إنه من سليمان وإنه بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه یزد

مجتمع علوم

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض– جبر

احتمال روی MV–جبرها

استاد راهنما: دکتر بیژن دواز

استاد مشاور: دکتر حمزه ترابی

پژوهش و نگارش: داریوش حیدری

دی ۱۳۸٦

تقدیم به:

روح پاک پدر بزرگوارم

و

مادر مهربانم

و

محضر ولی عصر(عج)

تقدیر و تشکر

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون برمی‌آید مفرح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

اینک که با یاری خداوند متعال توانسته‌ام این پایان‌نامه را به سر منزل مقصود برسانم، مراتب سپاس و قدردانی خود را از زحمات موثر، ارزشمند و بی‌دریغ استاد راهنمایم جناب آقای دکتر دواز و استاد مشاورم جناب آقای دکتر ترابی، ابراز می‌دارم. همچنین از اساتید محترم آقایان دکتر عامری و دکتر مدرس مصدق که با وجود مشغله کاری فراوان، زحمت داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند سپاسگزاری می‌کنم.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی‌دریغ و مشفقانه مادر مهربانم و نیز برادران و خواهران عزیزم که همواره مشوق من در امر تحصل بوده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

شایسته است از دوستان گرامی آقایان سعید رسولی، محمد حبیب‌الهی، احمد جمشیدی، محمد نیلی و اصغر عزیزی و نیز از همکلاسی‌های ارجمندم، که به اینجانب لطف داشته‌اند، تشکر کنم. در خاتمه از الطاف و محبت‌های دلسوزانه سرکار خانم عابدینی و سرکار خانم عباسی‌زاده کمال تشکر را دارم.

داریوش حیدری

۱۳۸۶/۱۰/۱۰

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	**صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد**	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی آقای داریوش حیدری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته/گرایش: ریاضی محض

تحت عنوان: **احتمال روی MV - جبرها**

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۸۶/۱۰/۱۰ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۹/۲۵ به حروف نوزده و بیست و پنج صدم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	بیژن دواز	
استاد/ استادان مشاور:	حمزه ترابی	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	سیدمحمدصادق مدرس مصدق	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	رضا عامری	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: محمدکاظم توسلی

امضاء:

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا MV—جبرها را مطالعه می‌کنیم. MV—جبرها یک تعمیم چندارزشی جبرهای بول هستند. قضایای مختلف درباره‌ی محاسبه در MV—جبرها و ساختار این جبرها را ارائه می‌کنیم و خواهیم دید که هر MV—جبر یک مشبکه توزیع‌پذیر کراندار است. MV—زنجیرها، PMV—جبرها و ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال از دیگر مباحث هستند.

ریکان و موندیچی در [۱۵] یک تعریف برای احتمال شرطی روی یک MV—جبر را به عنوان یک مساله باز بیان کردند. در این پایان‌نامه، برخی مفاهیم احتمال شرطی روی یک MV—جبر را بررسی و خواص پایه‌ای آن‌ها را اثبات می‌کنیم؛ همچنین نشان می‌دهیم که احتمال شرطی در نظریه احتمال کلاسیک حالت خاصی از این تعریف است.

فهرست مندرجات

۱ مفاهیم مقدماتی ۴

۱.۱ مشبکه‌ها ۵

۲.۱ جبرهای بول ۸

۳.۱ ℓ—گروه‌ها ۱۱

۴.۱ مقدماتی از آنالیز حقیقی ۱۲

۲ MV—جبرها ۱۸

۱.۲ ساختار MV—جبرها ۱۹

۲.۲ ساختار مشبکه‌ای MV—جبرها ۲۵

۳ مطالب تکمیلی درباره‌ی MV—جبرها ۴۰

۱.۳ MV—زنجیرها ۴۱

۲.۳ MV—جبرهای با ضرب (PMV—جبرها) ۵۲

۳.۳ ایده‌آل‌های یک MV—جبر ۵۶

۴.۳ ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال ۶۲

۴ احتمال روی MV—جبرها ۶۸

۱.۴ دسته لوکاسویچ ۶۹

۲.۴ احتمال روی یک MV—جبر ۷۳

۳.۴ احتمال شرطی روی یک MV—جبر ۷۶

۴.۴ مشاهده‌پذیر روی یک MV—جبر ۸۶

۵ پیوست ۹۱

A واژه نامه فارسی به انگلیسی ۹۲

B واژه نامه انگلیسی به فارسی ۹۷

C مراجع ۱۰۱

D فهرست راهنما ۱۰۵

مقدمه

چانگ[۱] در سال ۱۹۵۸ مفهوم MV—جبر برای اولین بار به عنوان تعمیمی از جبر بول معرفی کرد [۳] و [۴]. در واژه MV—جبر، MV مخفف عبارت «Many Valued» است. این ساختار برای اثبات جبری تمامیت منطق بینهایت ارزشی لوکاسویچ، که خود از منطق دو ارزشی کلاسیک منتج شده است، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

می‌دانیم که منطق دو ارزشی، خواستگاه مطالعه جبر بول است و همان طور که انتظار می‌رود هر جبر بول یک MV—جبر است؛ اما عکس آن برقرار نیست. اگر چه بسیاری از نتایج درباره جبر بول می‌توانند در مورد MV—جبر نیز بیان شوند ولی در بعضی موارد اثبات آن‌ها پیچیده‌تر و ظریف‌تر است. انگیزه اولیه مطالعه MV—جبرها پیدا کردن راهی برای اثبات تمامیت منطق های $\aleph_0$—ارزشی به وسیله نتایج مربوط به MV—جبرها است. از آنجایی که تمامیت منطق دو ارزشی نتیجه قضیه ایده‌آل‌های اول جبر بول است، ما امیدواریم که نتایج مربوط به MV—جبرها نیز چنین تاثیری داشته باشند.

در سال ۱۹۵۹ چانگ بنابر پیشنهاد دانا اسکات[۲] نشان داد تناظری یک به یک میان MV—جبرها و گروه‌های آبلی مرتب وجود دارد و این ایده وسیله‌ای شد تا در سال ۱۹۸۶

---

[۱] Chang

[۲] Danna Scott

دانیل موندیچی[۳] اثبات کند که رسته MV—جبرها و رسته ℓ—گروه‌های آبلی با واحد قوی با یکدیگر معادلند.

MV—جبرها مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان، جبردان‌ها، منطق‌دانان و متخصصین مجموعه‌های فازی و ساختارهای کوانتمی قرار گرفته است. در سال ۲۰۰۲ ریکان[۴] و موندیچی یک تعمیمی از احتمال کلاسیک روی MV—جبرها را به عنوان یک مساله باز بیان کردند [۱۵].

MV—جبرها می‌توانند به عنوان تعمیم جبری خانواده‌ای خاص از مجموعه‌های فازی دیده شوند که به آن‌ها دسته‌های لوکاسویچ می‌گوییم. مفهوم دسته‌های لوکاسویچ در MV—جبرها، مانند مفهوم مجموعه‌های σ—جبر بولی در جبرهای بول است.

رابطه بین یک جبر بول σ—کامل و مجموعه نمایش آن توسط قضیه لومیس—سیکورسکی[۵] شرح داده شده است [۱٦]. نسخه‌ای از این قضیه، برای MV—جبرهای σ—کامل در [۹] و [۱۴] بیان شده است.

در سال ۲۰۰۴ کروپا[٦]، احتمال شرطی روی دسته‌های لوکاسویچ را به عنوان تعمیمی از احتمال شرطی کلاسیک تعریف کرد [۱۲]، که در این پایان‌نامه به آن می‌پردازیم.

در فصل ۱ به بیان تعاریف و قضایایی که در این پایان‌نامه استفاده می‌شود می‌پردازیم؛ مجموعه‌های مرتب، مشبکه‌ها، جبر بول، ℓ—گروه‌ها و مقدماتی از آنالیز حقیقی و توپولوژی طیفی از جمله این مفاهیم است.

فصل ۲ به تعریف MV—جبر و اثبات روابط موجود در آن اختصاص دارد. در این فصل نشان خواهیم داد که هر MV—جبر به طور طبیعی مشبکه‌ای توزیع‌پذیر و کراندار

---

[۳] Daniel Mundici

[۴] Riecan

[۵] Lomis-Sikorski

[٦] Kroupa

است؛ بنابراین MV—جبرها تعمیمی از جبرهای بول هستند.

در فصل ۳ ابتدا MV—زنجیرها و MV—جبرهای با ضرب (PMV—جبرها) را معرفی می‌کنیم. در ادامه با تعریف مفهوم ایده‌آل در یک MV—جبر، قضیه اول یکریختی را اثبات می‌کنیم. ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال را نیز در بخش آخر این فصل بررسی می‌کنیم و به نقش خاص آن‌ها می‌پردازیم.

در فصل ۴ تعریف مفهوم احتمال و احتمال شرطی روی یک MV—جبر را ارائه می‌کنیم. خواص پایه‌ای را اثبات خواهیم کرد؛ همچنین نشان می‌دهیم که احتمال شرطی در نظریه احتمال کلاسیک حالت خاصی از این تعریف است.

مرجع اصلی این پایان‌نامه [۱۲] است، ضمن این که برای تسلط بیشتر به موضوع از مراجع [۱۱]، [۱۴]، [۱۸] و [۱۹] استفاده کرده‌ایم. برای مفاهیم مربوط به MV—جبرها، از مراجع [۳]، [٦]، [۷]، [۸]، [۱۰] و [۱۱] بهره برده‌ایم.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی که در طول پایان‌نامه مورد نیاز است را ارائه می‌کنیم. مرجع مورد استفاده در بخش‌های ۱، ۲ و ۳ این فصل مرجع [۱] است و در بخش ۴ از مرجع [۱۷] استفاده شده است.

۱.۱ مشبکه‌ها

۱.۱.۱ تعریف. مجموعه مرتب جزیی، مجموعه‌ای مانند P با یک عمل دوتایی $\leq$ (که آن را ترتیب می‌نامیم) است که دارای خواص بازتابی (برای هر $x \in P$، $x \leq x$)، پادتقارنی (برای هر $x, y \in P$، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه $x = y$) و تراگذری (برای هر $x, y, z \in P$، اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه $x \leq z$) باشد. مجموعه مرتب جزیی P با ترتیب $\leq$ را با نماد $(P, \leq)$ نمایش می‌دهیم.

در یک مجموعه مرتب جزیی اگر $x \leq y$، آنگاه گوییم z بین x و y است هرگاه $x \leq z \leq y$. دو عنصر x و y را مقایسه‌پذیر گوییم اگر $x \leq y$ یا $y \leq x$. همچنین اگر هر دو عنصر مجموعه مرتب جزیی مقایسه‌پذیر باشند، آنگاه آن را یک زنجیر (مجموعه مرتب

کلی یا مجموعه مرتب خطی) می‌گوییم.

فرض کنیم $(P, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد و $A \subseteq P$. عنصر x در P را یک کران پایین (بالای) A گوییم اگر به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $x \leq a$ ($a \leq x$).

عنصر x در P را بزرگ‌ترین کران پایین (کوچک‌ترین کران بالای) A گوییم اگر x یک کران پایین (بالای) A باشد و اگر y یک کران پایین (بالای) A باشد آنگاه $y \leq x$ ($x \leq y$). اگر $a, b \in P$ آنگاه بزرگ‌ترین کران پایین $\{a, b\}$ را اینفیمم، عطف یا g.l.b گوییم و آن را با نمادهای $inf\{a, b\}$، $a \wedge b$ یا $g.l.b\{a, b\}$ نشان می‌دهیم. به همین صورت، کوچک‌ترین کران بالای $\{a, b\}$ را سوپریمم، فصل یا l.u.b گوییم و آن را با نمادهای $sup\{a, b\}$، $a \vee b$ یا $l.u.b\{a, b\}$ نشان می‌دهیم. بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالای هر زیرمجموعه P در صورت وجود، منحصر به فرد هستند.

نمادهای ۰ و ۱ را به ترتیب برای بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالای P (در صورت وجود) به کار می‌بریم.

۲.۱.۱ مثال. مجموعه همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ناتهی، با ترتیبِ شمول، یک مجموعه مرتب جزیی است.

۳.۱.۱ مثال. مجموعه اعداد صحیح با ترتیب کوچک‌تری معمولی، یک مجموعه مرتب کلی (زنجیر) است.

۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(P_1, \leq_1)$ و $(P_2, \leq_2)$ دو مجموعه مرتب جزیی باشند. نگاشت $h : P_1 \longrightarrow P_2$ را یک نگاشت حافظ ترتیب گوییم هرگاه $x \leq_1 y$ نتیجه دهد $h(x) \leq_2 h(y)$. همچنین آن را یک یکریختی گوییم اگر یک به یک و پوشا و h حافظ ترتیب باشد.

به عنوان مثال، مجموعه‌های مرتب جزیی $(\mathbb{N}, \leq)$ و $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ را در نظر می‌گیریم.

نگاشت $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$ که به هر زیرمجموعه $\mathbb{N}$ عدد اصلی آن را نظیر می‌کند، یک نگاشت حافظ ترتیب است.

۵.۱.۱ تعریف. یک مشبکه عبارت است از مجموعه‌ای مرتب جزیی مانند $(L, \leq)$ که در آن هر زوج از عناصر $a, b \in L$ دارای بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالا باشد.

بزرگ‌ترین کران پایین زیرمجموعه $\{a, b\} \subseteq L$ را با $a \wedge b$ و کوچک‌ترین کران بالای آن را با $a \vee b$ نشان می‌دهیم.

۶.۱.۱ مثال. مجموعه مرتب جزیی $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ یک مشبکه است که در آن اعمال فصل و عطف به ترتیب اجتماع و اشتراک مجموعه‌هاست.

۷.۱.۱ مثال. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی و $|$، رابطه عاد کردن باشد. در این صورت $(\mathbb{N}, |)$ یک مشبکه است که در آن فصل دو عدد $m, n \in \mathbb{N}$، کوچک‌ترین مضرب مشترک m و n و عطف آن‌ها بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک m و n است.

۸.۱.۱ تعریف. نگاشت h از مشبکه L_1 به مشبکه L_2 را یک همریختی گوییم هرگاه اعمال مشبکه‌ای را حفظ کند؛ یعنی برای هر $x, y \in L_1$ داشته باشیم:

$$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y), \quad h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y).$$

هر همریختی یک نگاشت حافظ ترتیب است. همریختی h را یکریختی گوییم هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

۹.۱.۱ تعریف. مشبکه L را α—کامل گوییم (جایی که α یک عدد اصلی است) هرگاه هر زیرمجموعه L که حداکثر α عضو دارد دارای g.l.b و l.u.b باشد. L را کامل گوییم، هرگاه برای هر عدد اصلی α مشبکه L، α—کامل باشد. بنابراین اگر L کامل باشد، آنگاه دارای ۰ و ۱ است. هر مشبکه $\aleph_0$—کامل را σ—کامل نیز می‌نامیم.

اعمال عطف و فصل روی مشبکه $(L, \leq)$ دارای خواص زیر هستند:

$$
\begin{array}{lll}
۱) & a \wedge a = a, & a \vee a = a, \\
۲) & a \wedge b = b \wedge a, & a \vee b = b \vee a, \\
۳) & (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), & (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \\
۴) & a \wedge (a \vee b) = a, & a \vee (a \wedge b) = a.
\end{array}
$$

همه این روابط از تعریف اعمال $\vee$ و $\wedge$ نتیجه می‌شوند.

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $(L, \vee, \wedge)$ یک مشبکه باشد در این صورت عنصر $x \in L$ را مکمل‌دار گوییم اگر $y \in L$ وجود داشته باشد به طوری که $x \vee y = ۱$ و $x \wedge y = ۰$. اگر هر عنصر مشبکه دارای یک مکمل باشد آن را یک مشبکه مکمل‌دارمی‌گوییم.

۱۱.۱.۱ تعریف. مشبکه $(L, \vee, \wedge)$ را توزیع‌پذیر می‌گوییم اگر به ازای هر $x, y, z \in L$ داشته باشیم $x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

در تعریف فوق شرط $x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ با $x \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ معادل است.

۲.۱ جبرهای بول

در این بخش جبر بول را معرفی و برخی از مهم‌ترین خواص آن را بیان می‌کنیم. محققین دو تعریف برای جبر بول قائل شده‌اند؛ یک تعریف از دیدگاه نظریه مشبکه‌ها و تعریف دیگر از دیدگاه یک دستگاه جبری است که در زیر هر دو تعریف را می آوریم.

۱.۲.۱ تعریف. (جبر بول به عنوان یک مشبکه). هر مشبکه توزیع‌پذیر و مکمل‌دار را یک جبر بول می‌گوییم.

۲.۲.۱ تعریف. (جبر بول به عنوان یک دستگاه جبری). فرض کنیم B مجموعه‌ای ناتهی که شامل دو عنصر خاص ۰ و ۱ است و بر آن اعمال دوتایی $+$ و . و عمل یکتایی $-$ تعریف شده است. در این صورت ساختار جبری $(B, +, ., \circ, \backslash)$ را جبر بول می‌گوییم اگر برای هر $x, y, z \in B$ شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{array}{ll}
a)\ x+y=y+x, & a')\ xy=yx, \\
b)\ x(y+z)=xy+xz, & b')\ x+yz=(x+y)(x+z), \\
c)\ x+\circ=x, & c')\ x.\backslash=x, \\
d)\ x+\overline{x}=\backslash, & d')\ x.\overline{x}=\circ, \\
h)\ \backslash\neq\circ. &
\end{array}$$

این دو تعریف جبر بول با یکدیگر معادل هستند.

۳.۲.۱ مثال. اگر U مجموعه‌ای (متناهی) باشد، آنگاه $B=\mathcal{P}(U)$ یک جبر بول است که در آن برای $A, B \subset U$ داریم $A+B=A\cup B$، $AB=A\cap B$، $\overline{A}=U-A$ و $\circ=\emptyset$ و $\backslash=U$.

۴.۲.۱ قصیه. (قانون‌های خودتوانی). فرض کنیم $(B, +, ., \circ, \backslash)$ یک جبر بول باشد، در این صورت برای هر $x \in B$ داریم: $x+x=x$ و $x.x=x$.

اثبات. با استفاده از تعریف جبر بول داریم:

$$\begin{aligned}
x=x+\circ=x+x\overline{x} &= (x+x)(x+\overline{x}) \\
&= (x+x).\backslash = x+x.
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
x=x.\backslash=x(x+\overline{x}) &= xx+x\overline{x} \\
&= xx+\circ = xx.
\end{aligned}$$

۵.۲.۱ قصیه. برای هر جبر بول B، اگر $x, y, z \in B$، آنگاه خواص زیر برقرار است:

۱) $x.\circ=\circ$ و $x+\backslash=\backslash$؛

۲) $x(x+y)=x$ و $x+xy=x$؛

۳) اگر $xy = xz$ و $\overline{x}y = \overline{x}$، آنگاه $y = z$؛

۴) $x + (y+z) = (x+y) + z$ و $x(yz) = (xy)z$.

می‌توان ساختار جبر بولی $(B, +, ., 0, 1)$ را با تعریف یک رابطه ترتیب جزیی به صورت $x \leq y \Leftrightarrow x.y = x \Leftrightarrow x + y = y$، به یک مجموعه مرتب جزیی تبدیل کرد، که در آن جمع و ضرب به ترتیب $l.u.b$ و $g.l.b$ هستند ۰ کوچک‌ترین عضو و ۱ بزرگ‌ترین عضو است. در هر جبر بول، مکمل یکتاست.

دو عنصر در جبر بول را مجزا گوییم هرگاه حاصل‌ضرب آن‌ها ۰ باشد. زیرمجموعه S از یک جبر بول را مجزا گوییم اگر هر دو عضو آن مجزا باشد.

۶.۲.۱ مثال. مجموعه همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه با اعمال $\cup$ و $\cap$ و عمل متمم، یک جبر بول است که آن را با نماد 2^{α} نشان می‌دهیم و در آن α یک عدد اصلی مجموعه است.

۷.۲.۱ مثال. مجموعه همه زیرمجموعه‌های متناهی و هم‌متناهی یک مجموعه با اعمال $\cup$ و $\cap$ و متمم، یک جبر بول است. (یک زیرمجموعه را هم‌متناهی گوییم اگر متمم آن متناهی باشد.)

۸.۲.۱ مثال. مجموعه‌های باز و بسته یک توپولوژی با اعمال مجموعه‌ای (اجتماع و اشتراک) یک جبر بول است.

۹.۲.۱ تعریف. جبر بول B را α—کامل گوییم اگر هر زیرمجموعه B که حداکثر α عضو داشته باشد دارای حاصل‌جمع در B باشد. (در نتیجه دارای حاصل‌ضرب در B است).

۱۰.۲.۱ تعریف. جبر بول B را کامل گوییم، هرگاه برای هر عدد کاردینال α، α—کامل باشد. یک جبر بول $\aleph_0$—کامل را σ—کامل نیز می‌گوییم.

۳.۱ ℓ—گروه‌ها

در این بخش po—گروه‌ها (گروه‌های مرتب جزیی)، o—گروه‌ها (گروه‌های مرتب) و ℓ—گروه‌ها (گروه‌های مشبکه‌ای) را مرور می‌کنیم.

۱.۳.۱ تعریف. یک دستگاه $G = (G, +, \leq, \circ)$ یک گروه مرتب جزیی است هرگاه

۱) $(G, +, \circ)$ گروه آبلی باشد؛

۲) $(G, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی باشد؛

۳) برای هر $x, y, z \in G$، اگر $x \leq y$ آنگاه $x + z \leq y + z$.

اگر $x > \circ$، x را مثبت، و اگر $x < \circ$، آن را منفی می‌نامیم. به عنوان مثال، $\mathbb{Q}$ یک گروه جزیی مرتب (میدان مرتب) است.

گروه مرتب جزیی را به اختصار po—گروه می‌نامیم. po—گروه $G = (G, +, \leq)$ را مرتب کلی (o—گروه) گوییم اگر $(G, \leq)$ یک مجموعه مرتب کلی باشد.

۲.۳.۱ تعریف. فرض کنید که $(G, +, \leq_G)$ یک po—گروه باشد. گروه مرتب جزیی $(H, +, \leq_H)$ را یک زیرگروه مرتب G گوییم، هرگاه $(H, +)$ زیرگروهی از $(G, +)$ باشد و $\leq_H = \leq_G \cap (H \times H)$.

۳.۳.۱ تعریف. یک گروه مرتب کلی را ارشمیدسی گوییم هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$(\forall a, b \in G) a > \circ \Longrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \ni: n.a \geq b.$$

۴.۳.۱ تعریف. (ℓ—گروه به عنوان یک دستگاه جبری مجرد). مجموعه $(G, +, \vee, \wedge, \circ)$ را یک ℓ—گروه آبلی گوییم هرگاه:

۱) $(G, +, \circ)$ گروه آبلی باشد؛

۲) $(G, \vee, \wedge)$ مشبکه باشد؛