد.

اثبات: فرض کنید $\beta \in I$ و G زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار (X_β, u_β) باشد. چون π_β پیوسته است پس طبق قضیه ۴.۲.۱ $\pi_\beta^{-1}(G) = G \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} X_\alpha$ زیرمجموعه‌ی باز از فضای

بستار $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,u_\alpha)$ است.

برعکس. فرض کنیم $G\times\prod_{\substack{\alpha\neq\beta\\ \alpha\in I}}(X_\alpha,u_\alpha)$ زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار$\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,u_\alpha)$ باشد. بنابراین $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha - G\times\prod_{\substack{\alpha\neq\beta\\ \alpha\in I}}X_\alpha=(X_\beta-G)\times\prod_{\substack{\alpha\neq\beta\\ \alpha\in I}}X_\alpha$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار$\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,u_\alpha)$ می باشد. طبق قضیه‌ی قبل $X_\beta-G$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X_β,u_β) و G زیرمجموعه‌ی باز از فضای بستار (X_β,u_β) می‌باشد. $\square$

قضیه **۴.۳.۱** فرض کنید (X,u) فضای بستار و $\{(Y_\alpha,v_\alpha):\alpha\in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای بستار باشد. در این صورت نگاشت $f:(X,u)\to\prod_{\alpha\in I}(Y_\alpha,v_\alpha)$ بسته است ، اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha\in I$، $\pi_\alpha\circ f$ بسته باشد.

اثبات: فرض کنید نگاشت $f:(X,u)\to\prod_{\alpha\in I}(Y_\alpha,v_\alpha)$ بسته باشد. بنابراین به ازای هر $\alpha\in I$، $\pi_\alpha\circ f$ بسته می‌باشد.

برعکس. فرض کنید نگاشت $\pi_\alpha\circ f$ به ازای هر $\alpha\in I$ بسته، و نگاشت f بسته نباشد. در این صورت زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F از فضای بستار (X,u) وجود دارد، به طوریکه $\prod_{\alpha\in I}v_\alpha\pi_\alpha(f(F))\not\subseteq f(F)$. بنابراین وجود دارد $\beta\in I$ به طوریکه $v_\beta\pi_\beta(f(F))\not\subseteq\pi_\beta f(F)$. اما $\pi_\beta\circ f$ بسته است، درنتیجه $\pi_\beta(f(F))$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (Y_β,u_β) می‌باشد، که تناقص دارد. $\square$

قضیه **۵.۳.۱** فرض کنید $\{(X_\alpha,u_\alpha):\alpha\in I\}$ و $\{(Y_\alpha,v_\alpha):\alpha\in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای بستار و به ازای هر $\alpha\in I$ نگاشت $f_\alpha:(X_\alpha,u_\alpha)\to(Y_\alpha,v_\alpha)$ پوشا و نگاشت $f:\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha,u_\alpha)\to\prod_{\alpha\in I}(Y_\alpha,v_\alpha)$ بصورت $f((x_\alpha)_{\alpha\in I})=(f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in I}$ تعریف شده باشد. در این صورت نگاشت f بسته است اگر و تنها اگر f_α به ازای هر $\alpha\in I$ بسته باشد.

اثبات: فرض کنید $\beta \in I$ و F زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار (X_β, u_β) باشد. در این صورت $F \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} X_\alpha$ زیرمجموعه‌ی بسته از $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha)$ می باشد. نگاشت f بسته است پس $f(F \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} X_\alpha) = f_\beta(F) \times \prod_{\substack{\alpha\neq\beta \\ \alpha\in I}} Y_\alpha$ زیرمجموعه‌ی بسته از $\prod_{\alpha\in I}(Y_\alpha, v_\alpha)$ می‌باشد. طبق قضیه‌ی ۲.۳.۱، $f_\beta(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته ازفضای بستار (Y_β, v_β) است. بنابرین f_β بسته می‌باشد.

برعکس. فرض کنید f_β به ازای هر $\beta \in I$ بسته و f بسته نباشد. پس زیرمجموعه‌ی بسته‌ی F از $\prod_{\alpha\in I}(X_\alpha, u_\alpha)$ وجود دارد به‌طوریکه $f(F) \not\subseteq \prod_{\beta\in I} v_\beta \pi_\beta(f(F))$. بنابراین $\beta \in I$ وجود دارد به طوریکه $f_\beta(\pi_\beta(F)) \not\subseteq v_\beta f_\beta(\pi_\beta(F))$. $\pi_\beta(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته ازفضای بستار (X_β, u_β) می‌باشد و f_β بسته پس $f_\beta(\pi_\beta(F))$ زیرمجموعه‌ی بسته از فضای بستار(Y_β, v_β) می‌باشد، که تناقض دارد. $\square$

قضیه **۶.۳.۱** فرض کنید (X, u) فضای بستار و $\{(Y_\alpha, v_\alpha) : \alpha \in I\}$ خانواده‌ای از فضاهای بستارباشد. در این صورت نگاشت $f : (X, u) \to \prod(Y_\alpha, v_\alpha)$ پیوسته است، اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in I$، $\pi_\alpha \circ f$ پیوسته باشد.

اثبات: فرض کنید f پیوسته باشد. π_α به ازای هر $\alpha \in I$ پیوسته است بنابرین $\pi_\alpha \circ f$ به ازای هر $\alpha \in I$ پیوسته می باشد.

برعکس. فرض کنید $\pi_\alpha \circ f$ به ازای هر $\alpha \in I$ پیوسته باشد. فرض کنیم که f پیوسته نباشد پس زیرمجموعه‌ی A از X وجود دارد به طوریکه $f(uA) \not\subseteq \prod_{\alpha\in I} v_\alpha \pi_\alpha(f(A))$، در نتیجه $\beta \in I$ وجود دارد، به‌طوریکه $\pi_\beta(f(uA)) \not\subseteq v_\beta \pi_\beta(f(A))$ و این تناقص با پیوستگی $\pi_\beta \circ f$ دارد. $\square$