**وزارت علوم، تحقیقات و فناوری**

**دانشگاه دامغان**

**دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر**

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

# رویکرد چندجمله ای چبیشف برای حل رده ای از معادلات انتگرالی دیفرانسیلی فردهلم - ولترا خطی

توسط:

**هماپورشفیع**

استاد راهنما:

**دکتر امید سلیمانی فرد**

استاد مشاور:

**دکتر اکبر هاشمی برز آبادی**

**تیر 1391**

بسم الله الرحمن الرحیم

**وزارت علوم، تحقیقات و فناوری**


**دانشگاه دامغان**

**دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر**


پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

# رویکرد چندجمله ای چبیشف برای حل رده ای از معادلات انتگرالی دیفرانسیلی فردهلم - ولترا خطی


توسط:

**هما پورشفیع**

استاد راهنما:

**دکتر امید سلیمانی فرد**

استاد مشاور:

**دکتر اکبر هاشمی برز آبادی**


**تیر 1391**

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند و آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

# سپاسگزاری

ای هستی بخش وجود مرا بر نعمات بی کرانت توان شکر نیست. الهی مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران

حال که توفیق جمع آوری و تهیه این مجموعه را یافته ام بر خود واجب می دانم از تمامی عزیزانی که در طی این پروژه از راهنمایی و یاریشان بهره مند گشته ام تشکر و قدردانی نمایم. ابتدا صمیمانی ترین تقدیرها تقدیم به پدر و مادر عزیزم   همواره حامی و مشوقم بوده اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی ام بدون دعای پر خیر و برکت وجودشان غیر ممکن بود. از مساعی بی دریغ جناب آقای دکتر امید سلیمانی فرد که قبول زحمت نمودند و راهنمایی این پایان نامه را به عهده گرفتند تشکر می نمایم. و از استاد مشاورم جناب آقای دکتر هاشمی که در این پایان نامه مراهمراهی کردند و از آقایان دکتر طبسی و دکتر قاسمیان که زحمت مطالعه این پایان نامه را بر خود هموار نموده اند و داوری آن را بر عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

# فصل اول

# تعاریف و مفاهیم مقدماتی در معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی

## 1-1 مقدمه

در این فصل ابتدا به بیان برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی در مورد چند جمله ای چبیشف[1] و معادلات انتگرالی می پردازیم. در ادامه به دسته بندی معادلات انتگرالی خواهیم پرداخت. این مفاهیم در فصل های بعدی مورداستفاده قرار خواهند گرفت.

**تعریف 1.1.1** چند جمله ای $T_n(x)$ بر بازه $[-1,1]$ را چند *جمله ای چبیشف* گوئیم اگر

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

با فرض $x = \cos\theta$، داریم $T_n(x) = \cos n\theta$ از طرفی با توجه به اتحاد

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta \cos n\theta$$

داریم:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \qquad (1.1)$$

به عبارت دیگر،

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \dots$$

[1] Chebyshev

با استفاده از رابطه بازگشتی (1.1) و$T_0(x)=1$، $T_n(x)$ ها را می توان به دست آورد. اکنون صفر های $T_n(x)$ را که نقاط هم محلی[2] چبیشف نامیده می شوند. برای این منظور داریم :

$$T_n(x)=\cos n\theta=0 \Rightarrow n\theta=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta=\frac{2k+1}{2n}\pi$$

حال با توجه به اینکه $x=\cos\theta$، نقاط هم محلی چبیشف $T_n(x)$ عبارتند از :

$$x_k=\cos\left[\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\pi\right], \qquad k=0,1,2,\dots,n-1.$$

**تعریف 2.1.1** چند جمله ای $T_n^*(x)$ بر بازه $[0,1]$ را که به صورت $T_r^*(x)=T_r(2x-1)$ تعریف می شود چند *جمله ای* چبیشف *تغییر یافته* می نامیم در این صورت نقاط هم محلی عبارتند از

$$x_s=\frac{1}{2}(1+\cos(\frac{s\pi}{N})), \qquad s=0,1,\dots,N$$

**تعریف 3.1.1** یک *معادله دیفرانسیل خطی مرتبه* $n$ ، به صورت زیر است

$$a_n(x)\frac{d^n(y)}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}(y)}{dx_{n-1}}+\dots+a_0(x)y=g(x)$$

که در آن ضرایب $a_i(x)$ $(i=0,1,\dots,n)$ و $g(x)$ توابعی از $x$ هستند و می توانند ثابت باشند.هر معادله دیفرانسیل که به صورت فوق نباشد غیر *خطی* نامیده می شود.

**تعریف 4.1.1** *معادله انتگرالی- دیفرانسیلی* یک نوع از معادله تابعی است که شامل یک انتگرال و مشتق از تابع مجهول است که معادلات انتگرالی – دیفرانسیلی فردهلم و ولترا از این نوع معادلات هستند. این معادلات در بخش های بعدی توضیح داده شده است.

---

[۲] Collocation point

## 2-1 تاریخچه معادلات انتگرالی

از دیدگاه بوچر[3] در سال 1914، معادله انتگرالی برای اولین بار توسط دو بویز ریموند[4] در سال 1888 تعریف وبه معادلاتی اطلاق شد که تابع مجهول $\phi(x)$ تحت انتگرال ظاهر می شود. هر چند، تاریخ معادلات انتگرالی به دوران لاپلاس[5] بر می گردد. لاپلاس در سال 1782 از تبدیل انتگرال زیر

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xs}\varphi(s)ds$$

برای حل معادلات خطی و معادلات دیفرانسیل استفاده نمود. فوریه[6] نیز در سال 1822 برای حل مسائل هدایت گرمایی با استفاده از سری های مثلثاتی، فرمول های زیرکه معروف به تبدیلات فوریه سینوسی و کسینوسی هستند استفاده کرد:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin x\phi(s)ds \tag{2.1}$$

که در آن

$$\phi(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xsf(x)dx \tag{3.1}$$

و

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xs\phi(s)ds \tag{4.1}$$

که در آن

$$\phi(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos xsf(x)dx \tag{5.1}$$

تبدیل فوریه سینوسی (3.1) و تبدیل فوریه کسینوسی (5.1) به ترتیب جواب های $\phi$ از معادلات انتگرالی (2.1) و (4.1) را بر حسب تابع مجهول $f(x)$ به دست می آورند.

در سال 1826، آبل[7] در مسائل فیزیکی به یک معادله انتگرالی نظیر

$$f(x)=\int_a^x (x-a)^{-\alpha}\phi(s)ds,$$

---

[3] Bocher

[4] Du Bois- Reymond

[5] Laplac

[6] Fourier

[7] Able

که بعد ها به نام او نامگذاری شد، دست یافت که درآن $f(x)$ تابعی پیوسته، با فرض $f(a)=0$ ، $0<a<1$ می باشد. یک معادله انتگرالی از نوع

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x k(x-s)\phi(s)ds$$

که در آن $\phi(s)$ تابعی مجهول می باشد و متغیر به عنوان یکی از حدود انتگرال ظاهر می شود، توسط پواسن[8] در سال 1826 در نظریه مغناطیس به کار برده شد. در واقع پواسن این معادله را با بسط $\phi(s)$ در توان های پارامتر $\lambda$ بدون در نظر گرفتن همگرایی این سری حل کرد . اثبات همگرایی این سری توسط لیوویل[9] 1837صورت گرفت. در سال 1870 نیومن[10] با تبدیل یک مسئله دیریکله به یک معادله انتگرالی، نقش موثری در تکامل معادلات انتگرالی داشت. در سال 1896 پوانکاره[11] معادله انتگرالی را در ارتباط با یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مطرح نمود. در همان سال دانشمند ایتالیایی به نام ولترا[12] برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرالی را مطرح نمود. صورت کلی معادله انتگرالی ولترا به صورت زیر است:

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,s)\phi(s)ds.$$

تلاش فراوانی برای ابداع روش های کلاسیک و عددی حل معادلات انتگرالی صورت گرفت و مقالاتی در این زمینه بین سالهای 1963-1987 ارائه شد که از آن جمله می توان به مقالات مشهور فیلیپس، تیخونوف[13] و همکاران اشاره کرد.

در واقع کاربرد معادلات انتگرالی را می توان در زمینه های فیزیک، مکانیک، ارتباطات، ... و نیز نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مشاهده نمود.برای مطالعه بیشتر تاریخچه معادلات انتگرالی منابع [5, 8, 9,11] را ببینید .

## 1-3 تعریف و دسته بندی معادلات انتگرالی

**تعریف 1.3.1** معادله ای که تابع مجهول $\phi(s)$ تحت علامت انتگرال ظاهر می شود را معادله انتگرالی می نامند. حالت کلی یک معادله انتگرالی به صورت زیر است :

$$h(x)\phi(x) = f(x) + \lambda\int k(x,s,\phi(s))ds,$$

---

[8] Poisson
[9] Liouvile
[10] Neumann
[11] Poincare
[12] Volterra
[13] Tikhono

که در آن $f(x)$ تابعی معلوم می باشد و $k(x,s,\phi(s))$ هسته معادله انتگرالی نامیده می شود و $\lambda \neq 0$ عددی حقیقی یا مختلط می باشد.

معادلات انتگرالی یکی از مفیدترین ابزار در بسیاری از شاخه های آنالیز محض از قبیل آنالیز تابعی و فرآیند های تصادفی هستند . روش های عددی گوناگونی برای حل این نوع معادلات از قبیل روش های کوادراتور، روش های هم محل[14] و گالرکین، روش های تقریب متوالی و تغییر متغیر و غیره وجود دارند.

به طور کلی معادلات انتگرالی به دو دسته خطی و غیر خطی طبقه بندی می شوند که به طور مختصر به شرح آن ها می پردازیم.

**الف)** *معادلات انتگرالی خطی* به معادلاتی اطلاق می شود که تابع مجهول تحت علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می شود. فرم کلی این نوع معادلات به صورت زیر است :

$$h(x)\phi(x) = f(x) + \lambda \int k(x,s)\phi(s)ds \qquad (6.1)$$

که خطی بودن معادله (6.1) را می توان به صورت زیر ثابت کرد .

$$\int k(x,s)(c_1\phi_1(s) + c_2\phi_2(s))ds = c_1\int k(x,s)\phi_1(s) + c_2\int k(x,s)\phi_2(s)ds.$$

**ب)** *معادلات انتگرال غیر خطی* به معادلاتی اطلاق می شود که تابع مجهول تحت علامت انتگرال به صورت غیر خطی ظاهر می شود. فرم کلی این معادلات به صورت زیر است :

$$h(x)\phi(x) = f(x) + \lambda \int k(x,s,\phi(s))ds.$$

دو نوع از معادلات انتگرالی به نام معادلات انتگرالی ولترا و فرد هلم[15] می باشند. این دو نوع از معادلات انتگرالی مجموعه های متفاوتی از مسائل را نشان می دهند و به روش های متفاوتی برای حل نیاز دارند. معادلات انتگرالی ولترا و فردهلم به ترتیب نمایش مسائل اولیه ومرزی می-باشند. در ادامه به اختصار به معرفی این نوع معادلات می پر دازیم.

**تعریف 2.3.1** به معادلاتی که دامنه انتگرال گیریشان ثابت باشد *معادلات انتگرالی فرد هلم* گفته می شود که فرم کلی آن ها به صورت زیر است :

$$h(x)\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,s)\phi(s)ds,. \qquad (7.1)$$

---

۱۴ Collocation Method

۱۵ Fredholm

در معادله (7.1) اگر $h(x)=0$ باشد معادله انتگرالی فردهلم نوع اول نامیده می شود، و اگر $h(x)=1$ باشد، به آن معادله انتگرالی نوع دوم گفته می شود . و اگر $h(x)\neq 0,1$ باشد، در حالت کلی، معادله انتگرالی نوع سوم نامیده می شود.

**تعریف 3.3.1** به آن دسته از معادلاتی که حد بالای انتگرال گیری آن متغیر می باشد *معادلات انتگرالی ولترا* گفته شده و فرم کلی آن در حالت خطی به صورت زیر است :

$$h(x)\phi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x k(x,s)\phi(s)ds$$

که هانند معادلات انتگرالی فرد هلم شامل نوع اول، دوم و سوم می باشند .

بدیهی است که معادلات انتگرالی ولترا حالت خاصی از معادلات انتگرالی فردهلم می باشند، کافی است $k(x,s)$ را وقتی $s>x$ باشد مساوی صفر قرار دهیم.

# فصل دوم

# روش چبیشف برای یک نوع از معادلات انتگرالی- دیفرانسیلی فردهلم خطی مرتبه بالا

## 2-1 مقدمه

در این فصل با به کارگیری چند جمله ای چبیشف و نقاط هم محلی، یک روش عددی برای حل رده ای از معادلات انتگرالی- دیفرانسیلی فردهلم خطی [16] ارائه می دهیم. ابتدا روابط ماتریسی مربوط به چند جمله ای چبیشف را که در فصل های بعدی نیز کاربرد فراوانی دارند، بیان می کنیم، سپس معادله انتگرالی- دیفرانسیلی را معرفی کرده و در بخش بعدی روابط ماتریسی مربوط به معادله را نوشته و با استفاده از این روابط به حل معادله می‌پردازیم . در انتها با ارائه چند مثال و مقایسه جواب های به دست آمده از این روش با جواب واقعی دقت روش را نشان می دهیم .

## 2-2 معرفی معادله

**تعریف 1.2.2** یک معادله انتگرالی- دیفرانسیلی فردهلم خطی مرتبه $m$ تحت شرایط مرزی- اولیه به صورت زیر تعریف می شود :

$$\sum_{k=0}^{m} p_k y^{(k)} = g(x) + \lambda \int_{-1}^{1} K(x,t) y(t) dt, \qquad -1 \le x,t \le 1 \qquad (1.2)$$

تحت شرایط مرزی- اولیه

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{ik} y^{(k)}(-1) + b_{ik} y^{(k)}(0) + c_{ik} y^{(k)}(1)) = \lambda_i, \qquad i = 0,1,2,\ldots,m-1 \qquad (2.2)$$

[۱۶] Fredholm Integral- differential equation

که در آن $\lambda_i$ و $\lambda$ , $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}$, $p_k$ $(k=0,1,2,\ldots,m)$, ضرایب ثابت هستند. که جواب بر حسب چندجمله ای چبیشف به صورت زیر نوشته می شود.

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}{}' a_n T_n(x), \qquad T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x), \qquad -1\le x\le 1 \tag{3.2}$$

که $a_n$ ها ، ضرایب چبیشف هستند.

## 3-2 ماتریس بنیادی مربوط به معادله

از آنجایی که هدف، یافتن جواب تقریبی $y(x)$ در معادله (1.2) بر اساس سری چبیشف مختوم به فرم $y(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x)$ است که در آن $a_n$ ها ضرایب مجهول چبیشف و $T_n(x)$ چند جمله ای چبیشف نوع اول است، سعی داریم که این سری را به صورت ماتریسی نشان دهیم.
برای این منظور معادله (1.2) را به صورت زیر نویسیم :

$$D(x)=g(x)+\lambda I(x) \tag{4.2}$$

که

$$D(x)=\sum_{k=0}^{m} p_k y^{(k)}(x) \tag{5.2}$$

و

$$I(x)=\int_{-1}^{1} K(x,t)y(t)dt \tag{6.2}$$

اکنون روابط ماتریسی مربوط به $y(x)$، مشتق مرتبه $k$ - ام $y(x)$، $I(x)$، $D(x)$ و شرایط ترکیبی (2.2) را به فرم ماتریسی می نویسیم.

### 1-3-2 رابطه ماتریسی برای قسمت دیفرانسیلی

ابتدا فرم ماتریسی جواب تقریبی $y(x)$ از معادله (1.2) را به وسیله سری چبیشف مختوم (3.2) تعریف شده است به صورت زیر می نویسیم :

$$y(x)=\mathbf{T}(x)\mathbf{A} \tag{7.2}$$

که در آن

$$\mathbf{T}(x)=[T_0(x) \quad T_1(x) \quad \ldots \quad T_N(x)] \qquad \text{و} \qquad \mathbf{A}=[\tfrac{1}{2}a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_n]$$

از طرفی بین $T(x)$ و $T^1(x)$ رابطه ماتریسی به صورت زیر وجود دارد :

$$\mathbf{T}^{1}(x) = \mathbf{T}(x)\mathbf{J}^{T} \qquad (8.2)$$

که $T^{1}(x)$ مشتق مرتبه اول $T(x)$ است .

اگر $N$، زوج باشد

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2.3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 0 & 2.4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2.5 & 0 & 2.5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2N & 0 & 2N & 0 & \dots & 2N & 0 \end{bmatrix}$$

واگر $N$، فرد باشد،

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2.3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 0 & 2.4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2.5 & 0 & 2.5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ N & 0 & 2N & 0 & 2N & \dots & 2N & 0 \end{bmatrix}$$

از رابطه (8.2) و روابط بازگشتی زیر داریم :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(2)}(x) &= \mathbf{T}^{(1)}(x)\mathbf{J}^{T} = \mathbf{T}(x)(\mathbf{J}^{T})^{2} \\ &\vdots \\ \mathbf{T}^{(k)}(x) &= \mathbf{T}^{(k-1)}(x)\mathbf{J}^{T} = \mathbf{T}(x)(\mathbf{J}^{T})^{k} \end{aligned} \qquad (9.2)$$

بنا به روابط (7.2)و (9.2) رابطه ماتریسی زیر به دست می آید :

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) &= \mathbf{T}^{(k)}(x)\mathbf{A} \\ y^{(k)}(x) &= \mathbf{T}(x)(\mathbf{J}^{T})^{k}\mathbf{A}, \quad k = 0,1,2,\dots,m \end{aligned} \qquad (10.2)$$

با جایگذاری عبارت (10.2) در (5.2) رابطه ماتریسی زیر را به دست می آوریم :

$$D(x)=\sum_{k=0}^{m} p_k \mathbf{T}(x)(\mathbf{J}^T)^k \mathbf{A} \tag{11.2}$$

## 2-3-2 رابطه ماتریسی برای قسمت انتگرالی

اگر تابع هسته $K(x,t)$، دارای بسط تیلوراز در جه $N$در نقطه $x=0$ و $t=0$ باشد ،یعنی

$$K(x,t)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\bar{k}_{nm}x^n t^m$$

که در آن

$$\bar{k}_{nm}=\frac{1}{n!m!}\frac{\partial^{n+m}K(0,0)}{\partial x^n \partial t^m}; \qquad n,m=0,1,2,\dots,N$$

بنابراین فرم ماتریسی تابع $K(x,t)$ عبارت است از [10] ،

$$K(x,t)=X(x)\overline{K}X^T(t) \tag{12.2}$$

که در آن

$$\mathbf{X}(t)=[1 \quad t \quad \dots \quad t^N] \quad ، \quad \mathbf{X}(x)=[1 \quad x \quad \dots \quad x^N] \qquad \overline{\mathbf{K}}=[\bar{k}_{nm}].$$

از طرفی، تقریب تابع هسته $K(x,t)$به کمک سری چبیشف مختوم از درجه $N$ برابر است با :

$$K(x,t)=\sum_{l=0}^{N}{}'\sum_{s=0}^{N}{}' k_{ls}T_l(x)T_s(t) \qquad l,s=0,1,2,\dots,N.$$

بنابراین فرم ماتریسی تابع $K(x,t)$به صورت زیر به دست می آید :

$$K(x,t)=\mathbf{T}(x)\mathbf{K}\mathbf{T}^T(t) \tag{13.2}$$

که در آن

$$\mathbf{K}=[k_{ls}]$$

$$\mathbf{X}(x)=\mathbf{T}(x)\mathbf{D}^T \tag{14.2}$$

که اگر $N$ زوج باشد،

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}\frac{\binom{N}{\frac{N}{2}}}{2^{N-1}} & 0 & \frac{\binom{N}{\frac{N-2}{2}}}{2^{N-1}} & 0 & \dots & 0 & \frac{\binom{N}{0}}{2^{N-1}} \end{bmatrix}$$

و اگر $N$ فرد باشد ،

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{\binom{N}{\frac{N-1}{2}}}{2^{N-1}} & 0 & \frac{\binom{N}{\frac{N-3}{2}}}{2^{N-1}} & \dots & 0 & \frac{\binom{N}{0}}{2^{N-1}} \end{bmatrix}$$

از روابط (12.2) و (13.2) ، رابطه ماتریسی زیر به دست می آید :

$$\mathbf{T}(x)\mathbf{K}\mathbf{T}^{T}(t)=\mathbf{X}(x)\overline{\mathbf{K}}\mathbf{X}^{T}(t),$$

با جایگذاری رابطه (14.2) در رابطه فوق، رابطه زیر به دست می آید :

$$\mathbf{T}(x)\mathbf{K}\mathbf{T}^{T}(t)=\mathbf{T}(x)\mathbf{D}^{T}\overline{\mathbf{K}}\mathbf{D}\mathbf{T}^{T}(t)\Rightarrow \mathbf{K}=\mathbf{D}^{T}\overline{\mathbf{K}}\mathbf{D}$$

از تساوی فوق، برای به دست آوردن ضرایب ماتریس $K$، در معادله (13.2) استفاده می-شود.

با جایگذاری فرم ماتریسی (7.2) و (13.2) در عبارت (6.2) رابطه ماتریسی زیر به دست می-آید :

$$I(x) = \int_{-1}^{1} \mathbf{T}(x)\mathbf{K}\mathbf{T}^T(t)\mathbf{T}(t)\mathbf{A}dt = \mathbf{T}(x)\mathbf{KQA} \qquad (15.2)$$

که عناصر $(l, s = 0,1,2,\ldots,N)$ $q_{l,s}$از ماتریس $Q$به صورت زیر تعریف می شود [4] :

$$\mathbf{Q} = \int_{-1}^{1} \mathbf{T}^T(t)\mathbf{T}(t)dt = [q_{l,s}], \qquad l,s = 0,1,2,\ldots,N$$

که در آن

$$q_{l,s} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-(l+s)^2} + \dfrac{1}{1-(l-s)^2} & l+s \quad even \\ 0 & l+s \quad odd \end{cases}$$

## 3-3-2 رابطه ماتریسی برای شرایط مرزی – اولیه

با جایگذاری رابطه (10.2) در رابطه (2.2)، فرم ماتریسی شرایط معادله به صورت زیر به دست می آید :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left[a_{ik}T(-1) + b_{ik}T(0) + c_{ik}T(1)\right](J^T)^k A = \left[\lambda_i\right], \qquad i = 0,1,2,\ldots,m-1. \qquad (16.2)$$

## 4-3-2 رابطه ماتریسی تابع $g(x)$

برای نمایش ماتریسی تابع $g(x)$، ابتدا تابع $g(x)$ از معادله (1.2) را براساس سری چبیشف مختوم و تیلور به ترتیب، به صورت زیر می نویسیم :

$$g(x) = {\sum_{n=0}^{N}}' g_n T_n(x) = \mathbf{T}(x)\mathbf{G}, \qquad (17.2)$$

که در آن

$$\mathbf{G} = [\frac{1}{2}g_0 \quad g_1 \quad \ldots \quad g_N]^T$$

و

$$g(x) = \sum_{n=0}^{N} \bar{g}_n x^n = \mathbf{X}(x)\overline{\mathbf{G}}, \qquad (18.2)$$

که در آن

$$\bar{g}_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}, \qquad \overline{\mathbf{G}} = [\bar{g}_0 \quad \bar{g}_1 \quad \ldots \quad \bar{g}_N]^T$$

به ترتیب، رابطه بین ماتریس $\mathrm{G}$ و $\overline{\mathbf{G}}$، با جایگذاری رابطه (14.2) در (18.2) و مساوی قراردادن با (17.2) به صورت زیر نوشته می شود :

$$\mathbf{G} = \mathbf{D}^{T}\overline{\mathbf{G}}$$

بنابراین فرم ماتریسی تابع $g(x)$ به صورت زیر به دست می آید :

$$g(x) = \mathbf{T}(x)\mathbf{D}^{T}\overline{\mathbf{G}} \tag{19.2}$$

## 4-2 پیاده سازی روش عددی

برای حل معادله انتگرالی- دیفرانسیلی فردهلم، ماتریس بنیادی مربوط به معادله را می‌نویسیم، به این صورت که با جایگذاری روابط (11.2)، (15.2) و (19.2) در معادله (4.2) داریم :

$$\left\{\sum_{k=0}^{m}\mathbf{P}_{k}(\mathbf{J}^{T})^{k} - \lambda\mathbf{KQ}\right\}\mathbf{A} = \mathbf{G} \tag{20.2}$$

که در آن

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{T}\mathbf{KD} \qquad \text{و} \qquad \mathbf{G} = \mathbf{D}^{T}\overline{\mathbf{G}}.$$

بنابراین به معادله ماتریسی بنیادی مربوط به معادله (1.2) دست یافتیم که آن را به صورت زیر می توان نشان داد :

$$\mathbf{WA} = \mathrm{G} \tag{21.2}$$

که

$$\mathbf{W} = [w_{p,q}] = \sum_{k=0}^{m}\mathbf{P}_{k}(\mathbf{J}^{T})^{k} - \lambda\mathbf{KQ} \qquad\qquad p,q = 0,1,2,\ldots,N$$

چون باید جواب تقریبی معادله (1.2) را تحت شرایط (2.2) به دست آوریم، فرم ماتریس بنیادی مربوط به (2.2) را که در بخش 3.2.2 به دست آوردیم به اختصار به صورت زیر می نویسیم

$$\mathbf{U}_{i}\mathbf{A} = [\lambda_{i}] \quad \text{یا} \quad [\mathbf{U}_{i};\lambda_{i}] \quad \ldots\ldots \; i = 0,1,2,\ldots,m-1 \tag{22.2}$$

که در آن

$$\mathbf{U}_i = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik}\mathbf{T}(-1) + b_{ik}\mathbf{T}(0) + c_{ik}\mathbf{T}(1)](\mathbf{J}^T)k = [u_{i0} \quad u_{i1} \quad \dots \quad u_{iN}],$$

اکنون سطرهایی از ماتریس (22.2) را با $m$ سطر آخر از ماتریس (21.2) جایگزین می کنیم و به ماتریس افزوده زیر می رسیم

$$[\widetilde{\mathbf{W}};\widetilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \dots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & w_{(N-m)2} & \dots & w_{(N-m)N} & ; & g(x_{(N-m)N}) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \dots & u_{0N} & ; & \lambda_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} & ; & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{(m-1)0} & u_{(m-1)1} & u_{(m-1)2} & \dots & u_{(m-1)N} & ; & \lambda_{(m-1)} \end{bmatrix}$$

اگر $rank\,\widetilde{\mathbf{W}} = rank[\widetilde{\mathbf{W}};\widetilde{\mathbf{G}}] = N + 1$، می توان نوشت

$$\mathbf{A} = (\widetilde{\mathbf{W}})^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}$$

یعنی ماتریس ضرایب چبیشف مشخص می شود و اگر این مقادیر را در سری چبیشف مختوم قرار داده و $y(x)$ را به دست می آوریم با فرض که$rank\,\widetilde{\mathbf{W}} = rank[\widetilde{\mathbf{W}};\widetilde{\mathbf{G}}] \langle N + 1$، دستگاه می تواند دارای یک جواب خاص باشد و اگر $rank\,\widetilde{\mathbf{W}} \neq rank[\widetilde{\mathbf{W}};\widetilde{\mathbf{G}}]$، دستگاه فاقد جواب است. اگردر معادله (1.2) $\lambda = 0$ باشد، معادله به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه بالا تبدیل می شود. اگر برای$k \neq 0$، $P_k = 0$ باشد، معادله به یک معادله انتگرالی فردهلم تبدیل می-شود.

## 5-2 جواب های چندجمله ای چبیشف توسعه یافته

روش ارایه شده را می توان به مسایلی در بازه $[0,1]$ نیز توسعه داد :

$$\sum_{k=0}^{m} P_k y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t) y(t)\,dt, \qquad -1 \le x,t \le 1 \qquad (23.2)$$

که جواب بر حسب چندجمله ای چبیشف تغییر یافته $T_n^*(x)$ به فرم زیر است

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N}{}' a_n T_n^*(x) \qquad 0 \le x \le 1$$

که

$.T_n^{*}(x) = T_n(2x-1)$

که با پیروی از بخش های قبلی، معادله ماتریسی اصلی برای معادله (23.2) به فرم زیر است

$$\left\{\sum_{k=0}^{m} P_k 2^k (J^T)^k - \lambda K^* Q^*\right\} A = G^*$$

به طوری که

$$Q = 2Q^* \quad , \quad G^* = D^{*T}\overline{G} \;\; , \;\; K^* = D^{*T}\,\overline{K} D^* \quad , \quad T^{*(k)} = 2^k T^*(x)(J^T)^k,$$

که

$$D^* = \begin{bmatrix} 2^0\binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2^{-2}\binom{2}{1} & 2^{-1}\binom{2}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2^{-4}\binom{4}{2} & 2^{-3}\binom{4}{3} & 2^{-3}\binom{4}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 2^{-6}\binom{6}{3} & 2^{-5}\binom{6}{4} & 2^{-5}\binom{6}{5} & 2^{-5}\binom{6}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{-2N}\binom{2N}{N} & 2^{-2N+1}\binom{2N}{N+1} & 2^{-2N+1}\binom{2N}{N+2} & 2^{-2N+1}\binom{2N}{N+3} & \cdots & 2^{-2N+1}\binom{2N}{2N} \end{bmatrix}$$

از آنجایی که سری چبیشف مختوم $y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x)$، یک جواب تقریبی معادله (1.2) است لذا اگر تابع $y_N(x)$ و مشتقاتش در معادله ی (1.2) قرار داده شوند معادله ی حاصل باید"تقریبا"برقرار باشد. لذا برای

$$x = x_q \in [-1,1] \qquad , \qquad q = 0,1,2,\dots \; .$$

خطای مطلق برابر است با :

$$E(x_q) = \left| \sum_{k=0}^{m} P_k y_N^{(k)}(x_q) - g(x_q) - \lambda \int_{-1}^{1} K(x_q,t) y_N(t) dt \right| \cong 0.$$