بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم‌پایه

گروه ریاضی

روش‌های هموتوپی تکه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی

نگارش

مینا فولادوند

استاد راهنما

دکتر بهمن غضنفری

استاد مشاور

دکتر محمد خدابخشی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی‌ارشد

در رشته ریاضی‌کاربردی

آبان ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر و مادر عزیز و همسر مهربانم

قدردانی و تشکر

سپاس یزدان پاک را را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشه ی تیز گام در راه شناسایی او لنگ است و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ.

اکنون که با عنایت خداوند سبحان کار تدوین این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانی که در به ثمر رسیدن این پژوهش مرا همراهی نمودند تشکر و قدردانی کنم.

از زحمات بی دریغ استاد ارجمند، جناب آقای دکتر بهمن غضنفری که همواره از راهنمایی‌های بی دریغشان بهره مند بودم، صمیمانه تشکر می کنم.
همچنین از مشاور محترم این پایان‌نامه، جناب آقای دکتر خدابخشی کمال تشکر را دارم.
از اساتید گرانقدر، دکتر یاراحمدی و دکتر امیرقاسم غضنفری که مطالعه و داوری این پایان نامه را تقبل نمودند، سپاسگزارم.
در پایان از خانواده‌ی عزیزم، بخصوص پدر و مادر بزرگوار و همسر عزیزم که همواره همراه و مشوق من بوده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی میکنم و برای ایشان آرزوی توفیق و بهروزی دارم.

با احترام

مینا فولادوند

فهرست مندرجات

مقدمه **۱**

۱ تعاریف و مفاهیم پایه **۴**

۱.۱ مقدمه ۵

۲.۱ معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار آغازین ۵

۳.۱ هموتوپی در توپولوژی ۷

۴.۱ روش اختلال هموتوپی(HPM) ۸

۱.۴.۱ کاربرد روش اختلال هموتوپی در حل معادلات خطی ۹

۲.۴.۱ کاربرد روش اختلال هموتوپی در حل معادلات غیرخطی ۱۱

۲ فرمول‌بندی و تحلیل روش **۱۳**

۱.۲ مقدمه ۱۴

۲.۲ وجود و یکتائی ۱۴

۳.۲ روش تجزیه آدومیان (ADM) ۱۷

۱.۳.۲ تحلیل روش آدومیان ۱۷

۲.۳.۲ مثالی از کاربرد روش آدومیان ۱۸

۴.۲ روش اختلال هموتوپی تکه‌ای ۲۸

۱.۴.۲ مقدمه ۲۸

۲.۴.۲ تحلیل روش اختلال هموتوپی تکه‌ای ۲۹
۵.۲ روش‌های اختلال هموتوپی تکه‌ای - انطباقی ۳۳

۳ کاربرد روش اختلال هموتوپی تکه‌ای (PHPM) ۳۶
۱.۳ مقدمه ۳۷
۲.۳ روش‌های خطی‌سازی ۳۸
۱.۲.۳ مقدمه ۳۸
۲.۲.۳ تحلیل روش ۳۸
۳.۳ کاربرد روش ۴۱
۱.۳.۳ معادله‌ی یک سیستم دینامیکی ۴۱
۲.۳.۳ معادله‌ی نیروی دافینگ ۴۷
۳.۳.۳ معادله‌ی نوسانگر میرا ۵۰
۴.۳.۳ معادله‌ی نوسانگر دافینگ ۵۲
۵.۳.۳ معادله‌ی نوسانگر وان در پل ۵۴
۶.۳.۳ معادله‌ی یک پتانسیل مسطح ۵۷
۷.۳.۳ معادله‌ی یک پتانسیل کوانتوم ۵۹
۸.۳.۳ حل یک معادله دیفرانسیل غیر خطی ۶۱
۴.۳ نتیجه گیری ۶۶

ا انتگرال‌های مورد نیاز در مثال های متن ۶۸

ب واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۷۳

پ کتاب نامه ۷۶

لیست اشکال

۱.۳ جواب دقیق معادله‌ی (۱۰.۳.۳) در نزدیکی صفر ۴۳
۲.۳ جواب معادله‌ی (۱۰.۳.۳) در نزدیکی صفر به روش HPمعمولی ۴۴
۳.۳ جواب معادله‌ی (۱۰.۳.۳) در نزدیکی صفر به روش HPتکه‌ای ۴۵
۴.۳ مکان . معادله (۱۰.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۴۶
۵.۳ سرعت . معادله (۱۰.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۴۷
۶.۳ مکان . معادله (۱۶.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۴۸
۷.۳ سرعت . معادله (۱۶.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۴۹
۸.۳ مکان . معادله (۱۷.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۵۱
۹.۳ سرعت . معادله (۱۷.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۵۲
۱۰.۳ مکان . معادله (۱۸.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۵۳
۱۱.۳ سرعت . معادله (۱۸.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۵۴
۱۲.۳ مکان . معادله (۱۹.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۵۵
۱۳.۳ سرعت . معادله (۱۹.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۵۶
۱۴.۳ مکان . معادله (۲۰.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۵۷
۱۵.۳ سرعت . معادله (۲۰.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۵۸
۱۶.۳ مکان . معادله (۲۱.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۶۰
۱۷.۳ سرعت . معادله (۲۱.۳.۳) به روش HPتکه‌ای ۶۱
۱۸.۳ مکان . معادله (۲۲.۳.۳) به روش PHPبه ازای $\varepsilon = ۱$ ۶۲

۱۹.۳ سرعت . معادله (۲۲.۳.۳) به روش PHPبه ازای $\varepsilon = ۱$ ۶۳
۲۰.۳ مکان . معادله (۲۲.۳.۳) به روش PHPبه ازای $\varepsilon = ۵$ ۶۴
۲۱.۳ سرعت . معادله (۲۲.۳.۳) به روش PHPبه ازای $\varepsilon = ۵$ ۶۵

چکیده

نام خانوادگی : فولادوند **نام:** مینا	
عنوان پایان‌نامه: روش‌های هموتوپی تکه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی	
استاد راهنما: دکتر بهمن غضنفری **درجه تحصیلی:** دکتری **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیز عددی	
استاد مشاور: دکتر محمد خدابخشی **درجه تحصیلی:** دکتری **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** تحقیق در عملیات	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی	
محل تحصیل : دانشگاه لرستان **دانشکده:** علوم پایه **گروه آموزشی :** ریاضی	
تاریخ فارغ التحصیلی : آبان ماه ۱۳۸۹ **تعداد صفحه:** ۸۲	
کلید واژه ها : روش تجزیه ؛ تکنیک اختلال هموتوپی ؛ روش‌های تکه‌ای - انطباقی ؛ قضیه پیکارد ؛ معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم غیرخطی	
چکیده : در این پایان‌نامه، روش‌های اختلال هموتوپی تکه‌ای برای یافتن جواب معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به کار می‌روند. اساس کار این روش‌ها، معرفی یک پارامتر مصنوعی و بسط جواب به شکل یک سری توانی بر حسب این پارامتر است. این روش‌ها جواب‌های تحلیلی و همه‌جا هموار را در بازه های باز فراهم می‌آورند. در این پژوهش سه روش هموتوپی تکه‌ای - انطباقی ارائه می‌شود: استفاده از تعداد ثابتی از تقریب‌ها و طول‌گام متغیر، تعداد متغیری از تقریب‌ها و طول‌گام ثابت، تعداد متغیری از تقریب‌ها و طول‌گام متغیر. در پایان کاربرد برخی از این روش‌ها طی چند مثال مشاهده می‌شود.	

مقدمه

با گسترش سریع علوم غیرخطی در دو دهه‌ی اخیر، استقبال فزاینده‌ایی در میان دانشمندان و مهندسان نسبت به روش‌های تحلیلی حل مسائل غیرخطی به وجود آمده است. با وجود این که امروزه یافتن جواب مسائل خطی با استفاده از کامپیوتر بسیار ساده شده است، اما هنوز حل مسائل غیرخطی با استفاده از روش‌های عددی یا تحلیلی کار دشواری است. روش اختلال هموتوپی[۲] (HPM) نخستین بار در سال ۱۹۹۸ توسط هی[۱] [۸ - ۱] برای حل عددی معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال خطی و غیر خطی ارائه گردید. این روش تلفیقی از روش اختلال و هموتوپی توپولوژیکی است که مسئله‌ی اصلی را به یک مسئله‌ی ساده و قابل حل تبدیل می‌کند. این تکنیک به صورت مؤثر در حل مسائل غیرخطی معمولی[۱۰-۴] و جزئی[۷, ۱۱, ۱۲] ، معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال [۱۳] به کار می‌رود.

گرچه روش اختلال هموتوپی، پس از ابداع به عنوان یک روش جدید انگاشته شد اما پیش از آن در برخی تحلیل‌های عددی روشی به کار رفته است که در آن یک پارامتر معرفی می‌شود و این پارامتر از یک مقدار اولیه، به مقدار واقعی‌اش در مسئله‌ایی که مایل به حل آن هستیم افزایش می‌یابد [۱۷-۱۴].

روش اختلال هموتوپی جواب‌های سری را به دست می‌دهد؛ اما هنوز اثباتی جامع و کلی برای همگرائی این سری‌ها ارائه نشده است. اخیرا پژوهشگران [۲۰, ۲۱] نشان داده‌اند که روش تجزیه

[۲] Homotopy Perturbation method

[۱] He

آدومیان[1] [۲۴-۲۲] که برای یافتن جواب جبری معادلات دیفرانسیل معمولی وجزئی، معادلات دیفرانسیل تصادفی، معادلات انتگرال و ... ارائه شده است، می‌تواند از روش اختلال هموتوپی نتیجه شود. لذا این پژوهشگران ثابت کرده‌اند که حداقل برای معادلات دیفرانسیل معمولی، روش اختلال هموتوپی و تکنیک تجزیه معادلند. محققان [۲۰,۲۱] نشان داده‌اند که در روش تجزیه نیاز به کار کردن با معادله‌ی دیفرانسیل - انتگرال ولترا (که از انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم نتیجه می‌شود) نیست و فرمول‌بندی دیفرانسیلی ارائه کرده‌اند که معادل است با یک سیستم متشکل از دو معادله دیفرانسیل - انتگرال.

روش تجزیه و روش اختلال هموتوپی در مسائل مختلف، از جمله: مسئله‌ی انتقال گرما، دستگاه‌های نیم رسانا، انتشار موج خطی و غیرخطی، سولیتون‌ها، تبدیلات لاپلاس و ... کاربرد دارند. در معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، هر دو روش مذکور، به ویژه روش تجزیه، عملگر دیفرانسیلی را به دو بخش خطی و غیرخطی تقسیم می‌کند؛ از عملگر خطی انتگرال می‌گیریم به طوری که یک معادله‌ی انتگرال به دست آید و جواب را با استفاده از چندجمله‌ای‌های آدومیان، برای عبارات غیرخطی تعیین می‌کنیم. بنابراین روش تجزیه ، یک تکنیک تحلیلی است که یک سری جواب را به دست می‌دهد.

معادل بودن روش اختلال هموتوپی و روش تجزیه، حداقل برای معادلات دیفرانسیل معمولی، ایجاب می‌کند که هر دو روش محدودیت‌های یکسان داشته باشند، به طور مثال: وجود عبارت‌های اختلالی در سری جواب [۲۵,۲۶]، همگرائی کند سری‌های جواب در برخی حالات [۲۷] و دشوار بودن اثبات همگرائی روش برای معادلات در حالت کلی. بویژه بحث همگرائی سری‌های حاصل از روش تجزیه مورد توجه و بررسی محققان زیادی بوده است و هر یک از آنها به طریقی به بررسی این موضوع پرداخته‌اند[۴۱ -۳۰].

علاوه بر اینکه اثبات همگرائی سری جواب دشوار است، برای یک دنباله نیز هیچ ضمانتی مبنی بر اینکه تعداد متناهی از عبارات، تقریب خوبی برای جواب باشد وجود ندارد.

عبارت‌های اختلالی، عباراتی هستند که در جملات متوالی سری جواب که از روش تجزیه

[1] Adomian's decomposition method

به دست آمده است، ظاهر می‌شوند اما هنگام تعیین سری جواب نهائی، یکدیگر را خنثی می کنند. آدومیان و ریچ[1][۲۵]، یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی غیر همگن را مورد بررسی قرار دادند و نتیجه گرفتند که عبارات اختلالی به دلیل غیرهمگن بودن معادله ایجاد شده‌اند، اما، واز واز[2][۲۶]، اظهار داشته که اگر عبارات اختلالی در دو عبارت نخست سری جواب ظاهر شوند، این سری به سرعت همگرا خواهد شد و وجود جواب دقیق در نخستین عبارت سری، یک شرط لازم برای وجود عبارت‌های اختلالی است. بعلاوه، وی نشان داده است که عبارات غیرمحذوف تقریب مرتبه ی اول، بایستی در معادله دیفرانسیل مبدأ صدق کنند. واز واز[۲۹]، اصلاحی از روش تجزیه آدومیان را ارائه کرده است که در آن عبارات غیرهمگن معادله دیفرانسیل، در دو عبارت قرار می‌گیرند و این دو عبارت به گونه ای انتخاب شده‌اند که عبارات اختلالی در سری جواب وجود نداشته باشند. محققان[۴۷]، نشان داده‌اند که شرط واز واز، یک شرط لازم نیست و حضور عبارات اختلالی در سری جواب روش تجزیه، بسته به عملگر خطی‌ایی است که برای دست‌یابی به جواب انتخاب شده است. همچنین در برخی حالات روش تجزیه حتی در غیاب عبارات اختلالی سری جوابی را ایجاد می‌کند که به کندی همگراست[۲۷]. در چنین شرایطی لزوم دست‌یابی به روشی که محدودیت کمتر و کارائی بیشتری را داشته باشد احساس می‌شود. در این پژوهش این هدف را با ارائه روشی شامل تعداد متناهی از عبارات در سری جواب حاصل از روش‌های اختلال هموتوپی و طول‌گام های مختلف دنبال می‌کنیم.

این پژوهش به صورت زیر سازماندهی شده است:

پس از تعاریف مقدماتی برخی مسائل مربوط به وجود و یکتائی جواب معادلات دیفرانسیل معمولی مقدار آغازین بیان می‌شود. سپس روش تجزیه را ارائه نموده و نشان می‌دهیم که روش تجزیه نیز یک تکنیک اختلال هموتوپی است و نیز نشان می‌دهیم که روش یکتائی برای استفاده از روش تجزیه وجود ندارد. سپس این نتایج را برای به دست آوردن روش اختلال هموتوپی تکه ای بکار می‌گیریم، در پایان از این نتایج برای تعیین جواب چند معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی استفاده می‌کنیم و پژوهش با خلاصه ای از نتایج مهم به دست آمده خاتمه می‌یابد.

[1] Adomian and Rach

[2] Wazwaz

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور مختصر به مفاهیمی که در مطالعه‌ی این پایان‌نامه مورد نیاز هستند، اشاره می‌کنیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار آغازین

بسیاری از مسائل مهم و برجسته‌ی مهندسی، علوم طبیعی و علوم اجتماعی وقتی به زبان ریاضی فرمول‌بندی شوند، به معادله‌ای می‌انجامند که شامل مشتق یا مشتق‌هایی از یک تابع مجهول هستند. به طور کلی هر رابطه بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می‌نامیم. معادلات دیفرانسیل را می‌توان به طور عمده به دو دسته‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی تقسیم کرد.

تعریف ۱.۲.۱. اگر y تابعی مجهول از متغیر مستقل x و $y^{(n)}$ نمایش مشتق مرتبه nام آن باشد، آنگاه معادله‌ی

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (۱.۲.۱)$$

یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی[۱] (ODE) نامیده می‌شود. منظور از مرتبه‌ی یک معادله‌ی دیفرانسیل، بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در آن معادله است، بنابراین معادله‌ی (۱.۲.۱) یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه n است.

[۱] Ordinary Differential Equation

تعریف ۲.۲.۱. هر معادله شامل یک تابع مجهول مانند y، چند متغیر مستقل و مشتقات جزئی تابع نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی[۱] (PDE) می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. اگر در رابطه‌ی (۱.۲.۱) بتوانیم تابع f را به صورت ترکیبی خطی از مشتق‌های y، یعنی به شکل

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}(x) + r(x) \qquad (2.2.1)$$

بنویسیم، که در آن $r(x)$ و $a_i(x)$ها توابعی پیوسته از x هستند، معادله‌ی دیفرانسیل (۱.۲.۱) خطی و در غیر این صورت غیرخطی نامیده می‌شود. اگر $r(x) = 0$ این معادله همگن است، و اگر $r(x) \neq 0$ یک معادله‌ی غیرهمگن داریم.

متداول‌ترین معادلات دیفرانسیل ، معادلات مرتبه ی اول و دوم می باشند. صورت کلی معادلات مرتبه دوم به شکل $F(x, y, y'') = 0$ است. به طور مثال:

$$y''(x) = A(x)y'(x) + B(x)y^2(x) + f(x), \quad a < x < b \qquad (3.2.1)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم غیر خطی است.

تعریف ۴.۲.۱. اگر به معادله‌ی (۳.۲.۱) شرایط اولیه‌ی $y(a) = \alpha$ و $y'(a) = \beta$ را اضافه کنیم (a، α و β اعداد حقیقی دلخواه هستند)، معادله دیفرانسیل حاصل، یک مسئله‌ی مقدار آغازین[۲] (IVP) نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. عملگر خطی: فرض کنید اعمال عملگر L بر $f_1(x),\ f_2(x),\ c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ تعریف شده باشد (c_1 و c_2 ثابت های دلخواه هستند) اگر :

$$L(c_1f_1(x) + c_2f_2(x)) = c_1L(f_1(x)) + c_2L(f_2(x))$$

آنگاه L را عملگر خطی می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. قاعده ی لایب نیتز[۳]: هرگاه $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$ و $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ تابعی پیوسته

[۱] Partial Differential Equation
[۲] Initial Value Problem
[۳] Leibnitz's rule

از x و t باشد آنگاه:

$$\frac{dF}{dx} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + f(x, b(x))\frac{db(x)}{dx} - f(x, a(x))\frac{da(x)}{dx}$$

۳.۱ هموتوپی در توپولوژی

تعریف ۱.۳.۱. یک توپولوژی[۱] روی مجموعه‌ی ناتهی X، گردایه‌ی τ از زیر مجموعه‌های X است که دارای خواص زیر می‌باشد:

i) X و ϕ عضو τ هستند.

ii) اجتماع هر زیر گردایه از اعضای τ عضو τ است.

iii) اشتراک هر زیر گردایه متناهی از اعضای τ متعلق به τ است.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی τ، فضای توپولوژیک نامیده می‌شود. عناصر τ مجموعه های باز نامیده می‌شوند.

تعریف ۳.۳.۱. اگر X و Y فضاهای توپولوژیک باشند، نگاشت $F : X \to Y$ پیوسته است هرگاه تصویر معکوس هر مجموعه باز در Y مجموعه ای باز در X باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $I = [۰, ۱]$ بازه‌ی واحد حقیقی و X و Y فضاهای توپولوژیک و f و g دو نگاشت پیوسته از فضای X به توی فضای Y باشند، گوئیم نگاشت‌های f و g هموتوپیک اند هرگاه نگاشت پیوسته‌ای مانند: $F : I \times X \to Y$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر x از X:

$$F(۰, x) = f(x), \qquad F(۱, x) = g(x)$$

و نگاشت F را هموتوپی[۲] بین f و g می‌نامیم.

[۱] Topology
[۲] Homotopy

۴.۱ روش اختلال هموتوپی(HPM)

معادله‌ی دیفرانسیل غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$L(u) + N(u) = F(r), \qquad r \in \Omega \tag{۴.۴.۱}$$

با شرایط مرزی:

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = \circ, \qquad r \in \Gamma \tag{۵.۴.۱}$$

که در آن L یک عملگر خطی و N یک عملگر غیر خطی است. B عملگر مرزی، F(r) تابع تحلیلی معلوم و Γ مرز دامنه‌ی Ω است و n بردار قائم بر Γ است.

تکنیک اختلال هموتوپی " هی " هموتوپی: $v(r,p) : \Omega \times [\circ, ۱] \to R$ را معرفی میکند که در رابطه‌ی:

$$H(v,p) = (۱-p)[L(v) - L(u_\circ)] + p[L(v) + N(v) - F(r)] = \circ, \tag{۶.۴.۱}$$

یا

$$H(v,p) = L(v) - L(u_\circ) + pL(u_\circ) + p[N(v) - F(r)] = \circ, \tag{۷.۴.۱}$$

صدق میکند که در آن $r \in \Omega$ و $p \in [\circ, ۱]$ پارامتر نشاننده و $u_\circ$ تقریب آغازین جواب است که در شرایط مرزی صدق می‌کند. از معادلات (۶.۴.۱) و (۷.۴.۱) واضح است که:

$$H(v,\circ) = L(v) - L(u_\circ) = \circ, \tag{۸.۴.۱}$$

$$H(v,۱) = L(v) + N(v) - F(r) = \circ \tag{۹.۴.۱}$$

تغییر مقدار p از 0 تا 1 معادل این است که $v(r,p)$ از $u_\circ$ تا $u(r)$ تغییر می‌کند. در توپولوژی این فرآیند، دگردیسی[۱] نامیده می‌شود و $L(v) - L(u_\circ)$ و $L(v) + N(v) - F(r)$ هموتوپیک خوانده

[۱] Deformation

می‌شوند.

اساس کار بر این فر ض استوار است که جواب معادلات (۶.۴.۱) و (۷.۴.۱) بصورت یک سری توانی از p است:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots \qquad (10.4.1)$$

لذا جواب تقریبی معادله‌ی (۱) بصورت زیر است:

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \qquad (11.4.1)$$

۱.۴.۱ کاربرد روش اختلال هموتوپی در حل معادلات خطی

معادله‌ی دیفرانسیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u' + 2tu = 2t\exp(-t^2), \qquad (12.4.1)$$

با شرط آغازین:

$$u(0) = 0, \qquad (13.4.1)$$

با در نظر گرفتن هموتوپی (۷.۴.۱)، هموتوپی زیر را تشکیل می دهیم:

$$u' + p[2tu - 2t\exp(-t^2)] = 0, \qquad (14.4.1)$$

معادله (۱۰.۴.۱) و شرط آغازین (۱۳.۴.۱) را در هموتوپی (۱۴.۴.۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \cdots)' + p[2t(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + p^3u_3 + \cdots)\\ -2t\exp(-t^2)] = 0\end{aligned}$$

حال ضرایب توانهای یکسان p را در دو طرف معادله برابر قرار می دهیم تا به مجموعه معادلات دیفرانسیل خطی زیر برسیم :

$$p^0 : u_0' = 0, \qquad\qquad u_0(0) = 0,$$

$$p^1 : u_1' + 2tu_0 = 2t\exp(-t^2), \qquad u_1(0) = 0,$$

$$p^2 : u_2' + 2tu_1 = 0, \qquad\qquad u_2(0) = 0,$$

$$p^3 : u_3' + 2tu_2 = 0, \qquad\qquad u_3(0) = 0,$$

$$\vdots$$

بنابراین با حل معادلات فوق، چند مؤلفه‌ی نخست جواب اختلال هموتوپی برای معادله‌ی(۱۲.۴.۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$u_0 = 0,$$

$$u_1 = 1 - \exp(-t^2),$$

$$u_2 = 1 - t^2 - \exp(-t^2),$$

$$u_3 = 1 - t^2 + t^4/2 - \exp(-t^2),$$

$$u_4 = 1 - t^2 + t^4/2 - t^6/6 - \exp(-t^2),$$

$$\vdots$$

به همین ترتیب می توان سایر مؤلفه های جواب اختلال هموتوپی را به دست آورد. اگر عبارات بیشتری محاسبه شوند می توان نشان داد که جواب به $u(t) = t^2\exp(-t^2)$ همگراست.

$$(u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \Rightarrow$$

$$u = 0 + (1 - e^{-t^2}) + (1 - t^2 - e^{-t^2}) + (1 - t^2 + t^4/2 - t^6/6 - e^{-t^2}) +$$

$$(1 - t^2 + t^4/2 - t^6/6 + t^8/24 - e^{-t^2}) + \cdots$$

$$= 5 - 5e^{-t^2} - 4t^2 + 3t^4/2 - 2t^6/6 + t^8/24 + \cdots$$

با جایگذاری: $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$ داریم:

$$u = t^2 - t^4 + t^6/2 - t^8/6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+2}}{n!} = t^2 e^{-t^2})$$