دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

انتگرال‌های آبلی و کاربردهای آن‌ها در مسأله شانزدهم هیلبرت

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش دستگاه‌های دینامیکی

علی عطابیگی علمی

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۱۳۸۶

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

انتگرال‌های آبلی و کاربردهای آن‌ها در مسأله شانزدهم هیلبرت

سخنران: علی عطابیگی علمی

زمان: پنجشنبه ۱۳۸۶/۱۲/۲۳ ساعت ۱۴:۳۰

مکان: سالن کنفرانس دانشکده ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۲– دکتر فرید بهرامی

۳– دکتر زهرا افشارنژاد (گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد)

۴– دکتر رسول نصر اصفهانی

چکیده:

اهداف اصلی این ارائه بدین شرح است: معرفی مسأله شانزدهم هیلبرت و فرم ضعیف آن، چگونگی ارتباط مسأله ضعیف‌شده و مسأله یافتن تعداد صفرهای انتگرال‌های آبلی، ارائه برخی روش‌های استفاده شده در جهت حل مسأله ضعیف‌شده و در نهایت یافتن کران بالا برای تعداد سیکل‌های حدی برخی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل با بررسی تعداد صفرهای انتگرال‌های آبلی متناظرشان.

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش دستگاه‌های دینامیکی آقای علی عطابیگی علمی

تحت عنوان

انتگرال‌های آبلی و کاربردهای آن‌ها در مسأله شانزدهم هیلبرت

در تاریخ ۱۳۸۶/۱۲/۲۳ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر فرید بهرامی
۳ــ استاد داور ۱	دکتر زهرا افشارنژاد (گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد)
۴ــ استاد داور ۲	دکتر رسول نصر اصفهانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　　　دکتر رسول نصر اصفهانی

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده:

اهداف اصلی تدوین پایان‌نامه جاری بدین شرح است: معرفی مسأله شانزدهم هیلبرت و فرم ضعیف آن، چگونگی ارتباط مسأله ضعیف‌شده و مسأله یافتن تعداد صفرهای انتگرال‌های آبلی، ارایه برخی روش‌های استفاده شده در جهت حل مسأله ضعیف‌شده و در نهایت یافتن کران بالا برای تعداد سیکل‌های حدی برخی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل با بررسی تعداد صفرهای انتگرال‌های آبلی متناظرشان.

فصل ۱

مقدمه

قسمت دوم مسأله شانزدهم هیلبرت (۱۹۰۰)، ماکزیمم تعداد $H(n)$ و موقعیت سیکل‌های حدی را برای همه دستگاه‌های چندجمله‌ای مسطح درجه n می‌خواهد. این مسأله هم‌اکنون حتی برای $n = 2$، یک مسأله باز است. در زمینه حل این مسأله نتایج زیر بدست آمده است: اولین گام‌ها در جهت حل مسأله شانزدهم هیلبرت توسط پوانکاره[۱] برداشته شد، وی ثابت کرد که سیکل‌های حدی یک میدان برداری تحلیلی نمی‌توانند در اطراف یک سیکل حدی دیگر انباشته شوند. ایده اصلی اثبات این بود که با در نظر گرفتن یک برش متقاطع σ بر میدان برداری به بررسی اولین نگاشت بازگشتی $d : \sigma \to \sigma$ پرداخت[۳]. در سال ۱۹۲۳ دولاک[۲] به‌طور فردی متناهی بودن سیکل‌های حدی را ادعا کرد، یعنی ادعا کرد که برای یک دستگاه چندجمله‌ای مسطح داده شده، تعداد سیکل‌های حدی متناهی است [۳]. در اوایل ۱۹۸۰ شکافی در اثبات دولاک پیدا شد که در اوایل ۱۹۹۰ توسط ایلیاشنکو[۳] و ایکال[۴] طی دو مقاله طولانی پر شد و به این ترتیب ثابت شد که میدان‌های برداری مسطح، تعداد متناهی سیکل حدی دارند. طبیعتاً، گام بعدی اثبات به‌طور یکنواخت متناهی بودن، یعنی $H(n) < \infty$ است. به خاطر پیشرفت کند در حل مسأله، ریاضی‌دانان صورت‌های ساده‌تر مختلفی از این مسأله را ارایه کردند. یک فرم ضعیف از این مسأله توسط آرنولد[۵] (۱۹۷۷) در [۱، ۲] ارایه شد که در آن در مورد ماکزیمم تعداد $Z(m, n)$ از صفرهای انتگرال

[۱] Poincaré

[۲] Dulac

[۳] Ilyashenko

[۴] Ecale

[۵] Arnold

آبلی تمام چندجمله‌ای‌های ۱−فرم با درجه n روی بیضی‌های جبری از درجه m سؤال شده است. این مسأله به مسأله شانزدهم ضعیف شده(جنبی) هیلبرت مشهور است. اگرچه قسمت به‌طور یکنواخت متناهی بودن این مسأله ثابت شده ولی در حالت کلی مطالعه این مسأله نیز بسیار سخت است. هم‌چنین در زمینه وضعیت و شکل سیکل‌های حدی یک نتیجه کلی توسط لالیبره[۶] و رودریگز[۷] به‌دست آمد [۳].
هدف اصلی این رساله، معرفی مسأله شانزدهم هیلبرت و فرم ضعیف آن و بررسی برخی کارهای انجام شده در جهت حل این مسأله است. در فصل ۱ به بیان تعاریف، مفاهیم و قضایای مورد نیاز پرداخته‌ایم، در فصل ۲ فرم ضعیف مسأله و ارتباط آن با مسأله صفرهای انتگرال آبلی ارایه شده است. در فصل ۳ به معرفی برخی روش‌های استفاده شده در جهت یافتن تعداد صفرهای ایزوله انتگرال‌های آبلی پرداخته‌ایم و در نهایت فصل‌های ۴، ۵ و ٦ به بررسی تعداد سیکل‌های حدی دستگاه‌های چندجمله‌ای خاص اختصاص داده شده است.

۱−۱ مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱ هر نگاشت $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$، که به ازای هر نقطه $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ یک بردار $F(X)\in\mathbb{R}^2$ متناظر می‌کند یک میدان برداری نامیده می‌شود. در حالت خاص، یک میدان برداری چندجمله‌ای به صورت $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ تعریف می‌شود، که در آن P و Q چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x و y هستند.

تعریف ۲.۱ هر دستگاه معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ای مسطح به شکل

$$\dot{x}=P(x,y),\quad \dot{y}=Q(x,y), \tag{۱}$$

که در آن «.» نمایش‌گر مشتق‌گیری نسبت به متغیر مستقل t است و P و Q چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x و y هستند، یک دستگاه (سیستم) دینامیکی چندجمله‌ای مسطح نامیده می‌شود.

در متون مختلف مدل‌های متفاوت و معادل با این دستگاه معادلات دیفرانسیل چندجمله‌ای ارایه شده است: یک مدل ارایه دستگاه به‌صورت یک میدان برداری $\chi=P\frac{\partial}{\partial x}+Q\frac{\partial}{\partial y}$ است و دیگری نمایش آن به صورت یک فرم دیفرانسیلی $\omega=Qdx-Pdy$ می‌باشد.

[۶] Llibre
[۷] Rodriguez

تعریف ۳.۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\dot{X} = f(\lambda, t, X) \qquad (۲)$$

را در نظر بگیرید که در آن $f \in C^r(\Lambda \times U, \mathbb{R}^m)$ (r بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر)، $r \geq ۱$، و $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز است و λ نیز یک پارامتر در زیر مجموعه باز Λ از $\mathbb{R}^m$ است. هرگاه در دستگاه (۲) تابع f به‌طور صریح به t بستگی نداشته باشد دستگاه (۲) یک دستگاه دینامیکی خودگردان[۸] نامیده می‌شود. در غیر این‌صورت، یک دستگاه غیرخودگردان است.

تعریف ۴.۱ جریان[۹] دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱) در $\mathbb{R}^۲$ به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^۲ \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^۲ \\ (t, X_۰) \quad &\longmapsto \phi^t(X_۰) \end{aligned}$$

که دارای خواص زیر است

(i) $\phi^۰(X_۰) = X_۰$،

(ii) $\phi^t(\phi^s(X_۰)) = \phi^{t+s}(X_۰)$،

(iii) $(\phi^t(X_۰))^{-۱} = \phi^{-t}(X_۰)$،

برای همه $X_۰ = (x_۰, y_۰) \in \mathbb{R}^۲$ و $t, s \in \mathbb{R}$.

تعریف ۵.۱ هر خانواده تک−پارامتری $\{\phi^t\}$ که در خواص $(i) - (iii)$ از تعریف قبل صدق کند یک دستگاه دینامیکی نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱ یک مسیر[۱۰] دستگاه دینامیکی (۱) گذرنده از نقطه $(x_۰, y_۰) \in \mathbb{R}^۲$ به صورت $\{\phi^t(x_۰, y_۰), t \in I_{(x_۰, y_۰)}\} = (x(t), y(t))$ تعریف می‌شود. که در آن $I_{(x_۰, y_۰)}$ بازه ماکزیمال وجود جواب است.

تعریف ۷.۱ یک نقطه تعادل[۱۱] (یا نقطه بحرانی)[۱۲] برای دستگاه (۱) یک نقطه $(x_۰, y_۰)$ است به‌طوری‌که $P(x_۰, y_۰) = Q(x_۰, y_۰) = ۰$.

[۸] Autonomous
[۹] Flow
[۱۰] Trajectory
[۱۱] Equilibrium
[۱۲] Critical

تبصره ۸.۱ باتوجه به این تعریف، یک نقطه بحرانی $(x_\circ, y_\circ)$ از دستگاه (۱) یک جواب خاص از آن است که برای هر $t \in \mathbb{R}$، $\phi^t(x_\circ, y_\circ) = (x_\circ, y_\circ)$.

تعریف ۹.۱ نقطه تعادل p از دستگاه دینامیکی (۱) پایدار[۱۳] است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > \circ$ داده شده یک $\delta > \circ$ موجود باشد که اگر $\|q - p\| < \delta$، آن‌گاه به ازای هر $t \geq \circ$، $\|\phi^t(q) - p\| < \varepsilon$. p ناپایدار است هرگاه پایدار نباشد. p مجانبی پایدار است هرگاه پایدار باشد و یک $\delta > \circ$ موجود باشد به‌طوری‌که اگر $\|q - p\| < \delta$ آن‌گاه $\lim_{t\to\infty} \phi^t(q) = p$ (دراینجا منظور از $\|.\|$، نرم اقلیدسی است).

تعریف ۱۰.۱ مجموعه α—حدی (به طور متناظر مجموعه ω—حدی) نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ از طریق جریان ϕ^t به صورت $\alpha_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ | \phi^{t_n}(x_\circ, y_\circ) \to (x,y), t_n \to -\infty\}$ (به طور متناظر $\omega_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ | \phi^{t_n}(x_\circ, y_\circ) \to (x,y), t_n \to \infty\}$) تعریف می‌شود.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید $p = (x_\circ, y_\circ)$ یک نقطه تعادل دستگاه (۱) باشد. هم‌چنین فرض کنید λ و μ مقادیر ویژه $D\chi(p)$، ماتریس ژاکوبی میدان برداری متناظر، باشند.

(i) اگر $\lambda = \mu = \circ$، آن‌گاه p تبهگون[۱۴] نامیده می‌شود. به‌علاوه اگر $D\chi(p) \neq \circ$، گوییم p پوچ‌توان است.

(ii) اگر $\lambda\mu = \circ$ اما $\lambda^۲ + \mu^۲ \neq \circ$، p تبهگون اولیه نامیده می‌شود.

(iii) در بقیه حالات، p نقطه تعادل ناتبهگون نامیده می‌شود.

(I) اگر $D\chi(p)$ قطری‌شدنی باشد، در این‌صورت

- اگر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $\lambda\mu < \circ$، p یک زین[۱۵] نامیده می‌شود
- اگر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $\lambda\mu > \circ$، p یک گره[۱۶] نامیده می‌شود که پایدار است هرگاه $\lambda < \circ, \mu < \circ$ و ناپایدار است هرگاه $\lambda > \circ, \mu > \circ$.

(II) اگر $D\chi(p)$ قطری شدنی نباشد، p نقطه تعادل لگاریتمی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱ گوییم نقطه تعادل p از دستگاه دینامیکی (۱) هذلولوی[۱۷] است اگر مقادیر ویژه ماتریس $D\chi(p)$ دارای قسمت حقیقی ناصفر باشند.

تعریف ۱۳.۱ نقطه تعادل O از دستگاه دینامیکی (۱) یک مرکز است اگر دارای یک همسایگی U باشد به‌طوری‌که برای هر $q \in U \setminus \{O\}$، $P^۲(q) + Q^۲(q) \neq \circ$، و جواب‌های گذرنده از q بسته و احاطه کننده O باشند.

[۱۳] Stable
[۱۴] Degenerate
[۱۵] Saddle
[۱۶] Node
[۱۷] Hyperbolic

تعریف ۱۴.۱ منیفلد پایدار[۱۸] موضعی نقطه تعادل p از دستگاه دینامیکی (۱) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W^s_{loc}(p) = \{x \in U; \phi^t(x) \in U, t \geq 0, \lim_{t\to\infty} \phi^t(x) = p\},$$

که در آن U یک همسایگی باز از p است.
به طور مشابه منیفلد ناپایدار[۱۹] موضعی p به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$W^u_{loc}(p) = \{x \in U; \phi^t(x) \in U, t \leq 0, \lim_{t\to-\infty} \phi^t(x) = p\},$$

که در آن‌ها، ϕ جریان تعریف شده توسط (۱) است.

تعریف ۱۵.۱ منیفلد پایدار و ناپایدار سراسری نقطه تعادل p از دستگاه (۱) به‌ترتیب، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$W^s(p) = \bigcup_{t\leq 0} \phi^t(W^s_{loc}(p)),$$
$$W^u(p) = \bigcup_{t\geq 0} \phi^t(W^u_{loc}(p)).$$

تعریف ۱۶.۱ گوییم یک مجموعه Ω برای دستگاه دینامیکی (۱) پایاست اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$، $\phi^t(\Omega) \subseteq \Omega$. که در آن ϕ جریان تعریف شده توسط (۱) است.

تعریف ۱۷.۱ منحنی $f(x,y) = 0$ را جبری گوییم هرگاه $f(x,y)$ یک چندجمله‌ای باشد.

تعریف ۱۸.۱ گوییم تابع $H(x,y)$ یک انتگرال اول دستگاه دینامیکی (۱) در یک زیرمجموعه باز U از $\mathbb{R}^2$ است هرگاه $H(x,y)$ یک تابع غیرثابت در U باشد که روی هر منحنی جواب $(x(t),y(t)) \in U$ از (۱) ثابت است.

تعریف ۱۹.۱ تابع $R(x,y)$ یک فاکتور انتگرال دستگاه دینامیکی (۱) در یک زیرمجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^2$ است اگر $R \in C^2(U)$ و در U متحد با صفر نباشد و $\nabla.(RP,RQ) = 0$، که در آن $\nabla.(RP,RQ)$ نمایش‌گر دیورژانس (RP,RQ) است.

[۱۸] Stable Manifold
[۱۹] Unstable Manifold

تعریف ۲۰.۱ یک سیکل حدی[۲۰] از دستگاه دینامیکی (۱) یک مدار تناوبی ایزوله آن است که مجموعه α—حدی یا ω—حدی مدارهای غیر از خود است.

تعریف ۲۱.۱ یک مدار هتروکلینیک[۲۱] مداری است که نقاط α—حدی و ω—حدی آن دو نقطه زینی متمایز باشند.

تعریف ۲۲.۱ یک مدار هموکلینیک[۲۲] مداری است که نقاط α—حدی و ω—حدی آن یک نقطه زینی یکسان باشد.

توجه کنید که مشابه نقاط تعادل، منظور از تعیین هذلولوی بودن یک سیکل حدی بررسی رفتار مدارهای اطراف آن است. در زیر به بیان قضیه لیوویل[۲۳] می‌پردازیم، این قضیه محکی برای تعیین پایداری مدارهای تناوبی دستگاه دینامیکی (۱) است.

قضیه ۲۳.۱ [۱۴].فرض کنید $\gamma(t)$ یک مدار T—تناوبی از دستگاه دینامیکی (۱) باشد. در این‌صورت

(i) $\gamma(t)$ یک سیکل حدی مجانبی پایدار است هرگاه $\int_{\circ}^{T} \nabla.\chi(\gamma(t))dt < \circ$.

(ii) $\gamma(t)$ یک سیکل حدی ناپایدار است هرگاه $\int_{\circ}^{T} \nabla.\chi(\gamma(t))dt > \circ$.

(iii) اگر $\int_{\circ}^{T} \nabla.\chi(\gamma(t))dt = \circ$، آن‌گاه $\gamma(t)$ ممکن است پایدار، ناپایدار، نیمه پایدار و یا متعلق به طیفی از سیکل‌های حدی باشد (توجه کنید که عملگر ∇، عملگر گرادیانی است).

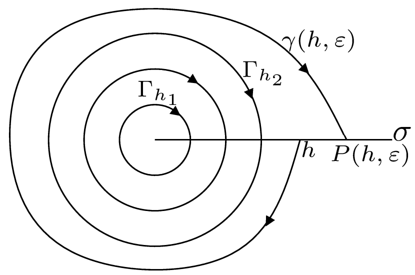
تعریف ۲۴.۱ انتگرال تک—فرمی‌های چندجمله‌ای $\omega = p(x,y)dx + q(x,y)dy$ روی خانواده منحنی‌های بسته‌ی Γ_h تعریف شده توسط منحنی‌های جبری حقیقی $H(x,y) = h$ را انتگرال آبلی نامیم و آن‌را به‌صورت $I(h) = \int_{\Gamma_h} p(x,y)dx + q(x,y)dy$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۱ فرض کنید U یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^۲$ و $H \in C^۲(U)$ باشد که $H = H(x,y)$، $x,y \in \mathbb{R}$. دستگاه معادلات دیفرانسیل به شکل

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x, \tag{۳}$$

یک دستگاه همیلتونی مسطح روی U نامیده می‌شود. مدارهای دستگاه (۳) روی سطوح تراز $H = h$ قرار دارند و تابع $H(x,y)$ را تابع همیلتونی این دستگاه گویند. هرگاه $H(x,y) = y^۲ + U(x)$ و $U(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه m باشد، منحنی جبری $H(x,y) = h$ را در حالت $m = ۱,۲$، گویا برای $m = ۳,۴$،

[۲۰] Limit Cycle
[۲۱] Heteroclinic
[۲۲] Homoclinic
[۲۳] Liouville



شکل ۱—۱: $d(h,\varepsilon) = P(h,\varepsilon) - h$

بیضوی و برای $m \geq ۵$، فوق بیضوی گویند. هم‌چنین دستگاه‌های انتگرال‌پذیر مسطح مرتبه دوم با حداقل یک مرکز به پنج دسته تقسیم می شوند [۸]. دستگاه را برگشت پذیر گویند هرگاه فرم کلی آن به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - (a+b+۲)x^{۲} + (a+b-۲)y^{۲}, \\ \dot{y} &= x - ۲(a-b)xy \end{aligned}$$

که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۲٦.۱ دردستگاه $\dot{x} = f(x,\alpha)$ که $x \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}^m$، هرگاه با تغییر کوچک پارامتر α ساختار کیفی جریان تغییر کند گوییم معادله دیفرانسیل دارای ساختار ناپایدار است و مقداری از پارامتر که در آن جریان دارای ساختار مداری ناپایدار است را مقدار انشعاب گوییم و می‌گوییم که معادله در نقطه‌ی انشعاب قرار دارد.

دستگاه زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = H_y(x,y) + \varepsilon f(x,y), \quad \dot{y} = -H_x(x,y) + \varepsilon g(x,y), \qquad (۴)$$

که درآن f و g چندجمله‌ایهایی نسبت به دومتغیر x وy با $max(deg(f), deg(g)) = n \geq ۲$ هستند و ε یک پارامتر با $۰ < \varepsilon \ll ۱$ است. فرض کنید σ یک برش متقاطع با هرمنحنی تراز Γ_h باشد که توسط h پارامتری شده باشد. هرگاه $\gamma(h,\varepsilon)$ مدار دستگاه مختل شده (۴) با نقطه شروع h در σ باشد، برای ε به اندازه کافی کوچک این مدار مجدداً برش σ را در نقطه‌ای منحصر به فرد قطع خواهد کرد که آن‌را با $P(h,\varepsilon)$ نشان می دهیم (شکل ۱—۱ را مشاهده کنید).

تعریف ۲۷.۱ با استفاده از نمادهای فوق $d(h,\varepsilon)=P(h,\varepsilon)-h$ تابع تغییرمکان یا تابع جابه‌جایی نامیده می‌شود.

تعریف ۲۸.۱ انشعابی که در آن در اثر تغییر پارامتر سیکل حدی تولید و یا از بین می‌رود را انشعاب پوانکاره—آندرونف—هاپف [۲۴] گوییم.

۱—۱—۱ اصل آوند

در این بخش به بیان اصل آوند[۲۵] و رابطه آن با مفهوم عدد دوران می‌پردازیم.

قضیه ۲۹.۱ فرض کنید C یک مسیر بسته‌ی ساده باشد و f نیز یک تابع تحلیلی و ناصفر روی C باشد که بجز در یک مجموعه از نقاط ایزوله در بقیه نقاط درون C تحلیلی باشد. هم‌چنین فرض کنید

(i) $z_۱، z_۲، \cdots، z_k$ صفرهای f در درون C باشند که به‌ترتیب دارای چندگانگی‌های $n_۱، n_۲، \cdots، n_k$ باشند و قرار دهید

$$Z_C=n_۱+n_۲+\cdots+n_k.$$

(ii) $w_۱، w_۲، \cdots، w_j$ قطب‌های f در درون C و به‌ترتیب از مرتبه‌های $m_۱، m_۲، \cdots، m_j$ باشند و قرار دهید

$$P_C=m_۱+m_۲+\cdots+m_j.$$

در این‌صورت

$$Z_C-P_C=\frac{۱}{۲\pi}\Delta_C \arg f(z)=\frac{۱}{۲\pi i}\oint_C \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta.$$

که در آن $\Delta_C \arg f(z)$ نشان‌دهنده تغییرات $\arg f(z)$ در طول C است.

بنابراین

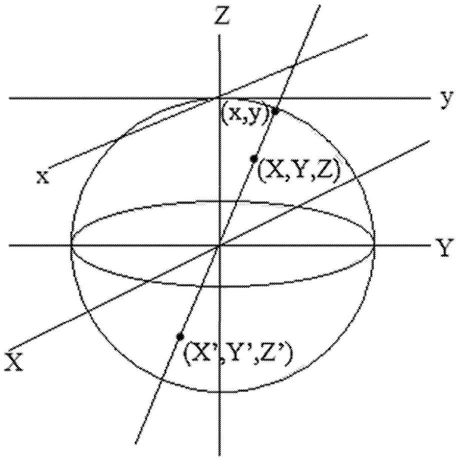
اگر C و f مانند بالا مفروض باشند آن‌گاه تعداد صفرهای f در درون C برابر است با تغییرات آوند f در طول C (تقسیم بر ۲π).

تعریف ۳۰.۱ فرض کنید C یک مسیر بسته‌ی ساده باشد و تابع f روی C تحلیلی و ناصفر باشد. دراین‌صورت $w=f(z)=f(z(t))$ یک مسیر بسته است (نه لزوماً ساده). این مسیر را $f(C)$ بنامید. هنگامی‌که w روی $f(C)$ حرکت می‌کند تعداد دفعات تغییر آوند w ضرب‌در ۲π، عدد دوران یا عدد پیچش[۲۶] $f(C)$ نامیده می‌شود. طبق اصل آوند عدد دوران $f(C)$ برابر است با Z_C-P_C.

[۲۴] Poincaré-Andronov-Hopf

[۲۵] Argument Principle

[۲۶] Winding Number



شکل ۱—۲: تصویر سازی مرکزی صفحه xy بر روی کره $S^۲$

۱—۱—۲ کره پوانکاره و رفتار در بی‌نهایت

در این بخش به بررسی رفتار یک دستگاه دینامیکی مسطح در بی‌نهایت می‌پردازیم[۱۴].

ایده اصلی، تصویر کردن دستگاه دینامیکی مسطح برروی سطح یک کره است. یعنی، نگاشتن صفحه xy برروی سطح کره یکه

$$S^۲ = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^۳ \ |X^۲ + Y^۲ + Z^۲ = ۱\}.$$

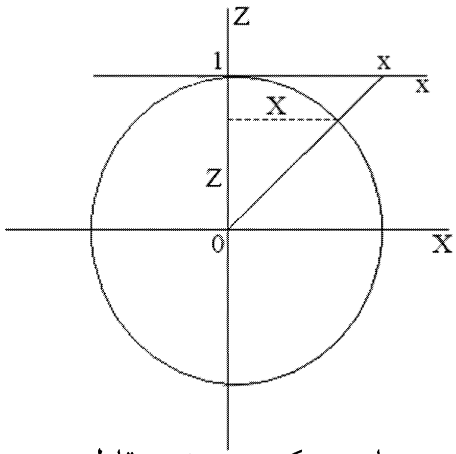
با قرار دادن قطب شمال کره یکه در مبدأ صفحه xy و متصل کردن یک خط از مرکز $S^۲$، به هر نقطه در صفحه(شکل ۱—۲) این نگاشت مبدأ xy را به قطب شمال و جنوب و نقاط در بی‌نهایت را به خط استوا کره می‌نگارد. این تصویرسازی مرکزی صفحه xy روی $S^۲$، کره پوانکاره[۲۷] نامیده می‌شود. در ادامه، نقاط در صفحه xy را با (x, y)، و نقاط روی کره $S^۲$ را با (X, Y, Z) نمایش داده می‌شوند. خط متقاطع حاصل از تصویرسازی مرکزی از صفحه xy به روی نیم‌کره بالایی $S^۲$ رابطه زیر میان نقاط صفحه xy و نقاط روی $S^۲$ را می‌دهد(شکل ۱—۳ را مشاهده کنید).

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z} \qquad (۵)$$

با استفاده از (۵)، روابط زیر برای مختصات نقاط تصویر به‌دست می‌آید:

$$X = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲ + y^۲}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{۱ + x^۲ + y^۲}}, \quad Z = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^۲ + y^۲}}. \qquad (٦)$$

[۲۷] Poincaré



شکل ۱—۳: تصویرسازی مرکزی و برش متقاطع روی نیم‌کره بالایی $S^۲$

باتوجه به (٦) مبدأ $(۰,۰) \in \mathbb{R}^۲$ متناظر می‌شود با قطب شمال $(۰,۰,۱) \in S^۲$، و نقاط در بی‌نهایت در $\mathbb{R}^۲$ متناظر می‌شوند با نقاط روی خط استوا از $S^۲$. و هم‌چنین هر دو نقطه متقارن روی خط استوا کره، متناظر با یک نقطه یکسان در بی‌نهایت (در $\mathbb{R}^۲$) هستند. این تناظر ما را قادر می‌سازد که جریان دستگاه دینامیکی مسطح را روی کره پوانکاره مجسم کنیم. جریان در همسایگی نقاط متقارن روی خط استوا به‌طور توپولوژیکی معادل است، فقط ممکن است که جهت آن عکس شود.

حال دستگاه دینامیکی تعریف‌شده توسط معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{x} = Q(x,y), \tag{۷}$$

که در آن $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ چندجمله‌ای‌هایی بر حسب x,y با ماکزیمم درجه m هستند. $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} P(x,y) &= P_1(x,y) + \cdots + P_m(x,y), \\ Q(x,y) &= Q_1(x,y) + \cdots + Q_m(x,y) \end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن P_j و Q_j چندجمله‌ای‌های همگن از درجه j بر حسب x,y هستند. قضیه زیر بیان می‌کند که چگونه می‌توان نقاط تعادل (۷) را که در بی‌نهایت قرار دارند روی خط استوا کره $S^۲$ یافت.

قضیه ۳۱.۱ [۱۴].نقاط تعادل دستگاه (۷) در بی‌نهایت در نقاط $(X,Y,۰)$ واقع در خط استوا کره پوانکاره رخ می‌دهند که در آن $X^۲ + Y^۲ = ۱$ و

$$G_{m+1}(X,Y) \equiv XQ_m(X,Y) - YP_m(X,Y) = ۰. \tag{۹}$$

اگر $G_{m+1}(X,Y)$ متحد با صفر نباشد، آن‌گاه در نقاطی از خط استوا که $G_{m+1}(X,Y) > 0$ جریان پادساعت‌گرد و در نقاطی که $G_{m+1}(X,Y) < 0$ جریان ساعت‌گرد است.

برای بررسی رفتار دستگاه در نزدیکی نقاط تعادل روی خط استوای S^2، ساده‌ترین راه تصویر کردن جریان روی صفحه مماس بر کره، در همسایگی آن نقاط است. و بنابراین قضیه زیر را می‌توان به‌کار گرفت.

قضیه ۳۲.۱ [۱۴].جریان تعریف‌شده توسط (۷) در همسایگی هر نقطه تعادل آن روی خط استوای کره پوانکاره S^2، بجز نقاط $(0, \pm 1, 0)$، به‌طور توپولوژیکی با جریان تعریف شده توسط دستگاه زیر معادل است

$$\begin{aligned} \pm\dot{y} &= yz^m P(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}) - z^m Q(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}), \\ \pm\dot{z} &= z^{m+1} P(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}), \end{aligned} \qquad (10)$$

که در آن علامت + یا − توسط جهت جریان روی خط استوای کره S^2، مشخص شده توسط قضیه ۳۱.۱ تعیین می‌شود. به‌طور مشابه، جریان تعریف‌شده توسط (۷) در همسایگی هر نقطه تعادل آن روی خط استوای کره پوانکاره S^2، بجز نقاط $(\pm 1, 0, 0)$، به‌طور توپولوژیکی با جریان تعریف شده توسط دستگاه زیر معادل است

$$\begin{aligned} \pm\dot{x} &= xz^m Q(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}) - z^m P(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}), \\ \pm\dot{z} &= z^{m+1} Q(\frac{x}{z}, \frac{1}{z}), \end{aligned} \qquad (11)$$

که در آن علامت + یا − توسط جهت جریان روی خط استوای کره S^2، مشخص شده توسط قضیه ۳۱.۱، تعیین می‌شود.

فصل ۲

مسأله ضعیف شده شانزدهم هیلبرت، انتگرال‌های آبلی و سیکل‌های حدی

۲−۱ مسأله شانزدهم هیلبرت

در این بخش به معرفی مسأله شانزدهم هیلبرت می‌پردازیم.

دستگاه دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = f(x,y), \quad \dot{y} = g(x,y), \quad x,y \in \mathbb{R}$$

که در آن f و g چندجمله‌ای‌هایی بر حسب دو متغیرند. هیلبرت (۱۹۰۰) در مسأله شانزدهم خود خواسته است که تعداد و موقعیت مدارهای تناوبی ایزوله(سیکل‌های حدی) این میدان برداری را بر حسب درجه چندجمله‌ای‌های f و g بیان نماید.

روش کلاسیک معمول برای تولید سیکل‌های حدی، مختل کردن(ایجاد اختلال) یک دستگاه با یک مرکز است، به‌طوری‌که سیکل‌های حدی در دستگاه مختل‌شده از برخی از مدارهای تناوبی حلقه تناوبی دستگاه مختل نشده منشعب شوند[٦]. در بخش بعدی راجع به این مسأله بیشتر بحث خواهیم کرد.

۲–۲ مسأله شانزدهم ضعیف شده هیلبرت

در این بخش فرم ضعیف مسأله بیان می شود. فرض کنید $H = H(x,y)$ یک چندجمله‌ای بر حسب x و y از درجه $m \geq ۲$ باشد و منحنی‌های مسطح $\gamma \subset \{(x,y) : H(x,y) = h\}$ تشکیل یک خانواده پیوسته ازمنحنی‌های بسته $\{\gamma_h\}$ را برای $h_۱ < h < h_۲$ بدهند. چندجمله‌ای ۱− فرم $\omega = f(x,y)dy - g(x,y)dx$ را در نظر بگیرید، که در آن $max(deg(f), deg(g)) = n \geq ۲$. آرنولد در [۲ ،۱] مسأله زیر را که به مسأله شانزدهم ضعیف‌شده هیلبرت معروف است ارایه داد

مسأله۱: برای ثابتهای m و n حداکثر تعداد $Z(m,n)$ از صفرهای انتگرال آبلی

$$I(h) = \oint_{\gamma_h} \omega$$

را بیابید.

یادآوری می‌شود که انتگرال آبلی، انتگرال یک ۱− فرم گویا در طول یک بیضی جبری است. توجه شود که در مسأله بالا باید تمام خانواده‌های بیضی های ممکن $\{\gamma_h\}$، و f و g دلخواه در نظر گرفته شود. بنابراین مهم نیست که در ساختار ω قبل از g ، + یا − قرار گیرد.

وارشنکو[۱] و خووانسکی[۲] ثابت کردند که برای m و n داده شده عدد $Z(m,n)$ نسبت به انتخاب چندجمله‌ای H، خانواده بیضی‌های $\{\gamma_h\}$ و ۱—فرم ω به‌طور یکنواخت کراندار است.

قضیه ۱.۲ [۳]. $Z(m,n) < \infty$.

در نگاه اول ممکن است به نظر برسد که این مسأله ارتباطی با مسأله شانزدهم هیلبرت ندارد. در ادامه دیده می‌شود که چگونه این دو به هم مرتبط‌اند.

۳–۲ قضیه پوانکاره – پونتریاگین

فرض کنید چندجمله‌ای $H(x,y)$ همانند بالا و میدان برداری همیلتونی X_H متناظر با آن به صورت زیر باشد

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}, \tag{۱}$$

میدان برداری مختل شده $X_{H,\varepsilon}$ آن‌را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon g(x,y), \tag{۲}$$

[۱] Varchenko
[۲] Khovanskii