باسمه تعالی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه شیخ‌بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

نابرابری شبه تغییراتی برداری مینتی

پژوهشگر

معصومه علیخانی

اساتید راهنما

دکتر جعفر زعفرانی

دکتر طوبی جبروتیان

بهمن ۹۱

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی روابط میان جواب‌های نامساوی شبه تغییراتی برداری مینتی و جواب‌های مسئله بهینه‌سازی برداری و بعضی روابط میان جواب‌های نامساوی شبه تغییراتی برداری مینتی و نامساوی شبه تغییراتی برداری استامپاخیا می‌پردازیم. علاوه بر این تعمیمی از نابرابری شبه تغییراتی مینتی از نوع دیفرانسیل‌پذیر با ویژگی صعودی در طول پرتوها ،وجود جواب و روابط بین جواب تعمیم نابرابری شبه تغییراتی مینتی از نوع دیفرانسیل‌پذیر و مسئله بهینه‌سازی را بررسی می‌کنیم. همچنین نابرابری تغییراتی برداری و اسکالری شامل توابع دو متغیره را در نظر گرفته و شرایط لازم و کافی برای وجود جواب با توجه به ویژگی اشتراک متناهی یک تابع مجموعه مقدار و اثبات اینکه تابع شبه یکنوای سره در ویژگی KKM صدق می‌کند را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: *نابرابری شبه تغییراتی برداری مینتی، مسئله بهینه‌سازی برداری، $\eta-$اینوکس‌نما، $\eta-$یکنوانما، صعود در طول پرتوها، نگاشت KKM، شبه یکنوایی سره تابع دو متغیره.*

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

نامساوی‌های تغییراتی برداری و اسکالری یک مدل ریاضی را برای مسائل تعادل برداری و اسکالری ارائه می‌نمایند، مسائلی که علاوه بر نامساوی‌های تغییراتی مسائل بهینه‌سازی را به عنوان موارد خاص شامل می‌شوند، بنابراین از نامساوی‌های تغییراتی برای مدلسازی موازنه استاتیک چندین اقتصاد از قبیل انحصار چند جانبه مکانی، موازنه‌های اقتصادی عمومی و توصیف وجود پایداری موازنه یک سیستم پویا استفاده شده است. به بیان دیگر، کاربرد نامساوی تغییراتی در سیستم دینامیک امکان یکی‌سازی جنبه‌های استاتیک و دینامیک در مطالعه پدیده‌های اقتصادی را فراهم می‌آورد.

مینتی[۱] [۳۰] اصل خطی‌سازی را برای موارد اسکالری نشان داد که نقش سودمندی را در نامساوی‌های تغییراتی بازی می‌کند. در واقع نامساوی مینتی کلاسیک و اصل مینتی به عنوان ابزارهای مهمی در تنظیم جواب برای یک مسئله مقدار مرزی غیر همگن تعمیم یافته شناخته شده [۳] و زمانیکه عملگر یک گرادیان است یک اصل کمینه برای مسائل بهینه‌سازی محدب است [۲۰].

اثبات شده است که نامساوی تغییراتی مینتی نوعی از موازنه را بسیار دقیقتر از نامساوی تغییراتی استامپاخیا[۲] توصیف می‌کند [۶]. بسط‌های برداری نامساوی‌های تغییراتی

[۱] Minty
[۲] Stampaccia

استامپاخیا و مینتی در [۱۴] و [۱۳] توسط ژیانسی[۳] معرفی شده‌اند. فرض کنید K یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از $\mathbb{R}^n$ و F یک نگاشت خطی از K به $\mathbb{R}^n$ باشد، نامساوی تغییراتی برداری مینتی [۷] مربوط به F و K ، یافتن $y \in K$ است به طوریکه برای هر $x \in K$ داریم:

$$\langle F(x), y - x \rangle \leq \circ$$

پس y یک جواب برای نابرابری تغییراتی برداری مینتی یا یک جواب مینتی برای تابع F روی K است. در برخی کارهای قبل [۷] این مسئله یک مسئله نامساوی تغییر دوگان نامیده شده است، تا ارتباط نزدیک این مسئله با نامساوی اولیه تغییراتی برداری استامپاخیا کلاسیک برای تابع F روی K را نشان دهد که یافتن $y \in K$ است به طوریکه برای هر $x \in K$ داشته باشیم:

$$\langle F(y), x - y \rangle \geq \circ$$

بهارا و پاندا[۴] [۵] به تعمیم غیر خطی اصل مینتی دست یافتند. کنو و یائو[۵] [۲۴] یک اصل خطی سازی تعمیم‌یافته را برای نگاشت‌های مقدار معین بدست آورند. لی و همکاران[۶] [۲۵] با استفاده از نتیجه نادلر[۷] [۳۴] به اصل مینتی برداری دست یافتند و با این نتایج وجود جواب برای دو نوع نامساوی تغییراتی برداری را برای چندین تابع تحت شرط معین شبه یکنوایی و شرط نیم‌پیوستگی در نظر گرفتند. از سوی دیگر انصاری و

[۳] Giannessi
[۴] Behera and Panda
[۵] Konnov and Yao
[۶] Lee et al
[۷] Nadler

همکارانش [8] [۱] به مورد غیرخطی اصل مینتی دست یافتند و با استفاده از موارد غیرخطی اصل مینتی وجود جواب برای برخی مسائل نامساوی تغییراتی برداری را بررسی کردند. مسترونی [9] [۲۹] روی ویژگی‌های نامساوی تغییراتی برداری مینتی با آنالیز ارتباطات میان سیستم‌های تعمیم‌یافته، مسائل بهینه‌سازی برداری و نامساوی‌های تغییراتی مطالعه کرده است. به ویژه او هم‌ارزی میان نامساوی تغییراتی برداری مینتی و نامساوی تغییراتی برداری استامپاخیا را تحت فرضیات تنظیمی مطلوب نشان داده است. لی و کام[10] [۲۶] نامساوی‌های تغییراتی برداری مینتی تعمیم یافته را برای توابع ماتریسی مقدار معرفی کرده و رابطه هم‌ارزی میان جواب‌های نامساوی تغییراتی برداری مینتی تعمیم یافته و مسائل بهینه‌سازی برداری تعمیم یافته را نشان داده‌اند. در فصل اول این پایان‌نامه، به بیان مفاهیم و قضایای اولیه می‌پردازیم درفصل دوم در بخش اول روی نامساوی‌های شبه تغییراتی مینتی در بخش دوم روابط میان جواب نابرابری شبه تغییراتی برداری مینتی و جواب‌های مسئله بهینه‌سازی برداری و روابط میان جواب‌های نابرابری شبه تغییراتی برداری مینتی و جواب‌های نابرابری شبه تغییراتی برداری استامپاخیا بحث می‌کنیم. این نتایج تحت فرضیات محدب نما یا $\eta-$یکنوا نما بدست آمده‌اند. در بخش سوم روابط میان نابرابری شبه تغییراتی برداری مینتی و نابرابری شبه تغییراتی اختلال یافته را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم اگر فرض کنیم که E یک فضای خطی و $K \subseteq E$ و $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. $GMVI(f', K)$ تعمیمی که نابرابری تغییراتی مینتی از نوع دیفرانسیل‌پذیر است و

[8] Ansari et al

[9] Mastroeni

[10] Lee and Kum

K ستاره‌گون وجود جواب x^* برای $GMVI(f', K)$ و ویژگی صعودی f در طول پرتویی که از x^* شروع می‌شوند را بررسی و اثبات می‌کنیم که $GMVI(f', K)$ با تابع f نیم‌پیوسته پائین شعاعی یک جواب $x^* \in \ker K$ دارد اگر و تنها اگر f در طول پرتوهایی که از x^* شروع می‌شود صعودی باشد ($f \in IAR(K, x^*)$) که $\ker K$ همان هسته‌ی مجموعه‌ی K است. همچنین نشان می‌دهیم که مجموعه جواب $GMVI(f', K)$ یک زیرمجموعه‌ی محدب و بسته‌ی شعاعی از $\ker K$ است و اگر $GMVI(f', K)$ یک جواب $x^* \in K$ داشته باشد، آنگاه x^* یک مینیمم سراسری از مسئله $\min\limits_{x \in K} f(x)$ است و وجود جواب ایجاب می‌کند که مجموعه ترازهای f ستاره‌گون باشند. علاوه بر این مشاهده می‌کنیم که مجموعه‌ای از مینیمم‌های سراسری از مسئله بهینه‌سازی مربوطه، هسته هستند و مجموعه جواب‌های نابرابری تغییراتی می‌توانند مختلف باشند و اگر تابع شبه‌محدب باشد این مجموعه‌ها بر هم منطبق می‌باشند. در فصل چهارم در بخش دوم بعضی از قضایای شبه‌یکنوایی و قضیه‌ی KKM را یادآوری می‌کنیم در بخش سوم بر روی نابرابری تغییراتی اسکالری و در بخش چهارم روی نابرابری تغییراتی برداری بحث می‌شود و در بخش پنجم نتایج پیشین را برای نابرابری تغییراتی از نوع دیفرانسیل پذیر به کار می بریم.

فصل ۱
مفاهیم و قضایای اولیه

در این فصل مفاهیم و قضایایی را که در طی فصل‌های بعد مورد نیاز می‌باشد بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۰.۱. گردایه τ از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد.

۱. $x \in \tau$ و $\emptyset \in \tau$

۲. هرگاه به ازای $i = 1, \cdots, n$ و $v_i \in \tau$ آنگاه $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \tau$.

۳. هرگاه $\{V_\alpha\}_\alpha$ گردایه دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارا یا ناشمارا) باشد، آنگاه $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \in \tau$.

هرگاه τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X را یک فضای توپولوژی و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X گوییم. همچنین زوج (X, τ) را یک فضای توپولوژیکی گوییم.

تعریف ۲.۰.۱. یک فضای برداری حقیقی مانند X با توپولوژی τ را یک فضای

توپولوژی برداری[۱] گوییم هرگاه:

(i) نگاشت $x+y \longrightarrow (x,y)$ از $X \times X$ به X پیوسته باشد

(ii) نگاشت $\lambda x \longrightarrow (\lambda,x)$ از $R \times X$ به X پیوسته باشد.

تعریف ۱.۰.۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژی برداری باشد، فضای تمام توابع خطی و پیوسته از X به $\mathbb{R}$ را فضای دوگان[۲] X می‌نامیم و آن را با X^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۰.۴. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد، یک نیم نرم[۳] روی X تابعی به صورت $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ می‌باشد به قسمی که برای هر $x,y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$

۱. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

یک نیم نرم، یک نرم نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم: $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

تعریف ۱.۰.۵. فضای توپولوژیک (X,τ) یک فضای هاسدورف[۴] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز x,y در X، دو مجموعه باز مجزا موجود باشد که یکی شامل x و دیگری شامل y باشد.

تعریف ۱.۰.۶. مجموعهٔ X را یک فضای متریک گویند هرگاه یک تابع $d : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشدکه در شرایط زیر صدق کند:

۱. $d(p,q) > 0$ هرگاه $p \neq q$ و $d(p,p) = 0$؛

۲. $d(p,q) = d(q,p)$.

[۱] Topological vector space
[۲] dual space
[۳] Semi norm
[۴] Hausdorff

۳. به ازای هر $r \in X$، $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$.

به ازای هر دو نقطه $p,q \in X$، $d(p,q)$ را فاصله p از q گویند.

مثال ۱.۰.۷. مجموعه X با توپولوژی گسسته یک فضای هاسدورف متریک است زیرا به ازای هر دو نقطه متمایز x,y می‌توان مجموعه‌های باز و مجزای $\{x\}$ و $\{y\}$ را مثال زد. هم‌چنین در حالت کلی هر فضای متریک یک فضای هاسدورف است.

تعریف ۱.۰.۸. فرض کنید X یک فضای برداری باشد یک ضرب داخلی[۵] روی X یک نگاشت $(x,y) \Longrightarrow \langle x,y\rangle$ از $X \times X$ به $\mathbb{C}$ است به طوریکه برای هر $a,b \in \mathbb{C}$ و $x,y,z \in X$ داریم:

(i) $\langle\ ax+by, z\rangle = a\langle x,y\rangle + b\langle y,z\rangle$

(ii) $\overline{\langle y,x\rangle} = \langle x,y\rangle$

(iii) به ازای هر x مخالف صفر در X، $\langle x,x\rangle \in (\circ, +\infty)$

(iv) اگر $\langle x,x\rangle = \circ$ باشد، آنگاه $x = \circ$ است.

یک فضای برداری مجهز به ضرب داخلی یک فضای پیش هیلبرت نامیده می‌شود.
یک فضای پیش هیلبرت و کامل نسبت به نرم $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ یک فضای هیلبرت[۶] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۰.۹. فرض کنید X یک فضای متریک و$F \subset X$ ،نقطه ی $x_\circ \in X$ را نقطه چسبیده به F نامیم هرگاه هر گوی به مرکز $x_\circ$ در Xحداقل یک نقطه از F را شامل شود.مجموعه ی تمام نقاط چسبیده بهF را با نماد $\overline{F}$ نمایش می دهند و بستار F[۷] نامیده می شود . به عبارت دیگر :

[۵] Inner product
[۶] Hilbert space
[۷] Closure

$$x_\circ \in \overline{F} \longleftrightarrow \quad \forall r; \quad B(x_\circ, r) \cap F \neq \emptyset$$

تعریف ۱۰.۰.۱. زیر مجموعه F را در فضای متریک Xچگال [۸] نامیم هرگاه $\overline{F} = X$ باشد.

تعریف ۱۱.۰.۱. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ را محدب[۹] گوییم هرگاه، برای هر $x, y \in K$ داشته باشیم:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

تعریف ۱۲.۰.۱. تابع $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ روی مجموعه محدب K، محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in K$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

تعریف ۱۳.۰.۱. تابع دیفرانسیل‌پذیر $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب‌نما[۱۰] است اگر برای $x, y \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$\langle \triangledown f(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(y) \geq f(x)$$

و شبه محدب[۱۱] است اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(y) \leq f(x) \quad \Longrightarrow \quad \langle \triangledown f(x), y - x \rangle \leq 0$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

تعریف ۱۴.۰.۱. زیرمجموعه K از فضای توپولویکی X را فشرده[۱۲] نامند هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیرپوشش متناهی باشد. یعنی اگر $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی برای K باشد

[۸] dense
[۹] convex
[۱۰] pseudocovex
[۱۱] quasi convex
[۱۲] compact

آنگاه $n\in\mathbb{N}$ای وجود دارد به قسمی که:

$$K\subset\bigcup_{k=1}^{n}G_{\alpha_k}$$

تعریف ۱.۰.۱۵. مجموعه مرکب از بردارهای $x_1,\cdots,x_k$ در یک فضای برداری (برای این مجموعه نماد $\{x_1,\cdots,x_n\}$ را به کار می‌بریم) را مستقل خطی گویند هرگاه

$$c_1x_1+\cdots+c_kx_k=0 \quad\Longrightarrow\quad c_1=\cdots=c_k=0$$

در غیراینصورت $\{x_1,\cdots,x_k\}$ را وابسته خطی گویند. توجه کنید که هیچ مجموعه مستقلی شامل بردار صفر نیست.

تعریف ۱.۰.۱۶. $K\subseteq\mathbb{R}^n$ را مخروط گوییم هرگاه برای هر $x\in K$ و هر $\lambda\geq 0$ داشته باشیم $\lambda x\in K$.

تعریف ۱.۰.۱۷. مخروط K را مخروط نوکدار[۱۳] گوئیم هرگاه

$$K\cap(-K)=\{0\}$$

تعریف ۱.۰.۱۸. تابع $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ تابع زیرخطی[۱۴] است اگر برای $x,y\in\mathbb{R}^n$

(i) $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ (خاصیت زیرجمعی[۱۵])

(ii) $f(\lambda x)=\lambda f(x),\lambda>0$ (خاصیت همگن مثبت[۱۶])

تعریف ۱.۰.۱۹. اگر E زیر مجموعه ای از فضای متریک (X,d) باشد آنگاه قطر E را با نماد $diamE$ نمایش داده و تعریف می کنیم:

$$diamE=sup\{d(x,y):\ x,y\in E\}$$

[۱۳] pointed cone
[۱۴] sublinear
[۱۵] subadditive property
[۱۶] positively Homogeneous property

تعریف ۱.۰.۲۰. اگر f یک تابع حقیقی مقدار تعریف شده روی فضای برداری X باشد، آنگاه

$$Df(x)(v) = \lim_{t \longrightarrow \circ^+} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

در صورت وجود، مشتق راست f در x در جهت v نامیده می‌شود و f در x مشتق‌پذیر راست است اگر $Df(x)(v)$ به ازای هر $v \in X$ موجود باشد.

تعریف ۱.۰.۲۱ (مشتق فرشه[۱۷])**.** اگر $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \cup \{+\infty\}$ آنگاه f را در $x_\circ$ مشتق‌پذیر گویند هرگاه یک عملگر خطی $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ موجود باشد که

$$\lim_{x \longrightarrow x_\circ} \frac{\|f(x)-f(x_\circ)-L(x-x_\circ)\|}{\|x-x_\circ\|} = \circ$$

L را با $f'(x_\circ)$ یا $Df(x_\circ)$ (ماتریس ژاکوبین) نمایش می‌دهند.

اگر $m = ۱$ آنگاه L را با $\bigtriangledown f(x_\circ)$ نمایش می‌دهند:

$$\bigtriangledown f(x_\circ) = (\frac{\partial f(x_\circ)}{\partial x_۱}, \cdots, \frac{\partial f(x_\circ)}{\partial x_n})$$

تعریف ۱.۰.۲۲. فرض کنید A یک مجموعه دلخواه در فضای برداری X باشد. غلاف محدب[۱۸] که با $conv(A)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از کوچکترین مجموعه محدب شامل A، به عبارت دیگر مقطع تمام مجموعه‌های محدب شامل A است.

تعریف ۱.۰.۲۳. مجموعه‌ای که هر خطی که از دو نقطه آن عبور می‌کند داخل مجموعه بیافتد را مجموعه‌ی آفین می‌نامیم و $affhC$ کوچکترین مجموعه آفین شامل C است که:

$$affh(C) = \{\sum_{i=۱}^{m} \lambda_i x_i; \quad x_i \in C, \quad \sum_{\substack{i=۱\\ i=۱,\cdots,m}}^{m} \lambda_i = ۱\}$$

تعریف ۱.۰.۲۴.

$$\triangle_n = \{(\lambda_\circ, \cdots, \lambda_n); \quad \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i = ۱, \quad \lambda_i \geq \circ, \quad i = ۱, \cdots, m\}$$

---

[۱۷] Frechet

[۱۸] convex hull

را سادک[۱۹] می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۰.۱. تابع $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ را در $x_\circ$ نیم‌پیوسته پائین[۲۰] گویند هرگاه

$$f(x_\circ)\leq \liminf_{x\longrightarrow x_\circ} f(x)$$

و f در $x_\circ$ نیم‌پیوسته بالایی[۲۱] است هرگاه:

$$f(x)\geq \limsup_{x\longrightarrow x_\circ} f(x)$$

تعریف ۲۶.۰.۱. به مجموعه‌ی زیر

$$Lev_c f=\{x\in K\ :\ f(x)\leq c\quad c\in\mathbb{R}\}$$

مجموعه تراز[۲۲] f می‌گویند.

قضیه ۲۷.۰.۱ (قضیه مقدار ماکسیمم وایرشتراس[۲۳])**.** تمام توابع پیوسته حقیقی روی مجموعه‌های فشرده sup و inf خود را اختیار می‌کنند.

لم ۲۸.۰.۱. فرض کنید $(H,\|\cdot\|)$ یک فضای هیلبرت و $\{C_n\}$ یک دنباله نزولی از زیرمجموعه‌های محدب بسته غیرتهی از H باشد. اگر $d=\sup\limits_n d(\circ,C_n)$ متناهی باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $x\in\cap C_n$ وجود دارد به طوریکه $\|x\|=d$ است.

اثبات. یادآوری :اگر$(H,\|\cdot\|)$ یک فضای هیلبرت باشد از تساوی متوازی الاضلاع نتیجه می شود که نرم$(\|\cdot\|)$ در H به طور یکنواخت محدب است به این معنی که اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله هایی در فضای هیلبرت باشند و دنباله های عددی $\|x_n\|$ ، $\|y_n\|$ و $\frac{1}{2}\|x_n+y_n\|$ همگرا به ۱ باشند آنگاه دنباله $\|x_n-y_n\|$ به ۰ میل می کند. فرض

[۱۹] simlplex
[۲۰] lower semicontinuous
[۲۱] upper semi continuos
[۲۲] level set
[۲۳] Weierstrass

کنید($P_n = C_n \cap B(\circ, d + \frac{1}{n})$ (B یک گوی به مرکز $\circ$ وشعاع $d + \frac{1}{n}$درفضای هیلبرت است.) برای هر $n = 1, 2, \ldots$ یک دنباله نزولی $\{P_n\}$ از مجموعه های غیر تهی،بسته محدب بدست می آوریم ونشان می دهیم که $\delta(P_n) \longrightarrow \circ$ که$\delta(P_n)$ قطر P_n است.در واقع به ازای هر nوجود دارد $x_n, y_n \in P_n$ به طوریکه$\delta(P_n) \leq \|x_n - y_n\| + \frac{1}{n}$ از طرفی نقطه $(x_n + y_n)\frac{1}{2}$نیز به P_nمتعلق است مقادیر $\|x_n\|$، $\|y_n\|$ و $\frac{1}{2}\|x_n + y_n\|$ بین $d(\circ, C_n)$ و$d + \frac{1}{n}$ قرار دارند بنابراین این سه دنباله به dهمگرا می باشند.با توجه به اینکه نرم محدب یکنواخت است پس $\|x_n - y_n\| \longrightarrow \circ$ ودر نتیجه $\delta(P_n) \longrightarrow \circ$ طبق قضیه کانتور یک نقطه یکتای $x \in \cap P_n$ وجود دارد که $d(\circ, C_n) \leq \|x\| \leq d + \frac{1}{n}$ که برای هرn، $\|x\| = d$ را نتیجه می دهد . □

تذکر ۲۹.۰.۱. به زیر فضاهای برداری از یک فضای برداری گاه زیرخمینه برداری گویند.

تعریف ۳۰.۰.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژی باشند تابع $f : X \longrightarrow Y$ زائد[۲۴] گفته می‌شود اگر برای هر مجموعه فشرده $J \subset Y$ یک مجموعه فشرده $K \subset X$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$f(X \setminus K) \subset Y \setminus J$$

یک تابع دو متغیره $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ زائد گفته می‌شود اگر یک ثابت $c > \circ$ وجود داشته باشد به طوریکه برای همه $x \in X$ داشته باشیم:

$$a(x, x) \geq c\|x\|^{2}$$

قضیه ۳۱.۰.۱ (قضیه براؤر[۲۵])**.** هر تابع پیوسته $F : B^{n+1} \longrightarrow B^{n+1}$ حداقل یک نقطه ثابت دارد.

[۲۴] coercive
[۲۵] Brouwer

اثبات. به منبع [۱۵] صفحه‌ی ۹۵ رجوع شود. $\square$

قضیه ۱.۰.۳۲ (قضیه هِلی[۲۶])**.** فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ تعداد متناهی از زیرمجموعه‌های محدب $\mathbb{R}^d$ باشد که $n > d$. اگر اشتراک هر $d+1$ از این مجموعه‌ها غیرتهی باشد آنگاه:

$$\bigcap_{j=1}^{n} X_j \neq \emptyset$$

برای تعداد نامتناهی که یک فرض فشردگی دارد: اگر $\{X_\alpha\}$ یک تعداد از زیرمجموعه‌های محدب فشرده از $\mathbb{R}^d$ و زیرگردایه[۲۷] بیشتر از $d+1$ اشتراک غیرتهی داشته باشد، آنگاه اشتراک کل غیرتهی دارد.

قضیه ۱.۰.۳۳ (قضیه کاراتئودوری[۲۸])**.** غلاف محدب هر مجموعه‌ای مانند P در فضای $\mathbb{R}^n$ به شکل ترکیب محدب حداکثر $(n+1)$ نقطه در آن مجموعه می‌باشد.

اثبات. فرض کنید x یک نقطه در غلاف محدب مجموعه P باشد آنگاه x یک ترکیب محدب از تعداد متناهی نقاط در P است. پس

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$$

که هر x_j در P است و هر λ_j مثبت است و $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ می‌باشد. فرض کنید $K > n+1$ آنگاه ب $x_2 - x_1, \cdots, x_k - x_1$ وابسته خطی هستند. بنابراین اعداد حقیقی $\mu_2, \cdots, \mu_k$ وجود دارد که همگی صفر نیستند به طوریکه:

$$\sum_{j=2}^{k} \mu_j (x_j - x_1) = 0$$

اگر μ_1 را با:

$$\mu_1 = -\sum_{j=2}^{k} \mu_j$$

[۲۶] Helly's theorem
[۲۷] sub collection
[۲۸] Caratheodory's theorem

تعریف کنیم آنگاه $\sum_{j=1}^{k} \mu_j x_j = 0$ و $\sum_{j=1}^{k} \mu_j = 0$ و همه‌ی μ_jها معادل صفر نیستند. بنابراین یکی از $\mu_j > 0$ است. پس برای هر α حقیقی داریم:

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^{k} \mu_j x_j = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \alpha\mu_j) x_j$$

در حالت خاص، اگر α به صورت زیر تعریف شود معادله برقرار خواهد شد:

$$\alpha := \min_{1 \le j \le kj} \left\{ \frac{\lambda_j}{\mu_j} \ : \ \mu_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

توجه کنید که $\alpha > 0$ و برای هر j بین ۱ و k ، $\lambda_j - \alpha\mu_j \ge 0$ می‌باشد. در حالت خاص با تعریفی که از α داشتیم $\lambda_i - \alpha\mu_i = 0$ است. بنابراین

$$x = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \alpha\mu_j) x_j$$

که هر $\lambda_j - \alpha\mu_j$ غیرمنفی است و مجموع آن ۱ می‌باشد و علاوه بر این $\lambda_i - \alpha\mu_i = 0$ است. به عبارت دیگر x مانند یک ترکیب محدب حداکثر $k - 1$ نقطه از P است. این مراحل تکرار می‌شود تا اینکه x به صورت ترکیب محدب حداکثر $n + 1$ نقطه از P بیان می‌شود. □

فصل ۲
نابرابری شبه تغییراتی برداری مینتی

در این فصل روابط میان جواب‌های نامساوی شبه تغییراتی برداری مینتی[۱] $(MVVLI)$ و جوابهای مسئله بهینه‌سازی برداری[۲] (VOP) و برخی روابط میان جواب‌های نابرابری شبه تغییراتی $(MVVLI)$ و نامساوی‌های شبه تغییراتی برداری استامپاخیا[۳] $(SVVLI)$ و همچنین روابط $(MVVLI)$ و نامساوی‌های شبه تغییراتی برداری اختلال یافته[۴] را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۲ مقدمات

فرض کنید $\mathbb{R}^n$ فضای اقلیدسی n بعدی و $\mathbb{R}^n_+$ زیرفضای غیرمنفی آن باشد. ضرب داخلی، فاصله‌ی خطی $x,y \in \mathbb{R}^n$ و درون آن را به ترتیب با $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ، $[x,y]$ و (x,y) مشخص می‌کنیم، K یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از $\mathbb{R}^n$، $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع برداری مقدار، $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ و l ,$i = ۱, \cdots$ توابع دیفرانسیل‌پذیر حقیقی مقدار و I مجموعه‌ی اندیس از $\{۱, \cdots, l\}$ باشند.

[۱] Minty vector variational-like inqualities
[۲] vector optimization problems
[۳] Stampacchia
[۴] perturbed

تعریف ۱.۱.۲. زیرمجموعه‌ی $K \subseteq \mathbb{R}^n$ را نسبت به η اینوکس[۵] گویند هرگاه تابع $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که

$$y + \lambda\eta(x,y) \in K \qquad \forall x,y \in K, \quad \lambda \in [0,1]$$

تعریف ۲.۱.۲. تابع $\eta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را پادمتقارن[۶] گویند اگر

$$\eta(x,y) + \eta(y,x) = 0, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه‌ی غیرتهی و اینوکس و $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد آنگاه:

(i) f را نسبت به ηشبه اینوکس[۷] گویند اگر و تنها اگر:

$$f(y + \lambda\eta(x,y)) \leq \max\{f(x), f(y)\} \qquad \forall x,y \in K, \quad \lambda \in [0,1]$$

(ii) f را نسبت به ηشبه اینوکس اکید[۸] گویند اگر

$$f(y + \lambda\eta(x,y)) < \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall x,y \in K, x \neq y, \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

(iii) f را نسبت به ηشبه اینوکس نیمه اکید[۹] گویند اگر و تنها اگر

$$f(y + \lambda\eta(x,y)) < \max\{f(x), f(y)\}, \quad \forall x,y \in K, \quad f(x) \neq f(y), \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

(iv) تابع دیفرانسیل‌پذیر f را اینوکس‌نما[۱۰] گویند اگر و تنها اگر

$$\langle \nabla f(x), \eta(y,x) \rangle \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(y) \geq f(x) \qquad \forall x,y \in K$$

[۵] invex
[۶] skew
[۷] quasinvex
[۸] strictly quasi-invex
[۹] semi-strictly quasi-invex
[۱۰] pseudoinvex