



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه ارشد ریاضی

عنوان

مسئله مکان یابی در مقیاس بزرگ

نگارش

اعظم نادعلی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی

دیماه ۱۳۹۰

کلیه حقوق اعم از چاپ و تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان نامه برای دانشگاه شهید بهشتی محفوظ است.
نقل مطالب با ذکر مأخذ آزاد است.

صفحة تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

سپاس، سزاوار بارگاه نورانی حضرت عالمتاب هستی، پروردگار عالمیان است که روشنی عقل را بر سیاهی نفس، پویایی فکر را بر خمودی نادانی و زیور آگاهی را بر زشتی جهل برتری داد. اینک که با یاری وی نگارش پایان نامه ام را به اتمام رسانده ام بر خود لازم می دانم از زحمات بزرگوارانی که با راهنمایی های خود سهم عظیمی در تدوین این پایان نامه داشته اند صمیمانه سپاسگذاری و قدردانی نمایم.

در ابتدا صمیمانه ترین تشکرها تقدیم به پدر و مادر و برادر عزیزم که همواره راهنما و مشوقم بوده اند و گذر از مشکلات زندگی ام به حول و قوه الهی و بدمن دعای خیر و برکت وجودشان، و بدون همکاری و یاریشان غیرممکن بود.

از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب دکتر احمد نزاکتی که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشته اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از استاد مشاور گرامی ام، دکتر حعفر فتحعلی که در تمام مراحل این پایان نامه مرا از نظرات و راهنمایی های سازنده و راهگشا و ارزنده شان بهره مند ساختند کمال سپاسگزاری را دارم. از اساتید محترم، دکتر علیرضا ناظمی و دکتر مهدی زعفرانیه که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

برخود لازم می دانم تا از کلیه اساتید گرانقدر دانشکده ریاضی که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، تشکر نمایم.

در نهایت از تمامی دوستان و همکلاسی ها و هم دانشکده ای های گرامی ام که در طول این مدت افتخار مصاحبت و همفکری با آنها را داشتم، صمیمانه سپاس گذاری می کنم.

چکیده

در چند دهه اخیر، توجه به مسائل محیطی و کاربردی افزایش پیدا کرده است. یکی از این نوع مسائل، مسائل مکان یابی است که شاخص مهمی در پیشرفت و صنعتی شدن یک جامعه می باشد. در بررسی مشاغل زود بازده مشخص شده است که بیش از ۵۰ درصد آنها در سال اول و حدود ۳۰ درصد آنها پس از دو سال ورشکسته می شوند با اینکه در آغاز راه اندازی این مشاغل تمام جوانب ارائه خدمات بررسی می شود ولی بی توجهی به مسئله مهم مکان سبب می شود که واحد تولیدی به سود دهی مورد نظر نرسد و از رسیدن به هدف خود باز بماند.

مسائلی مانند استقرار یک یا چند سرویس دهنده برای نقاط تقاضا که با توجه به تعداد متقاضیان کمترین هزینه و بیشترین سود را داشته باشد از این دسته از مسائل می باشند. همچنین مسائل پیچیده ای نظیر انتخاب محل استقرار یک فرودگاه، مراکز اورژانس، بیمارستان ها، نیروگاهها، مکان دفن زباله، شهر بازی، پایانه های حمل و نقل، آزمایشگاههای هسته ای، فروشگاههای زنجیره ای و... از مسائل مکان یابی در مقیاس بزرگ هستند.

در این پایان نامه به بیان و بررسی خطا در روش دسته بندی، یکی از روش های حل مسائل مکان یابی در مقیاس بزرگ می پردازیم.

در ابتدا مفاهیم اولیه مکان یابی و دسته بندی را تعریف می کنیم. همچنین در فصل ۲ این پایان نامه مفهوم خطا را بیان و راهکارهایی برای محدود کردن آن پیشنهاد می دهیم و در پایان فصل دو الگوریتم دسته بندی *MRC* و روش تعیین مرکز تلفن در مراکز مخابرات را بیان می کنیم. در فصل ۳ روش ابتکاری دسته بندی شش ضلعی و کاشی کاری با سه الگو و کاشی کاری با چند الگو را بررسی کرده ایم و در انتها در فصل چهارم روش جدید تقسیم متوالی مربعات را بیان و الگوریتم آن را شرح می دهیم، همچنین این روش را با روش ابتکاری شش ضلعی از لحاظ عددی مقایسه می کنیم.

واژه های کلیدی: مکان یابی - دسته بندی - خطا - p میانه - نماینده

فهرست مطالب

ذ	لیست جداول
ر	لیست تصاویر
۱	۱ مقدمه و مفاهیم اولیه
۲	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ مسئله وبر (۱- میانه)
۸	۱.۲.۱ فاصله
۹	۲.۲.۱ وزن
۹	۳.۲.۱ دوگان مسئله وبر
۱۱	۳.۱ دسته بندی
۱۶	۲ تکنیک دسته بندی و خطاهای حاصل از آن
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۷	۱.۱.۲ مسئله دسته بندی [۱۴]
۱۹	۲.۱.۲ خطای دسته بندی [۱۴]
۲۵	۲.۲ کران خطای دسته بندی در مسائل مکان یابی
۲۸	۳.۲ انواع خطاهای دسته بندی
۲۹	۴.۲ منابع خطای A, B, C [۵]
۳۲	۱.۴.۲ روش های حذف یا کم کردن خطاهای منبع A و B
۳۵	۲.۴.۲ الگوریتم دسته بندی MRC [۱۲]
۴۰	۵.۲ روش مجموع مربعات برای تعیین مرکز تلفن
۴۱	۱.۵.۲ طرز تعیین مرکز تلفن:
۴۷	۳ روش های ابتکاری چند ضلعی و کاشی کاری
۴۸	۱.۳ مقدمه
۴۸	۲.۳ روش های ابتکاری
۵۰	۳.۳ الگوریتم کاشی کاری (مش بندی) با سه الگو
۵۵	۴.۳ روش تولید نسل ها با تعمیم روش کاشی کاری

۵۵ تولید (ایجاد) نسل [۲۳]	۱.۴.۳
۵۷ الگوریتم کاشی کاری با چند الگو	۲.۴.۳
۶۸ الگوریتم کاشی کاری با شش الگو [۲۳]	۵.۳
۷۳	۴ روش ابتکاری تقسیمات متوالی مربعات	
۷۴ مقدمه	۱.۴
۷۴ روش تقسیم متوالی مربعات	۲.۴
۷۴ الگوریتم روش تقسیم متوالی مربعات	۱.۲.۴
۸۲ نتیجه گیری و پیشنهادات	۳.۴
۸۴		پیوست
۸۵		مراجع

لیست جداول

۷۸	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده	۱.۴
۷۸	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده	۲.۴
۷۹	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده	۳.۴
۷۹	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۱۰۰$ نماینده	۴.۴
۸۰	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۲۰۰$ نماینده	۵.۴
۸۰	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۲۰۰$ نماینده	۶.۴
۸۱	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده	۷.۴
۸۱	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده	۸.۴
۸۲	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده	۹.۴
۸۲	مقایسه خطا و زمان اجرای برنامه با $q = ۵۰۰$ نماینده	۱۰.۴

لیست تصاویر

۱۳	داده های تقاضای اولیه (دسته بندی نشده)	۱.۱
۱۴	داده های تقاضای دسته بندی شده	۲.۱
۲۱	داده های تقاضای دسته بندی شده	۱.۲
۲۹	دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع A	۲.۲
۳۰	دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع B	۳.۲
۳۱	دسته بندی داده ها برای شرح خطای منبع C	۴.۲
۳۲	خطای منبع A	۵.۲
۳۳	خطای منبع B	۶.۲
۳۶	روش دسته بندی سطر و ستون	۷.۲
۳۷	روش دسته بندی سطر و ستون	۸.۲
۳۸	مثال عددی برای روش دسته بندی MRC	۹.۲
۳۹	مثال عددی برای روش دسته بندی MRC	۱۰.۲
۴۰	مثال عددی برای روش دسته بندی MRC	۱۱.۲
۴۲	نقشه دانستیه پلان سطحی	۱۲.۲
۴۵	یافتن مرکز تلفن	۱۳.۲
۵۱	قانون کرانداری در روش ابتکاری	۱.۳
۵۲	کاشی کاری با سه الگو	۲.۳
۵۳	قانون کرانداری در روش ابتکاری در مثلث	۳.۳
۵۵	رابطه بین نسل های متوالی	۴.۳
۵۹	تصویر S_p^k وقتی $k = 1$ است	۵.۳
۶۸	الگوریتم کاشی کاری با شش الگو	۶.۳
۶۹	حالت های ممکن از تقاطع چند ضلعی ها که نقطه p را می پوشاند.	۷.۳
۷۵	نقاط تقاضا در صفحه	۱.۴
۷۶	مرحله اول الگوریتم تقسیم متوالی مربعات	۲.۴
۷۷	تقسیم متوالی مربعات	۳.۴

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

مسائل مکانیابی^۱، مسائلی هستند که وقتی به دنبال یافتن محل و نحوه استقرار بهینه یک یا چند فعالیت معین (سرویس دهنده)^۲ بر اساس عوامل و متغیرهای موثر بر مکانیابی هستیم، با آن‌ها روبرو می‌شویم. در این نوع مسائل فرض بر این است که تعدادی مشتری (نقاط تقاضا، سرویس گیرنده) موجودند و می‌خواهیم بهترین مکان را برای استقرار سرویس دهنده‌ها به گونه‌ای بیابیم که هزینه مینیمم شود. هزینه ممکن است بر حسب زمان، پول، تعداد سفر، مسافت کل، تعداد نیروی انسانی مورد نیاز یا هر مقیاس دیگری بیان شود.

مطالعات مکان‌یابی هم در سطح ملی و هم در سطح بین‌الملل بسیار مورد توجه قرار گرفته است. انجام مطالعات مکان‌یابی نیازمند تخصص‌هایی از جمله تحقیق در عملیات، روش‌های تصمیم‌گیری، مهندسی برق، مهندسی صنایع، جغرافیا (زمین‌شناسی و آب و هوا)، اقتصاد مهندسی، ریاضی، شهرسازی، بازاریابی، علوم کامپیوتر و ... می‌باشد.

مسائل مکانیابی از جمله مسائلی است که توجه بسیاری را به خود جلب کرده است و امروزه کاربردهای فراوانی دارد. از کاربرد های آن می‌توان به مکان‌یابی بیمارستان‌ها، انبارها، آتش‌نشانی، اورژانس، شعب بانک، دفاتر مالیاتی، پایگاه پلیس، شبکه جریان ترافیک، ایستگاه بازرسی وسایل نقلیه، مراکز تلفن، مراکز توزیع کالا، شهر بازی و غیره اشاره کرد.

زمان پیدایش مسائل مکان‌یابی به اوایل قرن هفدهم و مسئله‌ای که توسط فرما^۳ مطرح شد، برمی‌گردد. مسئله‌ای که فرما مطرح کرد به صورت زیر است:

فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را به گونه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن تا سه نقطه داده شده کمینه شود.

^۱Location problems

^۲Facility

^۳Fermat

در سال ۱۶۴۰ توریچلی^۴ مسئله فوق را حل کرد، به این دلیل نقطه بهینه را نقطه توریچلی و مسئله را مسئله فرما می نامند. روش های هندسی برای پیدا کردن این نقطه در سال (۱۷۱۰-۱۷۶۸) بوسیله توماس سیمپسون^۵ بیان شد. همچنین او یک بیان تعمیم یافته از مسئله فرما که در آن نقاط دارای وزن های متفاوت بودند را پیشنهاد داد.[۹]

نظریه مکان یابی به شکلی که امروزه مورد استفاده قرار می گیرد، با انتشار کتاب معروف آلفرد وبر^۶ در سال ۱۹۰۹ مطرح شد. [۲۷] بیست سال قبل از ارائه تئوری مکان یابی توسط وبر، لانهارد^۷ به طور جزئی تر به حل این مسئله پرداخته بود.

مسائل مکان یابی دارای تنوع بسیار زیادی هستند. به طور کلی مسائل مکان یابی از نظر تحلیلی در یکی از دسته های زیر قرار می گیرند .

۱- مسئله p - میانه:

۲.۱ مسئله وبر (۱- میانه)

فرض کنید n نقطه A_i ، $i = 1, \dots, n$ در صفحه موجود باشند و w_i وزن متناظر با نقطه A_i باشد. هدف یافتن نقطه ای مانند X به گونه ای است که مجموع وزنی فاصله نقطه X تا نقاط موجود در صفحه کمینه شود. یعنی اگر فاصله X تا A_i را با $d(X : A_i)$ نشان دهیم آن گاه مسئله به صورت زیر خواهد بود .

$$\min_X \sum_{i=1}^n w_i d(X, A_i)$$

مسئله وبر تعمیمی از مسئله فرما می باشد بنابراین به آن مسئله فرما - وبر نیز گفته می شود. چون در این مسئله هدف حداقل کردن هزینه کل (مجموع هزینه ها) است، به مسئله کمترین مجموع^۸

^۴Torricelli

^۵Thomas Simpson

^۶Alfred Weber

^۷Lanhart

^۸Minisum

و چون اولین بار توسط وبر مطرح شد به مسئله وبر معروف است. وایزفلد^۹ در سال ۱۹۳۷ یک روش تکراری برای حل مسئله وبر پیشنهاد کرد. [۲۸]

روش تکراری وایزفلد به صورت زیر است.

$$(x^{k+1}, y^{k+1}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i a_i}{d_i(x^{(k)}, y^{(k)})} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i}{d_i(x^{(k)}, y^{(k)})} \right)}, \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i b_i}{d_i(x^{(k)}, y^{(k)})} \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{w_i}{d_i(x^{(k)}, y^{(k)})} \right)} \right)$$

که در آن $d_i(x, y) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$ می باشد.

یک مثال ساده برای این مسئله یافتن مکان مناسب برای ایجاد انبار در یک شهر است. در این مثال وزن نقاط، نشان دهنده میزان نیاز آن نقاط است. همچنین هزینه حمل نیازهای مشتریان از انبار به نقاط مختلف شهر $A_i = (a_i, b_i)$ متناسب با فاصله مشتریان تا محل انبار می باشد. (x, y) مختصات محلی است که انبار در آن قرار گرفته است. هدف مینیمم کردن هزینه حمل و نقل کالاها از انبار به مشتریان می باشد.

اگر $d_i(x, y) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$ فاصله اقلیدسی بین نقاط (x, y) و (a_i, b_i) باشد، مسئله به صورت زیر بیان می شود.

$$\min_x \sum_{i=1}^n w_i d_i(x, y)$$

۲- مسئله p - مرکز: ۱۰

مسئله ۱ - مرکز:

فرض کنید n نقطه A_i ، $i = 1, \dots, n$ در صفحه موجود باشند و w_i وزن متناظر با نقطه A_i باشد، اگر هدف یافتن نقطه X به قسمی باشد که فاصله وزنی X تا دورترین نقطه Y موجود در صفحه مینیمم شود آن گاه مسئله به صورت زیر بیان می شود.

^۹ Weiszfeld

^{۱۰} p - center

$$\min_{x \in X} \max_{A_i} \{w_i d(X, A_i)\}$$

این مسائل برای تعیین مکان یک مرکز به منظور حداقل کردن حداکثر فاصله این مرکز، تا نقطه ای که برای سرویس دادن به آن نقطه تقاضا تعیین شده است، استفاده می‌شوند. در واقع این گونه مسائل برای استقرار خدمات اورژانسی مانند آتش‌نشانی، خدمات آمبولانس و مراکز پلیس در جامعه مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مسائل تعداد مراکز از قبل مشخص شده است. این مسائل به دو دسته تقسیم می‌شوند.

الف - مسئله p - مرکز محدب^{۱۱} که مساله را به مجموعه‌ای از مکان‌های کاندید برای استقرار مراکز محدود می‌کنند.

ب) - مسئله p - مرکز مطلق^{۱۲} که در آن مراکز می‌توانند در هر جایی از مکان مستقر شوند.

۳. مساله مکان یابی مراکز با ظرفیت نامحدود: $(UFLP)$ ^{۱۳}

این مسائل در دسته مسائل حداقل مجموع قرار می‌گیرند اما در این مسائل تابع هدف، هزینه ثابت را نیز شامل می‌شود. هزینه ثابت به مکانی بستگی دارد که مرکز در آن قرار می‌گیرد. در مسائل مکان یابی مراکز با ظرفیت نامحدود تعداد مراکزی که باید استقرار یابند از پیش مشخص شده نیست، اما به گونه‌ای معین می‌شوند که هزینه کل را مینیمم کنند. چون در این گونه از مسائل ظرفیت هر مرکز نامحدود در نظر گرفته می‌شود، تخصیص یک تقاضا به بیش از یک سرویس دهنده، هرگز مفید نخواهد بود.

۴. مساله مکان یابی مراکز با ظرفیت محدود $(CFLP)$ ^{۱۴}:

این مسائل شبیه به مسائل مکان یابی با ظرفیت نامحدود هستند با این تفاوت که در این گونه از مسائل ظرفیت هر کدام از مراکز محدود است. ممکن است در این مورد جواب بهینه به گونه‌ای پیدا

^{۱۱} P - center - convex

^{۱۲} P - center - absolute

^{۱۳} Location problems with unlimited capacity

^{۱۴} Location problems with limited capacity

شود که یک مشتری به بیش از یک سرویس دهنده، اختصاص داده شود. در واقع ممکن است بعد از تخصیص مشتری به یک مرکز و پس از برآوردن بخشی از تقاضای مشتری، ظرفیت مرکز به پایان برسد و برای برآوردن باقی مانده تقاضای مشتری مجبور به اختصاص آن به دیگر مراکز که هزینه بیشتری نیز دربر دارند، شویم. البته گاهی ممکن است با وجود اینکه اختصاص یک مشتری به یک مرکز ویژه کمترین هزینه را در بردارد، به دلیل اینکه ظرفیت آن مرکز توسط مشتریان دیگر پر شده است، مجبور به اختصاص کل تقاضای آن مشتری به مراکز دیگر شویم.

۵. مسائل تخصیص نمایی :

مسئله‌ای را بیان می‌کند که n مرکز مانند n ماشین که بین آنها جریان برقرار است به گونه‌ای در n مکان قرار داده شوند که هزینه کل مینیمم شود. اگر ۴ ماشین داشته باشیم که بخواهیم مستقر کنیم، ۴ ترکیب ممکن وجود خواهد داشت. برای مسئله ۲۰ ماشین، ۲۰ جواب ممکن وجود دارد که در حدود 2×10^{18} ارزیابی نیاز خواهد داشت که این کار حتی برای کامپیوترهای پرسرعت امروزی دشوار است. از این رو این مسایل در دسته مسایل بسیار پیچیده قرار دارند و حل دقیق آنها بسیار مشکل و یا غیر ممکن است.

مسائل مکان یابی، هدفهای مختلفی را دربردارند. [۸] هدفها در شناسایی و اولویت‌بندی معیارهای تصمیم‌گیری در یک مساله مکان‌یابی و زیر معیارهای (محدودیت) آنها، اهمیت و نقش مهمی دارند [۷]. در یک تقسیم‌بندی درنزر (۱۹۹۵) ^{۱۵}، هدفهای مسائل مکان‌یابی با رویکرد برنامه ریزی ریاضی و برحسب انواع تابع هدف، به سه دسته تقسیم شده‌اند: [۹].

۱. اهداف کششی ^{۱۶} :

این هدف‌ها اشاره به نزدیکی هر چه بیشتر محل استقرار سرویس دهنده‌ها به مشتریان و کم کردن مسافت دارند که شامل قدیمی‌ترین مسائل مکان‌یابی می‌شوند. در واقع مسائلی که تابع

^{۱۵}Drenzer

^{۱۶}pull

هدف آنها به صورت مینیمم سازی است، هدفهای کششی دارند. مثال ملموس برای این مورد یافتن مکان مناسب برای ساخت کارگاه ها و فروشگاه ها است که در آن هدف مینیمم کردن فاصله این محل ها از نقاط تقاضا (سرویس گیرنده ها، مشتریان) است.

۲. اهداف فشاری^{۱۷}:

این هدفها مسائل مکان یابی مراکز نامطلوب را در بر می گیرند و از اوایل دهه ۱۹۷۰ بوجود آمدند. هدف در این مسائل، حداکثر کردن فاصله مراکز جدید از مراکز موجود است. مدل هایی که برای این نوع هدف ها ارائه شدند بعدها به مدل های مکان یابی مضر^{۱۸} معروف شدند. مثال ملموس برای این نوع از مسائل، یافتن مکان مناسب برای دفن زباله است که در آن، یکی از هدف ها بیشینه کردن فاصله این مکان از مناطق مسکونی است.

۳. اهداف متعادل^{۱۹}:

هدف هایی هستند که تلاش در متعادل ساختن مسافت بین مراکز و مشتریان دارند و هدف اصلی آنها دستیابی به برابری است. این هدفها بیشتر در تصمیم گیری های عمومی و جایی که هدف برقراری عدالت بین افراد است، کاربرد دارند. مثال ملموس برای این دسته از مسائل متعادل کردن حجم کاری مراکز پلیس و یا مراکز اورژانس است که سبب متعادل شدن ارائه خدمات به متقاضیان می شود.

تعریف ۱.۲.۱. هر تابع حقیقی مقدار که روی یک فضای برداری مانند R^n تعریف شود و در شرایط زیر صدق کند نرم نامیده می شود.

$$۱) \quad \|X\| \geq 0, \quad \forall X \in R^n$$

$$۲) \quad \|X\| = 0 \implies X = 0$$

^{۱۷}Push

^{۱۸}Noxious Location Models

^{۱۹}Balancing

$$۳) \quad \|X\| = \|-X\| \quad \forall X \in R^n$$

$$۴) \quad \|tX\| = |t| \|X\| \quad \forall X \in R^n, \forall t \in R^n$$

$$۵) \quad \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad \forall X, Y \in R^n$$

نرم L_p بردار X به ازای $p \geq 1$ در فضای برداری R^n به صورت زیر تعریف می گردد.

$$L_p(X) = \|X\|_{t_p} = [\sum_{i=1}^n |x_i^p|]^{1/p}$$

نرم های منهن ^{۲۰}، اقلیدسی ^{۲۱} و چبیشف ^{۲۲} حالات خاصی از نرم های L_p هستند که ترتیب با قرار دادن $p = 1$ ، $p = 2$ و $p \rightarrow \infty$ بدست می آیند.

۱.۲.۱ فاصله

در مسائل مکان یابی نماد فاصله بسیار مهم و اساسی است. فرض کنید دو موقعیت که آنها را با u و v نشان می دهیم وجود داشته باشند. فاصله بین این دو نقطه را با $d(u, v)$ نشان می دهیم. ویژگی های زیر را در مورد فاصله در فضای متریک داریم.

$$۱ - d(u, v) = d(v, u)$$

$$۲ - d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

$$۳ - d(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v$$

$$۴ - d(u, v) = 0 \quad \implies \quad u = v$$

در این پایان نامه همه مسائل به جز الگوریتم MRC و روش مجموع مربعات که برای تعیین مرکز تلفن در مراکز مخابرات استفاده می شود، با نرم اقلیدسی در نظر گرفته شده است.

^{۲۰} Manhattan norm

^{۲۱} Euclidean norm

^{۲۲} Tehebycheff norm

۲.۲.۱ وزن

فاصله ها در تابع هدف می توانند دارای وزن های ^{۲۳} ثابت یا متغیر، یکسان یا مختلف باشند. وزن نقاط تقاضا(مشتریان) مشخص کننده میزان تقاضای آن نقاط می باشد. وزن نقاط می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد. در این پایان نامه وزن نقاط مثبت در نظر گرفته شده است. در مسائل شبکه ای، وزن یال می تواند نشان دهنده طول مسیر، زمان پیمودن یال و ارائه خدمات و مواردی از این قبیل باشد. همچنین وزن ها اهمیت جملات مختلف را در تابع هدف مسائل مکان یابی نشان می دهند.

۳.۲.۱ دوگان مسئله وبر

یک روش متفاوت برای پیدا کردن کمترین مجموع یا محل میانه ها حل دوگان ^{۲۴} مسئله است که اسکات ^{۲۵} در سال (۱۹۹۵) روی آن بحث کرده است و به صورت زیر می باشد.

$$\max_{u,v} D(u,v) = - \sum_i^n (a_i u_i + b_i v_i)$$

$$\sum_i^n u_i = 0$$

$$\sum_i^n v_i = 0$$

$$\sqrt{u_i^2 + v_i^2} \leq w_i$$

اولین بار حکیمی ^{۲۶} تابع هدف مسئله P میانه را به دو صورت کمترین مجموع و کمینه بیشینه مطرح کرد. [۱۸] او همچنین مطالعاتی بر روی مسائل مکان یابی روی شبکه انجام داد. همچنین

^{۲۳} Demand

^{۲۴} Dual

^{۲۵} Scott

^{۲۶} Hakimi

ارکات^{۲۷} و بوزکایا^{۲۸} مسئله برنامه ریزی صحیح را که ریول^{۲۹} و سوین^{۳۰} در سال ۱۹۷۰ بیان کردند را بسط دادند. این فرمول بندی اجازه می داد که مجموعه مکان هایی که برای سرویس دادن، کاندید می شوند از مجموعه ی نقاط تقاضا متمایز نباشند. به عبارت دیگر یک سرویس دهنده می تواند یکی از نقاط تقاضا نیز باشد یعنی هم به خود و هم به نقاط تقاضای دیگر سرویس دهد. در بسیاری از تحقیقات نیز این دو مجموعه یکسان فرض شده است.

اگر w_i وزن i امین نقطه تقاضا و p تعداد سرویس دهنده ها، همچنین d_{ij} فاصله بین نقطه تقاضای i ام و نقطه تقاضای j ام باشد. مسئله برنامه ریزی صحیح به صورت زیر بیان می شود:

$$\min Z = \sum_i \sum_j w_i d_{ij} x_{ij}$$

s.t

$$\sum_j x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}$$

$$\sum_j x_{jj} = p$$

$$x_{ij} = \{0, 1\}$$

$$x_{jj} = \{0, 1\}$$

در این مسئله اگر نقطه i به سرویس دهنده j ام اختصاص پیدا کند x_{ij} مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار ۰ می گیرد، همچنین اگر یک نقطه تقاضا سرویس دهنده نیز باشد به x_{jj} مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار ۰ اختصاص می یابد.

محدودیت $\sum_j x_{ij} = 1$ به این معنی است که یک مشتری فقط توسط یک سرویس دهنده،

سرویس دهی می شود.

^{۲۷}Erkut

^{۲۸}Bozkaya

^{۲۹}Revelle

^{۳۰}Swain

چون در این دسته از مسائل فرض کردیم که هر سرویس دهنده به خودش نیز سرویس دهی داشته باشد محدودیت $\sum_j x_{jj} = p$ را خواهیم داشت.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه X را در فضای E^n محدب^{۳۱} می نامیم هرگاه اگر $x_1, x_2 \in X$ آنگاه به ازای هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$.

$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ترکیب محدب x_1 و x_2 نامیده می شود. اگر $0 < \lambda < 1$ آنگاه این ترکیب را ترکیب محدب اکید x_1 و x_2 نامند.

۳.۱ دسته بندی

روش های بسیاری برای حل مسائل مکان یابی وجود دارد اما این روش ها وقتی تعداد داده ها زیاد است یعنی مکان یابی در مقیاس بزرگ انجام می شود دیگر پاسخگو نیست. در ساختار طراحی مدل های شهری، هر خانه (اقامتگاه خصوصی) می تواند یک نقطه تقاضا برای مسئله مکان یابی باشد. بنابراین میلیون ها نقطه تقاضا می تواند وجود داشته باشد.

اساس و پایه مدل های مکان یابی LA ^{۳۲}، p - میانه^{۳۳} است. [۱۰] در سی سال اخیر مدل p - میانه بیشتر روی طراحی مدل و روش های حل مسائل p - میانه و تکنیک های حل آن از منظر کاربردی متمرکز شده است. در بیشتر صنایع اطلاعات مشتریان معمولاً خیلی جزئی است و اغلب تعداد مشتری ها نیز زیاد است بنابراین مسئله p میانه متناظر با آن، بزرگتر و سخت تر می شود. روش های جدیدی برای حل این گونه مسائل ابداع شده که به روش های ابتکاری^{۳۴} معروف و حل مسئله را آسانتر نموده است.

^{۳۱}Convex set

^{۳۲}Location Allocation

^{۳۳}P-median problem

^{۳۴}Heuristic