دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

جوابهای طیفی دقیق برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی سهموی با استفاده از روش تاو فراکروی

اساتید راهنما

دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی

دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور

دکتر فریبا بهرامی

پژوهشگر

ماهرخ وحدانی

۱۳۹۱

تقدیم به

به دو ستاره درخشان زندگیم، پدر و مادرم

و همه عزیزانم

آنان‌که فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان، سرمایه جاودانه زندگی‌ام بوده است. در برابر وجود پرمهرشان، زانوی ادب بر زمین می‌نهم و با دلی سرشار از عشق و محبت، بر دستانشان بوسه می‌زنم.

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات خانواده عزیزم، تشکر و قدردانی نمایم که در دوران تحصیل، بهترین مشوق من در امر آموختن بودند و هرگز از جانب ایشان، احساس کوچک‌ترین محدودیتی نکردم.

از استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر صداقت شهمراد و دکتر محمد یعقوب اردبیلی که تبیین و هدایت پایان‌نامه را به عهده داشتند، سپاس گذار هستم. ایشان با درایت و صبر و حوصله فراوان که مهمترین نیازهای من بود، مرا در به انجام رساندن این پایان‌نامه، کمک و راهنمایی کردند.

مراتب امتنان خود را از استاد گرامی، جناب خانم دکتر فریبا بهرامی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، ابراز می‌دارم.

در نهایت، از همه دوستان و عزیزانی که مرا در دوران تحصیل همراهی کردند، تشکر می‌نمایم.

ماهرخ وحدانی

فهرست مطالب

نام خانوادگی: وحدانی نام: ماهرخ

عنوان پایان‌نامه: جوابهای طیفی دقیق برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی سهموی با استفاده از روش تاو فرا کروی

اساتید راهنما: دکترمحمد یعقوب رحیمی و دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور: دکتر فریبا بهرامی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۰ تعداد صفحه:۵۲

کلیدواژه‌ها: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی سهموی، مدلهای طیفی، ضرایب بسط ، چندجمله‌ایهای متعامد

چکیده

در این پایاننامه روشهای طیفی فراکروی دوگانه برای تعیین جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی سهموی تحت شرایط مرزی مرکب ناهمگن مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات دیفرانسیل جزیی با شرایط اولیه و مرزی به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود، بطوریکه ضرایب معادلات حاصل وابسته به زمان شوند. این دستگاه معادلات به کمک جبر ماتریسی تانسورها ساده سازی شده و به کمک یک روش گام به گام حل می‌شود. جهت توصیف نحوه بکارگیری این روش کاربردهای عددی آن مورد بررسی قرار می‌گیرند و نتایج عددی حاصل با نتایج حاصل از جوابهای تحلیلی مقایسه می‌شوند. در پایان نتایج حاصل از تقریب طیفی به وسیله چندجمله ایهای چبیشف از نوع اول با نتایج حاصل از سایر چندجمله ایهای فراکروی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

مقدمه

مساله تقریب جوابهای معادلات دیفرانسیل جزیی یا معمولی با روشهای طیفی به تقریب گالرکین [۱] معروف است که از تعدای توابع پایه‌ای پدید می آید و بصورت توابع مشخصه از مسایل اشتورم لیوول [۲] منفرد بوجود می‌آیند. پایه ها با اضافه کردن شرایطی بطور خودکار برای مساله مورد قبول واقع می‌شوند، مانند شرایط اولیه و مرزی یا شرایط عمومی بیشتر. از طرف دیگر این شرایط ممکن است بصورت محدودیتی روی ضرایب بسط اعمال شوند، مانند مدل لانکسوز تاو [۳] [۱۴].

در دهه‌های اخیر روشهای طیفی شیوه های محاسباتی جذابی فراهم آورده‌اند. این روشها همچنین جذابیتهایی در محاسبات خودکار برای رده وسیعی از مسایل فیزیکی در زمینه شارهای گرمایی و سیالات کسب کرده‌اند. این روشها همچنین کارایی بالایی را برای شارهای هموار مستقل از زمان در هندسه های ساده به اثبات رسانده‌اند، در این زمینه می‌توان به مراجع [۱۹] و [۸] رجوع کرد.

مزیت اصلی روشهای طیفی در توانایی آنها برای رسیدن به نتایج دقیق با کمترین درجه آزادی است. برای روشهای طیفی و شبه طیفی عبارتهای صریح برای ضرایب بسط جواب لازم هستند. در حالتی که توابع پایه در روش بسط چندجمله‌ایهای چبیشف انتقال یافته $T_n^*(x)$، $x \in [0,1]$ باشند، عبارت لازم توسط کاراگروگس [۴] در مرجع [۱۲] بدست آمده است.

فرمول مشابه برای چندجمله‌ایهای لژاندر $P_n(x)$، $x \in [-1,1]$ در مرجع [۲۰] بدست آمده است.

یک فرمول عمومی‌تر وقتی که توابع پایه چندجمله‌ایهای فرا کروی $C_n^\alpha(x)$، به ازای $x \in [-1,1]$ و $\alpha \in (-1/2,\infty)$ باشند، توسط دوها [۵] در مرجع [۶] بررسی شده است. بنابراین فرمولهای لازم برای

[۱] Galerkin
[۲] Strum Liouvill
[۳] Lanczos tau
[۴] Karageorghis
[۵] Doha

چندجمله‌ایهای چبیشف نوع اول و دوم و لژاندر بصورت حالت خاصی از چندجمله‌ایهای فرا کروی ارایه شده‌اند. حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی با روشهای طیفی مبتنی بر چندجمله‌ایهای چبیشف دوگانه توسط مولفین زیادی بررسی شده است که از بین آنها می‌توان به کارهای دو و اسکارتون[۶] [۱] ، دوها [۷] [۲] و [۴]، هدوگل و زنگ[۸] [۱۰] ، هورنر[۹] [۱۱] اشاره کرد. از میان کارهایی که بیشتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند می‌توان به استفاده از تبدیل فوریه سریع برای چندجمله‌ایهای چبیشف اشاره کرد. استریت [۱۰] و همکارانش در مرجع [۲۱] نشان دادند که در بعضی حالتها به کارگیری ضربهای معمولی ماتریسها و بردارها سریعتر از سایر تکنیکهای تبدیلی است.

این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۳] تنظیم شده است.

[۶] Scraton and Dew
[۷] Doha
[۸] Haidvogel and Zang
[۹] Horner
[۱۰] Streett

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف. معرفی معادلات دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل معمولی، رابطه‌ای بین متغیر x، تابع $y = y(x)$ ومشتقهایش $y^{(n)}$،...،y''،y' است. یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n را بصورت رابطه زیر می‌توان معرفی کرد

$$F(x, y, y'...y^{(n)}) = 0$$

مرتبه معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاترین مشتقی است که در معادله آمده است.

یک جواب معادله دیفرانسیل، تابعی مانند $y = f(x)$ است، که در معادله صدق می‌کند.

معادله دیفرانسیل خطی، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول و مشتقات آن بصورت خطی ظاهر شده باشند.

معادله‌ای که خطی نباشد غیر خطی نامیده می‌شود.

معادله خطی مرتبه اول به صورت $a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$ است و چون $a_0(x) \neq 0$ با تقسیم دو طرف بر $a_0(x) \neq 0$ داریم:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

که شکل عمومی ***معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول*** *است و جواب آن بصورت زیر حاصل می‌شود:*

$$y(x) = e^{-\int p(t)dt} \left(\int_0^x q(t)e^{\int p(t)dt} dt + c \right).$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه n دارای یک خانواده n- پارامتری از جوابهاست. n شرط امکان می‌دهد تا مقادیر n پارامتر به طور یکتا تعیین شود.

اگر $x \geq x_0$ و همه شرایط در نقطه $x = x_0$ داده شده باشد، **شرط اولیه** نامیده می‌شود.

اگر $a \leq x \leq b$ و مقادیر جواب معادله دیفرانسیل در نقاط مرزی مشخص باشد، مساله را یک **مساله مقدار مرزی** می‌گویند.

مثال: این مثال یک مساله مقدار اولیه است

$y'' + 2y' + y = 0$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 1$

معادله دیفرانسیل جزیی معادله‌ای متشکل از یک تابع مجهول با بیش از یک متغیر مستقل همراه با مشتقات‌اش است. برای مثال، معادله زیر برای تابع مجهول دومتغیره $u(x,y)$ یک معادله دیفرانسیل جزیی است

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

تعریف. تابع گاما

تابع گاما به صورت

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x > 0$

تعریف می‌شود.

دو خاصیت تابع گاما عبارت است از :

$1)\Gamma(1) = 1 \qquad 2)\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

تعریف. معرفی توابع متعامد

فرض کنید توابع f و g بر بازه $[a,b]$ تعریف شده باشند وتابع w بر این بازه پیوسته و مثبت باشد. حاصلضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن w، بصورت

$$(f,g)=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

تعریف می‌شود.

۱) دو تابع f و g را نسبت به تابع وزن w متعامد گویند اگر $(f,g)=0$ باشد.

۲) دنباله توابع $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ را یک مجموعه متعامد گویند، اگر این توابع دو به دو متعامد باشند، یعنی

$$(\psi_m,\psi_n)=0 \qquad m\neq n$$

تعریف. چندجمله‌ایهای لژاندر

چندجمله‌ای لژاندر درجه n را با $p_n(x)$ نشان می‌دهند و به صورت

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!x^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}$$

تعریف می‌کنند.

این چندجمله‌ایها نسبت به تابع وزن $w(x)=1$ متعامدند:

$$(p_m,p_n)=0,\ \ m\neq n,$$

چندجمله‌ایهای لژاندر در رابطه بازگشتی

$$np_n(x)-x(2n-1)p_{n-1}(x)-(n-1)p_{n-2}(x)=0, \quad n\geq 2$$

صدق می‌کنند و داریم

$$p_0(x)=1,\ \ p_1(x)=x,\ \ p_n(1)=1, \quad n=0,1,2,.....$$

تعریف. چند جمله‌ایهای چبیشف

مجموعه چند جمله‌ایهایی که روی بازه $(-1,1)$ نسبت به تابع وزن

$$w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \;\; \alpha > -1, \beta > -1$$

متعامد باشند، به **چند جمله ایهای ژاکوبی** معروف هستند.

به ازای $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$، چند جمله ایهای ژاکوبی را **چندجمله‌ایهای چبیشف نوع اول** می‌نامند که نسبت به تابع وزن $w(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ متعامد هستند. وقتی $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ باشد چندجمله‌ایهای ژاکوبی را **چندجمله‌ایهای چبیشف نوع دوم** می نامند که نسبت به تابع وزن $w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ متعامد هستند.

چند جمله‌ای چبیشف درجه n را با T_n نمایش می‌دهند و بصورت

$$T_n(x) = cosn\theta, \qquad \theta = cosx, \quad x \in [-1,1]$$

است.

این چند جمله‌ایها متعامدند، یعنی

$$(T_m, T_n) = 0, \quad m \neq n,$$

این چند جمله‌ایها در رابطه بازگشتی

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

صدق می‌کنند و داریم

$$T_n(1) = 1, \;\; n = 0, 1, 2, ... \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

تعریف. بسط تیلور

فرض کنید f یک تابع حقیقی بر $[a,b]$ بوده، n عدد صحیح مثبتی باشد، $f^{(n-1)}$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، و $f^{(n)}(t)$ به ازای هر $t \in (a,b)$ وجود داشته باشد، بسط تیلور حول نقطه α به صورت

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!}(t-\alpha)^i \qquad \alpha \in [a,b]$$

تعریف می‌شود.

تعریف. تابع بسل نوع اول

تابع بسل نوع اول به صورت

$$J_\alpha(x) = \Sigma_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{2m+\alpha}}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}$$

تعریف می‌شود، که $\Gamma(m+\alpha+1)$ تابع گاما است. تابع بسل بازای هر x همگرا است.

فصل ۲

چند جمله‌ایهای فرا کروی

چندجمله‌ایهای فرا کروی پیوسته با متغیر حقیقی $(\alpha > -\frac{1}{2})$، یک دنباله از چند جمله‌ایهای $\left\{ C_n^{(\alpha)}(x) \qquad n = 0, 1, 2, ... \right\}$ است که در شرط تعامد زیر صدق می‌کند:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}C_m^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(x)dx = 0. \qquad (m \neq n)$$

با استفاده از فرمول رودریگ [۱] داریم

$$C_n^{(\alpha)}(x) = (-\frac{1}{2})^n \frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\alpha+\frac{1}{2})}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}].$$

برای هدفهای کنونی که راحتی برای استاندارد کردن است $C_n^{(\alpha)}(1) = 1$ در نظر می‌گیریم(این یک استاندارد کلی نیست). لازم به ذکر است که $C_n^{(0)}(x)$ معادل چندجمله‌ای چبیشف از نوع اول، $T_n(x)$، و $C_n^{(\frac{1}{2})}(x)$ معادل چندجمله‌ای لژاندر، $P_n(x)$، و $C_n^{(1)}(x)$ معادل $(\frac{1}{n+1})U_n(x)$ که چندجمله‌ایهای چبیشف از نوع دوم است. براحتی دیده می‌شود چندجمله‌ایهای فراکروی شامل چندجمله‌ایهای چبیشف و چندجمله‌ایهای لژاندر هست و همه خاصیتهای آنها را شامل می‌شوند.

---

[۱] Rodrigue's

چندجمله ایهای فراکروی در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$(n+2\alpha)C_{n+1}^{(\alpha)}(x)=2(n+\alpha)xC_n^{(\alpha)}(x)-nC_{n-1}^{(\alpha)}(x),\qquad n=1,2,3,... \tag{۱.۲}$$

و

$$2(n+\alpha)C_n^{(\alpha)}(x)=\frac{n+2\alpha}{n+1}\frac{dC_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{dx}-\frac{n}{n+2\alpha-1}\frac{dC_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{dx}. \tag{*}$$

بطوریکه

$$C_0^{(\alpha)}(x)=1 \qquad C_1^{(\alpha)}(x)=x$$

برای اثبات ببینید [۴].

فرض کنید $u(x,y)$ یک تابع پیوسته و دارای مشتقات پیوسته و کراندار در $-1\leqslant x,y\leqslant 1$ است و

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}C_m^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(y) \tag{۲.۲}$$

در این صورت داریم

$$u^{(p,q)}(x,y)=\frac{\partial^{p+q}u(x,y)}{\partial x^p\partial y^q}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}^{(p,q)}C_m^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(y), \tag{۳.۲}$$

که $a_{mn}^{(p,q)}$ نشان دهنده ضرایب بسط فرا کروی $u^{(p,q)}(x,y)$ و $a_{mn}^{(0,0)}=a_{mn}$ است و

$$a_{mn}=\frac{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}u(x,y)C_m^{(\alpha)}(x)C_n^{(\alpha)}(y)dxdy}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}C_m^{(\alpha)}(x)C_i^{(\alpha)}(x)dx\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}C_j^{(\alpha)}(y)C_n^{(\alpha)}(y)dy}$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}C_m^{(\alpha)}(x)C_i^{(\alpha)}(x)dx=\frac{\Pi^{\frac{1}{2}}m!\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(2\alpha)}{(n+\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(n+2\alpha)}\qquad m=i$$

روابط بازگشتی زیر برای ضرایب فراکروی برقرارند.

قضیه ۱.۲

$$\frac{(m+2\alpha-1)}{2m(m+\alpha-1)}a^{(p,q)}_{m-1,n}-\frac{(m+1)}{2(m+\alpha+1)(m+2\alpha)}a^{(p,q)}_{m+1,n}=a^{(p-1,q)}_{m,n},\quad m,p\geqslant 1, \tag{۴.۲}$$

$$\frac{(n+2\alpha-1)}{2n(n+\alpha-1)}a^{(p,q)}_{m,n-1}-\frac{(n+1)}{2(n+\alpha+1)(n+2\alpha)}a^{(p,q)}_{m,n+1}=a^{(p,q-1)}_{m,n},\quad n,p\geqslant 1, \tag{۵.۲}$$

$$a^{(p,q)}_{m,n}=\frac{2^p(m+\alpha)\Gamma(m+2\alpha)}{(p-1)!m!}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i+p-2)!\Gamma(m+i+p+\alpha-1)(m+2i+p-2)!}{(i-1)!\Gamma(m+i+\alpha)\Gamma(m+2i+p+2\alpha-2)} \tag{۶.۲}$$

$$\times a^{(0,q)}_{m+2i+p-2,n},\qquad p\geqslant 1$$

$$a^{(p,q)}_{m,n}=\frac{2^q(n+\alpha)\Gamma(n+2\alpha)}{(q-1)!n!}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(j+q-2)!\Gamma(n+j+q+\alpha-1)(n+2j+q-2)!}{(j-1)!\Gamma(n+j+\alpha)\Gamma(n+2j+q+2\alpha-2)} \tag{۷.۲}$$

$$\times a^{(p,0)}_{m,n+2j+q-2},\qquad q\geqslant 1$$

برهان. **رابطه (۴.۲)**

فرض کنید

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}C^{(\alpha)}_m(x)C^{(\alpha)}_n(y),$$

$$u^{(p,q)}(x,y)=\textstyle\sum_{m=0}^{\infty}a^{(p,q)}_{mn}C^{(\alpha)}_m(x)C^{(\alpha)}_n(y)=\sum_{m=0}^{\infty}a^{(p-1,q)}_{mn}D_xC^{(\alpha)}_m(x)C^{(\alpha)}_n(y),\,(**)$$

از(*)

$$2(m+\alpha)C_m^{(\alpha)}(x)=\frac{m+2\alpha}{m+1}D_xC_{m+1}^{(\alpha)}(x)-\frac{m}{m+2\alpha-1}D_xC_{m-1}^{(\alpha)}(x),$$

پس

$$C_m^{(\alpha)}(x)=\frac{m+2\alpha}{2(m+\alpha)(m+1)}D_xC_{m+1}^{(\alpha)}(x)-\frac{m}{2(m+\alpha)(m+2\alpha-1)}D_xC_{m-1}^{(\alpha)}(x),$$

با استفاده از $\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}^{(p,q)}(t)$ در طرفین داریم

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}^{(p,q)}(t)C_m^{(\alpha)}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+2\alpha}{2(m+\alpha)(m+1)}a_{mn}^{(p,q)}(t)D_xC_{m+1}^{(\alpha)}(x)-$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{(2(m+\alpha))(m+2\alpha-1)}a_{mn}^{(p,q)}(t)D_xC_{m-1}^{(\alpha)}(x),$$

با توجه به $D_xC_{m-1}^{(\alpha)}(x)$ می‌توان اندیس را از یک شروع کرد لذا می‌توان نوشت

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}^{(p,q)}C_m^{(\alpha)}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+2\alpha}{2(m+\alpha)(m+1)}a_{mn}^{(p,q)}D_xC_{m+1}^{(\alpha)}(x)-$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(2(m+\alpha))(m+2\alpha-1)}a_{mn}^{(p,q)}D_xC_{m-1}^{(\alpha)}(x),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_{mn}^{(p-1,q)}DC_m^{(\alpha)}(x)-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+2\alpha}{2(m+\alpha)(m+1)}a_{mn}^{(p,q)}D_xC_{m+1}^{(\alpha)}(x)+$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(2(m+\alpha))(m+2\alpha-1)}a_{mn}^{(p,q)}D_xC_{m-1}^{(\alpha)}(x)=0,$$

با جدا کردن جملات اول از مجموع‌های اول و سوم نتیجه می‌شود

$$a_{0n}^{(p-1,q)}D_xC_0^{(\alpha)}(x)+\frac{a_{0n}^{(p,q)}}{2(1+\alpha)(2\alpha)}D_xC_0^{(\alpha)}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}^{(p-1,q)}DC_m^{(\alpha)}(x)-$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+2\alpha}{2(m+\alpha)(m+1)}a_{mn}^{(p,q)}D_xC_{m+1}^{(\alpha)}(x)+$$
$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{m}{(2(m+\alpha))(m+2\alpha-1)}a_{mn}^{(p,q)}D_xC_{m-1}^{(\alpha)}(x)=0,$$

با انتقال اندیس جمع در همه سریها به $m=1$ داریم

$$a_{0n}^{(p-1,q)}D_xC_0^{(\alpha)}(x)+\frac{a_{0n}^{(p,q)}}{2(1+\alpha)(2\alpha)}D_xC_0^{(\alpha)}(x)+\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}^{(p-1,q)}D_xC_m^{(\alpha)}(x)-$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+2\alpha-1}{2(m+\alpha-1)m} a_{m-1n}^{(p,q)} D_x C_m^{(\alpha)}(x) +$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+1}{2(m+\alpha+1)(m+2\alpha)} a_{m+1n}^{(p,q)} D_x C_m^{(\alpha)}(x) = 0,$$

و با فاکترگیری از $D_x C_m^{(\alpha)}(x)$ نتیجه می‌شود

$$a_{0n}^{(p-1,q)} D_x C_0^{(\alpha)}(x) - \frac{a_{0n}^{(p,q)}}{2(1+\alpha)(2\alpha)} D_x C_0^{(\alpha)}(x) +$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} \{ a_{mn}^{(p-1,q)} - \frac{m+2\alpha-1}{2(m+\alpha-1)m} a_{m-1n}^{(p,q)}(x) +$$
$$\frac{m}{(2(m+\alpha+1))(m+2\alpha)} a_{m+1n}^{(p,q)} \} D_x C_m^{(\alpha)}(x) = 0,$$

چون $C_0^{(\alpha)}(x) = 1$ پس $D_x C_0^{(\alpha)} = 0$. لذا با توجه به استقلال خطی چند جمله‌ایهای فراکروی رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{(m+2\alpha-1)}{2m(m+\alpha-1)} a_{m-1,n}^{(p,q)} - \frac{(m+1)}{2(m+\alpha+1)(m+2\alpha)} a_{m+1,n}^{(p,q)} = a_{m,n}^{(p-1,q)},$$

□

برهان (۵.۲) دقیقا مشابه (۴.۲) است. برای برهان (۶.۲) و (۷.۲) به [۵] مراجعه کنید.

فصل ۳

حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی سهموی

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی سهموی

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (-1\leq x,y\leq 1), t\leq[0,\infty) \tag{۱.۳}$$

را بر حسب دو متغیر x و y و متغیر زمان t تحت شرایط مرزی مختلط ناهمگن:

$$\begin{cases} \alpha_1 u+\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}=\gamma_1(y,t), & x=-1\\ \alpha_2 u+\beta_2\frac{\partial u}{\partial x}=\gamma_2(y,t), & x=1\end{cases} \tag{۲.۳}$$

و

$$\begin{cases} \alpha_3 u+\beta_3\frac{\partial u}{\partial y}=\gamma_3(x,t), & y=-1\\ \alpha_4 u+\beta_4\frac{\partial u}{\partial y}=\gamma_4(x,t), & y=1\end{cases} \tag{۳.۳}$$

و شرط اولیه

$$u(x,y,0)=f(x,y), \qquad x,y\epsilon[-1,1] \tag{۴.۳}$$

در نظر بگیرید. فرض کنید جواب مساله بصورت زیر بر حسب چندجمله‌ایهای فرا کروی قابل بسط است:

$$u(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}(t)C_m^{\alpha}(x)C_n^{\alpha}(y), \tag{۵.۳}$$

که در آن $C_m^{(\alpha)}(x)$ و $C_n^{(\alpha)}(y)$ چند جمله ایهای فرا کروی بر حسب x و y هستند.

در سراسر این پایان نامه فرض می‌شود تابع $f(x,y)$ تابعی است که در شرایط مرزی (۲.۳) و (۳.۳) صدق می‌کند.

همچنین فرض می‌شود f بصورت زیر بر حسب چندجمله ایهای فرا کروی قابل بسط است

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_{mn} C_m^{\alpha}(x) C_n^{\alpha}(y). \tag{۶.۳}$$

قضیه ۲.۳ (وایرشتراس)

فرض کنید $\{\mu_n\}$ دنباله ای از اعداد نامنفی باشد بطوریکه $\Sigma_{n=1}^{\infty}\mu_n$ همگراست و $\{f_n\}$ دنباله ای از توابع باشد که به ازای هر x و n ، $|f_n(x)| \leq \mu_n$ آنگاه Σf_n بطور یکنواخت همگراست.

با توجه به

$$|C_{2m+1}^{(\alpha)}(x)| \leq |\frac{2\alpha}{(2m+1)(2\alpha+2m+1)^{\frac{1}{2}} m!}|$$

و استفاده از آزمون نسبت براحتی می‌توان دید

$$\Sigma_{m=0}^{\infty} \frac{2\alpha}{(2m+1)(2\alpha+2m+1)^{\frac{1}{2}} m!}$$

همگرا است. بنابراین با استفاده از قضیه وایرشتراس (۶.۳) بطور یکنواخت همگرا است.

پس با توجه به اینکه رابطه (۶.۳) به ازای $-1 \leqslant x,y \leqslant 1$ بطور یکنواخت همگرا است، نتیجه می شود جواب معادله (۱.۳) دارای بسط به سری دوگانه به صورت (۵.۳) است. حالتی که ناپیوستگی در راسهای $(\pm1,\pm1)$ اتفاق می افتد با یک روش مشابه در مرجع [۱۳] بررسی شده است.