به‌نام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

رساله برای دریافت درجه دکتری ریاضی محض (آنالیز)

حل و تقریب معادلات تابعی

توسط:

حمید خدائی

استاد راهنما:

دکتر مجید اسحاقی

استاد مشاور:

دکتر رضا معمارباشی

بهمن ۱۳۹۱

چکیده

مبحث معادلات تابعی یک شاخه از ریاضیات است که پیدایش آن تقریباً به زمان تعریف تابع برمی‌گردد. در سال‌های ۱۷۴۷ و ۱۷۵۰، دالامبر سه مقاله چاپ کرد که آن‌ها آغاز کار روی معادلات تابعی بودند، اما اولین رشد معنی‌دار در به‌نظم درآوردن معادلات تابعی توسط مسئله‌ی قاعده متوازی الاضلاع نیروها ایجاد شد. ریاضیدان‌های مشهوری از جمله آبل، اویلر، پکسیدر، پواسون، دالامبر، فرشه، کوشی، کولموگوروف، گاوس و ینسن معادلات تابعی را، به‌خاطر سادگی ظاهری و ماهیت هماهنگ، مورد مطالعه قرار داده‌اند.

در سال ۱۹۴۰، مسئله‌ی تقریب یا پایداری اولام معادلات تابعی با بیان این سوال که «اگر یک معادله تابعی معین را با یک نامعادله تابعی جای‌گزین کنیم، آن‌گاه تحت چه شرایطی می‌توان گفت حل‌های نامعادله به حل‌های معادله نزدیک هستند» مرتبط با همریختی‌های گروهی توسط اولام مطرح شد. یک سال بعد، این سوال توسط هایرز برای نگاشت‌های جمعی در فضاهای باناخ پاسخ داده شد، ولی لازم به ذکر است که اولین دست‌آورد راجع‌به مسئله‌ی فوق در کتاب پولیا و زگو، سال ۱۹۲۵، دیده شده است.

این رساله شامل دو بخش اصلی است. بخش اول، به حل و بررسی برخی از معادلات تابعی می‌پردازد. بخش دوم، به مسئله‌ی تقریب اولام معادلات تابعی مختلف، با دو روش مستقیم و نقطه ثابت، اختصاص یافته است.

واژه‌های کلیدی: حل تقریبی، حل دقیق، روش مستقیم، روش نقطه ثابت، فضای ۲‑نرم‌دار، فضای β‑نرم‌دار، فضای نا‌ارشمیدسی، معادله تابعی فرشه، معادله تابعی کوشی‑ینسن، معادله تابعی مربعی، معادله تابعی مکعبی، میدان p‑یی، نگاشت چندجمعی، نگاشت تک‌جمله‌ای، نگاشت همگن از درجه α، C^*‑جبر، C^*‑جبر لی، (α, β, γ)‑مشتق.

فهرست مندرجات

مقدمه

معادلات تابعی تقریباً هم‌زمان با تئوری مدرن توابع در نوشته‌های علمی ظاهر شده است. در سال‌های ۱۷۴۷ و ۱۷۵۰، دالامبر[۱] سه مقاله چاپ کرد که آن‌ها آغاز کار روی معادلات تابعی بودند [۲۴]-[۲۲][۲]. سپس اویلر[۳] [۳۴]، پواسون[۴] [۹۵]، گاوس[۵] [۴۱]، کوشی[۶] [۱۹]، آبل[۷] [۱]، داربو[۸] [۲۵] و افراد دیگری، معادلات تابعی را مورد مطالعه قرار دادند.

هیلبرت[۹] [۴۸]، در سخنرانی خود در همایش بین‌المللی ریاضیدان‌ها[۱۰]، مسائل حل نشده‌ای را مطرح کرد که بخش دوم از مسئله‌ی پنجم او [۶] در حالت کلی به معادلات تابعی و به‌ویژه معادلات تابعی مورد بحث آبل اختصاص داشت. آبل [۳]-[۱] اولین کسی بود که معادلات تابعی را با روشی معین مورد بررسی قرار داد. او معادلات تابعی را با تبدیل به معادلات دیفرانسیلی حل می‌کرد. هیلبرت اشاره کرد که تئوری معادلات دیفرانسیل روش‌های جالب و کارایی برای حل کردن یک معادله تابعی فراهم می‌کند، اما فرض‌های دیفرانسیل‌پذیری به‌طور ذاتی نیاز نیستند؛ یعنی، شرایط دیفرانسیل‌پذیری مورد استفاده‌ی آبل با شرایط ضعیف‌تری می‌توانند جای‌گزین شوند. پیشنهاد فوق باعث شد که بسیاری از محققین معادلات تابعی را بدون فرض‌های معینی مورد بحث قرار بدهند. این تلاش، تئوری مدرن معادلات تابعی را به‌وجود آورد. تئوری معادلات تابعی، یک نظم ریاضیاتی مدرن را

---

[۱] d'Alembert

[۲] اعداد داخل کروشه اشاره به کتاب‌نامه دارند.

[۳] Euler

[۴] Poisson

[۵] Gauss

[۶] Cauchy

[۷] Abel

[۸] Darboux

[۹] Hilbert

[۱۰] سخنرانی هیلبرت در همایش بین‌المللی ریاضیدان‌ها در پاریس، سال ۱۹۰۰، فهرستی مرکب از ۲۳ مسئله‌ی ریاضی بود که از آن زمان تا کنون انگیزه‌بخش و شکل‌دهنده‌ی جهت‌گیری تحقیقات ریاضی هستند.

شکل می‌دهد که در شش دهه‌ی اخیر به‌سرعت پیشرفت کرده است. از کتاب‌های جامعی در توسعه این تئوری می‌توان به پنچرل[۱۱] [۹۴]، پیکارد[۱۲] [۹۳]، هاردی[۱۳]، لیتهلد[۱۴] و پولیا [۴۵]، اچل[۱۵] [۴]، کوچما[۱۶] [۷۲]، اسمیتل[۱۷] [۱۰۷]، اچل و دمبرس[۱۸] [۸]، کوچما، چوچسکی[۱۹] و جر[۲۰] [۷۳]، هایرز، ایساک[۲۱] و راسیاس[۲۲] [۵۰]، ساهو[۲۳] و ریدل[۲۴] [۱۰۱]، چرویک[۲۵] [۲۱]، کناپان[۲۶] [۶۷] و هم‌چنین [۵، ۶۴، ۷۴، ۹۷، ۱۰۳] اشاره کرد.

زمینه‌ی معادلات تابعی شامل معادلات مختلفی از جمله دیفرانسیلی، تفاضلی و انتگرالی می‌باشد. مباحث حل و تقریب از مفاهیم جالب در این زمینه هستند.

حل کردن یک معادله تابعی یعنی پیدا کردن همه‌ی توابعی که در معادله تابعی مذکور صدق می‌کنند. برای به‌دست آوردن یک حل، اغلب باید توابع را به ماهیتی خاص (از قبیل اندازه‌پذیری، تحدب، تحلیل‌پذیری، پیوستگی، دیفرانسیل‌پذیری، کران‌داری یا یکنوایی) محدود کرد. بعضی مواقع می‌توان یک معادله تابعی را با تبدیل به معادلات دیفرانسیلی یا انتگرالی و یا به یک معادله تابعی دیگر که شناخته شده است ساده نمود.

در سال ۱۹۴۰، اولام[۲۷] [۱۱۰] مسئله‌ی زیر را مطرح کرد: اگر یک معادله تابعی معین را با یک نامعادله تابعی جای‌گزین کنیم، آن‌گاه تحت چه شرایطی می‌توان گفت حل‌های نامعادله به حل‌های معادله نزدیک هستند. گیریم $(G_1,\cdot)$ یک گروه، $(G_2,\star)$ یک گروه متریک با متریک $d(\cdot,\cdot)$ و $\varepsilon > 0$ داده شده‌اند، سوال اولام از این قرار است: آیا $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری که اگر نگاشت

[۱۱] Pincherle
[۱۲] Picard
[۱۳] Hardy
[۱۴] Littlewood
[۱۵] Aczél
[۱۶] Kuczma
[۱۷] Smital
[۱۸] Dhombres
[۱۹] Choczewski
[۲۰] Ger
[۲۱] Isac
[۲۲] Rassias
[۲۳] Sahoo
[۲۴] Riedel
[۲۵] Czerwik
[۲۶] Kannappan
[۲۷] Ulam

$f : G_1 \to G_2$ به‌ازای هر $x, y \in G_1$ در نامعادله‌ی $d(f(x \cdot y), f(x) \star f(y)) < \delta$ صدق کند، آن‌گاه یک همریختی $H : G_1 \to G_2$ موجود باشد که به‌ازای هر $x \in G_1$، $d(f(x), H(x)) < \varepsilon$ ؟ یک سال بعد، مسئله‌ی اولام توسط هایرز[۲۸] [۴۹]، برای نگاشت‌های جمعی در فضاهای باناخ[۲۹]، پاسخ داده شد. البته، لچکویچ[۳۰] در چهارمین کنفرانس بین‌المللی معادلات و نامعادلات تابعی [۴۳] بیان کرد که حالت خاصی از نتیجه‌ی هایرز، برای توابع جمعی از مجموعه‌ی اعداد طبیعی به اعداد حقیقی، توسط پولیا[۳۱] و زگو[۳۲] [۹۶] در سال ۱۹۲۵ اثبات شده است. روش هایرز، برای پاسخ به مسئله‌ی اولام، روش مستقیم نامیده می‌شود [۵۰] و لازم به ذکر است که این روش در بعضی از مواقع پاسخ‌گو نیست [۶۵]. در سال ۱۹۹۱، بیکر[۳۳] [۱۵] مسئله‌ی اولام را با استفاده از قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ مورد بررسی قرار داد که این روش، برای پاسخ به مسئله‌ی اولام، روش نقطه ثابت نامیده می‌شود. برای آشنا شدن با روش‌های دیگر و هم‌چنین کاربردهایی مرتبط با مسئله‌ی تقریب اولام به [۱۳، ۱۸، ۳۵، ۴۲، ۴۶، ۵۵، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۹۰، ۹۸، ۱۰۴، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۵] رجوع کنید.

سازمان‌دهی این رساله به‌صورت زیر است:

فصل اول، شامل تعاریف، مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی مورد استفاده در فصل‌های بعدی است.

فصل دوم، به حل و بررسی برخی از معادلات تابعی تک‌جمله‌ای و چندجمله‌ای می‌پردازد.

فصل سوم، به مسئله‌ی تقریب اولام معادلات تابعی بررسی شده در فصل دوم، با دو روش مستقیم و نقطه ثابت، اختصاص یافته است.

مقاله‌های زیر از این رساله استخراج شده‌اند:

1. M. Eshaghi Gordji and H. Khodaei, A fixed point technique for investigating the stability of (α, β, γ)-derivations on Lie C^*-algebras, Nonlinear Anal. 76 (2013) 52-57.

---

[۲۸] Hyers

[۲۹] استفان باناخ (Stefan Banach)، ۱۹۴۵–۱۸۹۲، یک ریاضیدان برجسته‌ی لهستانی است. او پایه‌گذار آنالیز تابعی، یکی از شاخه‌های ریاضیات معاصر، است.

[۳۰] Laczkovich

[۳۱] Pólya

[۳۲] Szegő

[۳۳] Baker

2. M. Eshaghi Gordji and H. Khodaei, Solution and approximation of a functional equation having monomials, submitted.

3. M. Eshaghi Gordji, H. Khodaei and G.H. Kim, Nearly quadratic mappings over p-adic fields, Abstr. Appl. Anal. (2012) Art. ID 285807.

4. M. Eshaghi Gordji, H. Khodaei and A. Najati, Approximation of cubic mapping with n-variables in β-normed left Banach modules on Banach algebras, Bull. Korean Math. Soc. 48 (2011) 1063-1078.

5. H. Khodaei, M. Eshaghi Gordji, S.S. Kim and Y.J. Cho, Approximation of radical functional equations related to quadratic and quartic mappings, J. Math. Anal. Appl. 395 (2012) 284-297.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی

این فصل شامل تعاریف، مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی می‌باشد که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند.

در این رساله از نمادهای $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}^+$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}_+$، $\mathbb{R}^+$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ به‌ترتیب برای نشان دادن مجموعه‌های اعداد طبیعی، اعداد صحیح نامنفی، اعداد صحیح، اعداد گویای نامنفی، اعداد گویا، اعداد حقیقی مثبت، اعداد حقیقی نامنفی، اعداد حقیقی و اعداد مختلط استفاده می‌شود. هم‌چنین، منظور از میدان $\mathbb{F}$ همان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می‌باشد.

۱.۱ فضاهای نرم‌دار

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ یک نرم است هرگاه

۱) به‌ازای هر $x \in X$، $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$؛

۲) به‌ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$، $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$؛

۳) به‌ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی).

در این‌صورت $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم.

واضح است که تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ با ضابطه‌ی $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متریک روی X است. به‌علاوه، X یک فضای باناخ است هرگاه تحت متریک حاصل از نرمش کامل باشد؛ یعنی، هر دنباله‌ی کوشی در این فضای متریک همگرا باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم $\beta \in (0,1]$. تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ یک β–نرم است هرگاه در ویژگی‌های (۱) و (۳)، تعریف ۱.۱.۱ صدق کند و به‌ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$،

$$\|\lambda x\| = |\lambda|^\beta \|x\|.$$

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم $p \in (0,1]$. تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ یک p–توان نرم است هرگاه در ویژگی‌های (۱) و (۲)، تعریف ۱.۱.۱ صدق کند و به‌ازای هر $x,y \in X$،

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p.$$

مثال ۴.۱.۱ فرض کنیم L_β، فضای همه‌ی توابع اندازه‌پذیر $f(t)$ روی $I = [a,b]$ با $\int_a^b |f(t)|^\beta dt < \infty$ (توابع تقریباً همه‌جا برابر را یکی می‌گیریم) باشد و $\beta \in (0,1]$. اگر تابع $\|f\|_\beta$ به‌ازای هر $f \in L_\beta$ به‌صورت $\|f\|_\beta = \left(\int_a^b |f(t)|^\beta dt < \infty\right)^{\frac{1}{\beta}}$ تعریف شود، آن‌گاه $\|f\|_\beta$ یک β–توان نرم است [۷۱] و توان βام این β–توان نرم روی L_β، یک β–نرم است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی (روی $\mathbb{R}$) باشد و $\dim X > 1$. تابع $\|\cdot,\cdot\| : X \times X \to \mathbb{R}^+$ یک ۲–نرم است هرگاه

۱) به‌ازای هر $x,y \in X$، $\|x,y\| = 0$ اگر و تنها اگر x و y وابسته خطی باشند؛

۲) به‌ازای هر $x,y \in X$، $\|x,y\| = \|y,x\|$؛

۳) به‌ازای هر $x,y \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\|\lambda x, y\| = |\lambda| \, \|x,y\|$؛

۴) به‌ازای هر $x,y,z \in X$، $\|x, y+z\| \leq \|x,y\| + \|x,z\|$.

در این‌صورت $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ را یک فضای ۲–نرم‌دار می‌نامیم [۳۸، ۳۷].

مثال ۶.۱.۱ فرض کنیم $X=\mathbb{R}^3$ یک فضای برداری حقیقی باشد، $x=(x_1,x_2,x_3)\in X$ و $y=(y_1,y_2,y_3)\in X$. در این‌صورت

$$\|x,y\|_c=\Big((x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x,y\|_d=|x_1y_2-x_2y_1|+|x_1y_3-x_3y_1|+|x_2y_3-x_3y_2|$$

روی X، ۲–نرم هستند.

مثال ۷.۱.۱ فرض کنیم $X=\mathbb{C}$ یک فضای برداری حقیقی باشد و $x=a+bi, y=c+di\in X$. در این‌صورت $\|x,y\|=|ad-bc|$ یک ۲–نرم روی X است.

مثال ۸.۱.۱ فرض کنیم P_n مجموعه‌ی همه چندجمله‌ای‌های حقیقی از درجه‌ی حداکثر n روی بازه $[0,1]$ (P_n، همراه با جمع معمولی و ضرب اسکالر، یک فضای برداری حقیقی است) و $\{x_0,x_1,\ldots,x_{2n}\}$ نقاط ثابت مجزایی در $[0,1]$ باشند. در این‌صورت

$$\|f,g\|=\begin{cases}\sum_{i=0}^{2n}|f(x_i)g(x_i)| & \text{اگر } f \text{ و } g \text{ مستقل خطی باشند؛}\\ 0 & \text{اگر } f \text{ و } g \text{ وابسته خطی باشند،}\end{cases}$$

یک ۲–نرم روی P_n است [۵۲].

لم ۹.۱.۱ اگر $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ یک فضای ۲–نرم‌دار، $x\in X$ و به‌ازای هر $y\in X$ داشته باشیم $\|x,y\|=0$، آن‌گاه $x=0$ [۳۷].

تذکر ۱۰.۱.۱ فرض کنیم $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ یک فضای ۲–نرم‌دار باشد. بنابر ویژگی‌های (۲) و (۴) تعریف ۵.۱.۱، به‌ازای هر $x,y,z\in X$ داریم $\|x+y,z\|\le\|x,z\|+\|y,z\|$. با قرار دادن $s=x+y$ در نامساوی اخیر، به‌ازای هر $x,z,s\in X$ به‌دست می‌آوریم $\|s,z\|\le\|x,z\|+\|s-x,z\|$ و لذا $\|s,z\|-\|x,z\|\le\|s-x,z\|$. با عوض کردن نقش x و s در نامساوی قبل، به‌ازای هر $x,z,s\in X$ می‌بینیم که $\|x,z\|-\|s,z\|\le\|x-s,z\|$. بنابراین، به‌ازای هر $x,y,z\in X$ داریم

$$\Big|\|x,z\|-\|y,z\|\Big|\le\|x-y,z\|.$$

در نتیجه، تابع $x\mapsto\|x,y\|$ از X به $\mathbb{R}$ به‌ازای هر y ثابت از X، تابعی پیوسته است.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ یک فضای ۲−نرم‌دار باشد. در این‌صورت

۱) دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X به x همگرا است و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} x_n = x$، هرگاه به‌ازای هر $y \in X$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$؛

۲) دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای ۲−نرم‌دار X کوشی است هرگاه نقاط $y, z \in X$ موجود باشند به‌طوری که y و z مستقل خطی‌اند، $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m, y\| = 0$ و $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m, z\| = 0$؛

۳) X را یک فضای ۲−باناخ گوییم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در X همگرا باشد [۳۹، ۱۱۲].

۲.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. نگاشت $T : X \times X \to Y$ یک نگاشت دوخطی است هرگاه دوجمعی باشد؛ یعنی، به‌ازای هر $x, y, z \in X$،

$$T(x+y,z) = T(x,z) + T(y,z), \quad T(x,y+z) = T(x,y) + T(x,z)$$

و روی هر مولفه همگن باشد؛ یعنی، به‌ازای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$،

$$T(\lambda x, y) = T(x, \lambda y) = \lambda T(x,y).$$

تعریف ۲.۲.۱ یک جبر عبارت است از فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$، همراه با نگاشت دوخطی $\cdot : A \times A \to A \ ((a,b) \mapsto a\cdot b := ab)$، به‌طوری که به‌ازای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم

$$a(bc) = (ab)c.$$

هرگاه یک نرم روی A موجود باشد که A را به یک فضای نرم‌دار بدل کرده و به‌ازای هر $a, b \in A$ در نامساوی ضربی

$$\|ab\| \le \|a\| \, \|b\|$$

صدق کند، آن‌گاه A یک جبر نرم‌دار می‌باشد. هرگاه، علاوه بر این، A یک فضای متری کامل نسبت به این نرم باشد، آن‌گاه A را یک جبر باناخ می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱ نگاشت $(a \mapsto a^*)\ A \to A :{}^*$ روی جبر A، یک برگشت است هرگاه

۱) به‌ازای هر $a \in A$، $(a^*)^* = a$؛

۲) به‌ازای هر $a, b \in A$، $(a+b)^* = a^* + b^*$؛

۳) به‌ازای هر $a \in A$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$، $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$؛

۴) به‌ازای هر $a, b \in A$، $(ab)^* = b^* a^*$.

تعریف ۴.۲.۱ جبر نرم‌دار A را، همراه با برگشت *، یک *−جبر نرم‌دار گوییم هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $\|a^*\| = \|a\|$.

تعریف ۵.۲.۱ *− جبر باناخ A را یک C^*−جبر گوییم هرگاه به‌ازای هر $a \in A$، $\|a^* a\| = \|a\|^۲$.

تعریف ۶.۲.۱ عنصر x از C^*−جبر A را یک عنصر مثبت گوییم هرگاه خودالحاقی و طیف آن زیرمجموعه‌ی از $\mathbb{R}^+$ باشد؛ یعنی،

$$x^* = x \quad \text{و} \quad \sigma(x) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} : \lambda ۱ - x \notin \{x \in A : \text{معکوس‌پذیر است}\ x\}\,\} \subseteq \mathbb{R}^+.$$

در این‌صورت می‌نویسیم $x \geq ۰$.

تذکر ۷.۲.۱ اگر x یک عنصر مثبت از C^*−جبر A باشد، آن‌گاه عنصر مثبت منحصر به‌فرد $y \in A$ وجود دارد به‌طوری که $y^۲ = x$ ($\sqrt{x}$ نمایش عنصر مثبت منحصر به‌فرد $y \in A$ است هرگاه $x = y^۲$). جمع دو عنصر مثبت در یک C^*−جبر، یک عنصر مثبت است و به‌ازای عنصر دلخواه x از یک C^*−جبر، xx^* عنصری مثبت است [۸۵].

تعریف ۸.۲.۱ یک جبر لی[۱] عبارت است از فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$، همراه با نگاشت دوخطی $((a,b) \mapsto [a,b])\ A \times A \to A : [\cdot,\cdot]$، به‌طوری که به‌ازای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم

۱) $[a,a] = ۰$؛

۲) $[a,[b,c]] = [b,[c,a]] = [c,[a,b]] = ۰$.

---
[۱] Lie algebra

با استفاده از ویژگی (۱)، به‌ازای هر $a, b \in A$، داریم $[a, b] = -[b, a]$. به‌علاوه، جبر A همراه با ضرب لی $[a, b] = ab - ba$ که در آن $a, b \in A$، یک جبر لی است [۵۳].

مثال ۹.۲.۱ $M_n(\mathbb{F})$، جبر ماتریس‌های $n \times n$ روی $\mathbb{F}$، همراه با $[S, T] = ST - TS$ که در آن $S, T \in M_n(\mathbb{F})$، یک جبر لی است.

تعریف ۱۰.۲.۱ یک C^*−جبر همراه با ضرب لی، یک C^*−جبر لی نامیده می‌شود [۹۱].

تعریف ۱۱.۲.۱ [۳۰، ۸۷] فرض کنیم A یک C^*−جبر لی باشد. نگاشت $\mathbb{C}$−خطی $D : A \to A$ را یک مشتق لی گوییم هرگاه به‌ازای هر $a, b \in A$،

$$D[a, b] = [D(a), b] + [a, D(b)].$$

هم‌چنین، D را یک (α, β, γ)−مشتق لی گوییم هرگاه $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ موجود باشند به‌طوری که به‌ازای هر $a, b \in A$،

$$\alpha D[a, b] = \beta[D(a), b] + \gamma[a, D(b)].$$

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر و $\mathbb{X}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. $\mathbb{X}$ را، همراه با نگاشت ضرب مدولی $\cdot : A \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ $((a, x) \mapsto a \cdot x := ax)$، یک A−مدول چپ گوییم هرگاه

۱) به‌ازای هر $a \in A$، نگاشت $(a, x) \mapsto ax$ روی $\mathbb{X}$ خطی باشد؛

۲) به‌ازای هر $x \in \mathbb{X}$، نگاشت $(a, x) \mapsto ax$ روی A خطی باشد؛

۳) به‌ازای هر $a, b \in A$ و $x \in \mathbb{X}$، $a(bx) = (ab)x$.

به‌همین طریق، می‌توان A−مدول راست را تعریف نمود. $\mathbb{X}$ را یک A−دو مدول یا به‌طور خلاصه یک A−مدول گوییم هرگاه A−مدول چپ و راست باشد و به‌ازای هر $a, b \in A$ و $x \in \mathbb{X}$، $a(xb) = (ax)b$.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\mathbb{X}$ یک فضای باناخ باشد. در این‌صورت $\mathbb{X}$ را یک A–مدول چپ باناخ گوییم هرگاه $\mathbb{X}$ یک A–مدول چپ باشد و به‌ازای هر $a \in A$ و $x \in \mathbb{X}$،

$$\|ax\| \leq \|a\|\|x\|. \tag{۱.۲.۱}$$

هم‌چنین، $\mathbb{X}$ را یک A–مدول راست باناخ گوییم هرگاه $\mathbb{X}$ یک A–مدول راست باشد و به‌ازای هر $a \in A$ و $x \in \mathbb{X}$،

$$\|xa\| \leq \|x\|\|a\|. \tag{۱.۲.۲}$$

به‌علاوه، $\mathbb{X}$ را یک A–مدول باناخ گوییم هرگاه $\mathbb{X}$ یک A–مدول باشد و به‌ازای هر $a \in A$ و $x \in \mathbb{X}$ نامساوی‌های (۱.۲.۱) و (۱.۲.۲) برقرار باشند.

مثال ۱۴.۲.۱ فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\mathbb{X}$ یک A–مدول باناخ باشد. در این‌صورت $\mathbb{X}^*$، فضای دوگان $\mathbb{X}$، همراه با ضرب‌های مدولی زیر

$$\langle af, x\rangle = \langle f, xa\rangle, \qquad \langle fa, x\rangle = \langle f, ax\rangle$$

که $f \in \mathbb{X}^*$، $x \in \mathbb{X}$ و $a \in A$، یک A–مدول باناخ است.

۳.۱ فضاهای ناارشمیدسی

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. تابع $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}^+$ یک قدرمطلق ناارشمیدسی است هرگاه

۱) به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{K}$، $|\lambda| = 0$ اگر و تنها اگر $\lambda = 0$؛

۲) به‌ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$، $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$؛

۳) به‌ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$، $|\lambda + \mu| \leq \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ (نامساوی مثلثی قوی).

در این‌صورت $\mathbb{K}$ را، مجهز به قدرمطلق ناارشمیدسی، یک میدان ناارشمیدسی می‌نامیم. با توجه به ویژگی (۲) می‌بینیم که $|۱| = |-۱| = ۱$. بنابراین، با استقرا، از ویژگی (۳) داریم که به‌ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $|n| \leq ۱$. در این رساله، فرض می‌کنیم که قدرمطلق ناارشمیدسی $|\cdot|$ نابدیهی است؛ یعنی، $\lambda_۰ \in \mathbb{K}$ وجود دارد به‌طوری که $|\lambda_۰| \neq ۰, ۱$.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای برداری روی میدان ناارشمیدسی $\mathbb{K}$ باشد. تابع $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+$ یک نرم ناارشمیدسی است هرگاه روی $\mathbb{K}$ یک نرم باشد با نامساوی مثلثی قوی؛ یعنی به‌ازای هر $x, y \in \mathcal{X}$،

$$\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

در این‌صورت $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ را یک فضای ناارشمیدسی می‌نامیم [۶۹]. با توجه به نامساوی فوق، به‌ازای هر $x, y \in \mathcal{X}$ و هر $m, n \in \mathbb{N}$ با $n > m$، داریم

$$\|x_n - x_m\| \leq \max\left\{\|x_{j+۱} - x_j\| : m \leq j \leq n-۱\right\}.$$

بنابراین، دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای ناارشمیدسی $\mathcal{X}$ کوشی است اگر و تنها اگر دنباله‌ی $\{x_{n+۱} - x_n\}$ در $\mathcal{X}$ به صفر همگرا باشد. هم‌چنین، $\mathcal{X}$ را یک فضای ناارشمیدسی کامل یا یک فضای باناخ ناارشمیدسی گوییم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در $\mathcal{X}$ همگرا باشد.

در سال ۱۸۹۹، هنسل[۲] [۴۷] اعداد p-یی را معرفی کرد. یک ویژگی مهم از اعداد p-یی این است که آن‌ها در اصل ارشمیدسی[۳] «اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری که $x < ny$» صدق نمی‌کنند.

تعریف ۳.۳.۱ به‌ازای هر عدد اول ثابت p و هر عدد گویای ناصفر x، یک عدد صحیح منحصر به‌فرد n_x وجود دارد به‌طوری که $x = \frac{a}{b}\, p^{n_x}$، که در آن a و b اعدادی صحیح و بر p بخش‌پذیر نیستند. در این‌صورت، قدرمطلق p-یی $|x|_p := p^{-n_x}$ یک نرم ناارشمیدسی روی $\mathbb{Q}$ تعریف می‌کند. $\mathbb{Q}$ کامل شده، نسبت به متریک $d(x,y) = |x-y|_p$، میدان عدد p-یی نامیده و با $\mathbb{Q}_p$ نشان داده می‌شود.

---
[۲] Hensel

[۳] ارشمیدس از اهالی سیراکوز (Archimedes of Syracuse)، ۲۱۲—۲۷۸ پیش از میلاد، یک ریاضیدان و مخترع یونانی است.

توجه کنید که اگر $p > ۳$، آن‌گاه به‌ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ داریم $|۲^k|_p = ۱$.

۴.۱ قضایای نقطه ثابت

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنیم $L \in (۰, ۱)$، $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{۰\}$ و $\phi : X \to Y$ یک نگاشت بین فضاهای برداری حقیقی باشد. در این‌صورت

- ϕ را یک نگاشت زیرجمعی انقباضی گوییم هرگاه ثابت L موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x, y \in X$، $\phi(x+y) \leq L\left(\phi(x)+\phi(y)\right)$؛
- ϕ را یک نگاشت فوق‌جمعی انبساطی گوییم هرگاه ثابت L موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x, y \in X$، $\phi(x+y) \geq \frac{۱}{L}\left(\phi(x)+\phi(y)\right)$؛
- ϕ را یک نگاشت همگن از درجه α (نگاشت همگن، اگر $\alpha = ۱$) گوییم هرگاه به‌ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (اگر $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{۱\}$، همگن را با $\mathbb{N}$–همگن جای‌گزین می‌کنیم)، $\phi(\lambda x) = \lambda^\alpha \phi(x)$؛
- ϕ را یک نگاشت زیرهمگن انقباضی از درجه α گوییم هرگاه ثابت L موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}_+$، $\phi(\lambda x) \leq \lambda^\alpha L\phi(x)$؛
- ϕ را یک نگاشت فوق‌همگن انبساطی از درجه α گوییم هرگاه ثابت L موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}_+$، $\phi(\lambda x) \geq \frac{\lambda^\alpha}{L}\phi(x)$.

تذکر ۲.۴.۱ اگر نگاشت ϕ به‌طور جداگانه زیرجمعی انقباضی و فوق‌جمعی انبساطی باشد، آن‌گاه ϕ به‌ترتیب $\mathbb{N}$–زیرهمگن انقباضی ($\ell = ۱$) و $\mathbb{N}$–فوق‌همگن انبساطی ($\ell = -۱$) است.

تذکر ۳.۴.۱ اگر نگاشت ϕ به‌طور جداگانه زیرهمگن انقباضی از درجه α ($\ell = ۱$) و فوق‌همگن انبساطی از درجه α ($\ell = -۱$) باشد، آن‌گاه به‌ازای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم

$$\phi(\lambda^{\ell k}x) \leq (\lambda^{\ell\alpha}L)^k\phi(x).$$

تعریف ۴.۴.۱ فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to [0, \infty]$ یک متریک تعمیم‌یافته است هرگاه روی X یک متریک باشد. در این‌صورت، (X, d) را یک فضای متریک تعمیم‌یافته می‌نامیم.

تعریف ۵.۴.۱ فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک (یا متریک تعمیم‌یافته) باشد. نگاشت $\Lambda : X \to X$ را انقباضی گوییم هرگاه در شرط لیپ‌شیتز[۴] با ثابت لیپ‌شیتز $L \geq 0$ صدق کند؛ یعنی به‌ازای هر $x, y \in X$،

$$d(\Lambda x, \Lambda y) \leq L d(x, y).$$

اگر $L < 1$، آن‌گاه Λ را یک نگاشت انقباضی اکید می‌نامیم.

قضیه ۶.۴.۱ (اصل انقباض باناخ) فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل و $\Lambda : X \to X$ یک نگاشت انقباضی اکید با ثابت لیپ‌شیتز L باشد. در این‌صورت

- نگاشت Λ دارای نقطه ثابت منحصر به‌فرد $x^* = \Lambda(x^*)$ است؛
- نقطه ثابت x^* جاذب کلی است؛ یعنی به‌ازای هر نقطه‌ی شروع $x \in X$، $\lim_{n\to\infty} \Lambda^n x = x^*$؛
- به‌ازای هر $x \in X$ و هر $n \in \mathbb{N}$، نامساوی‌های زیر برقرارند:

$$d(\Lambda^n x, x^*) \leq L^n d(x, x^*),$$

$$d(\Lambda^n x, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(\Lambda^n x, \Lambda^{n+1} x),$$

$$d(x, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(x, \Lambda x).$$

قضیه ۷.۴.۱ (قضیه نقطه ثابت تعمیم‌یافته [۲۶]) فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک تعمیم‌یافته‌ی کامل و $\Lambda : X \to X$ یک نگاشت انقباضی اکید با ثابت لیپ‌شیتز $L < 1$ باشد. در این‌صورت به‌ازای $x \in X$، یکی از دو گزاره‌ی زیر برقرار است:

۱) به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(\Lambda^n x, \Lambda^{n+1} x) = \infty$؛

---
[۴] Lipschitz

۲) عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $n \geq k$، $d(\Lambda^n x, \Lambda^{n+1} x) < \infty$. در این‌صورت

- دنباله‌ی $\{\Lambda^n x\}$ به نقطه ثابت y^* از Λ همگرا است؛
- y^* نقطه ثابت منحصر به‌فرد از Λ در $Y := \{y \in X : d(\Lambda^k x, y) < \infty\}$ است؛
- به‌ازای هر $y \in Y$، $d(y, y^*) \leq \frac{1}{1-L} d(y, \Lambda y)$.

۵.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی مرتبط با معادلات تابعی

معادله تابعی جمعی

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad (۱.۵.۳)$$

یکی از مشهورترین معادلات تابعی است و اولین بار توسط لژاندار[۵] [۷۹] و سپس گاوس [۴۱] مورد بحث قرار گرفت. اما، نخستین مطالعه‌ی منظم روی معادله تابعی جمعی توسط کوشی [۱۹] در کتابش تحت عنوان «درس آنالیز[۶]» انجام شد و از این‌رو این معادله تابعی به معادله تابعی کوشی نیز معروف است. به نگاشتی که در معادله (۱.۵.۳) صدق می‌کند نگاشت جمعی گویند. ویژگی‌های معادله تابعی کوشی و نگاشت‌های جمعی به‌صورت گسترده برای توسیع دیگر معادلات تابعی به‌کار می‌روند و هم‌چنین ابزار قدرتمندی برای تقریباً هر زمینه‌ای از علوم طبیعی و اجتماعی هستند.

نخست، نتیجه‌ی به‌دست آمده توسط کوشی را در مورد حل‌های پیوسته‌ی معادله (۱.۵.۳) بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۵.۱ فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع جمعی و پیوسته باشد. در این‌صورت f خطی است؛ یعنی، $f(x) = cx$ که c یک ثابت حقیقی است.

داربو [۲۵] نشان داد که فرض پیوستگی در قضیه ۱.۵.۱ را می‌توان با پیوستگی در یک نقطه جای‌گزین کرد. برای سال‌ها، وجود توابع جمعی و ناپیوسته، یک سوال حل نشده بود تا این‌که در

---

[۵] Legendre

[۶] Cours d'Analyse، کتابی که سال ۱۸۲۱ چاپ شد و نخستین اثر مکتوب دقیق در حساب دیفرانسیل و انتگرال است.