بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

نامساوی‌هایی در مورد شعاع عملگری اقلیدسی و شعاع عددی عملگرها بر یک فضای هیلبرت

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ابوالفضل کلانتری

استاد راهنما: دکتر جمال رویین

مرداد ۸۷

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

خدای بزرگ را شاکرم که در همه حال لطفش را از بنده‌ی حقیر دریغ نکرده و یاریم کرد تا نگارش این پایان‌نامه به اتمام برسد. از پدر و مادر و خانواده‌ی عزیزم که در طول تحصیل مشوّق واقعی من بودند و دلگرمیم به آن‌هاست، صمیمانه متشکرم. از استاد عزیزم جناب دکتر رویین به خاطر زحمات بی‌دریغ ایشان در امر تعلیم تقدیر نموده و از صمیم قلب تشکر می‌نمایم. همچنین از دوستان خوبم: شفیع‌زاده، عبادی، بهرمندپور، کوشکی و دوستانی که اسامی آن‌ها ذکر نشد که لحظات به یادماندنی با آن‌ها سپری کردم، متشکرم.

در پایان از تمامی اساتید بخش ریاضی که افتخار شاگردی آن‌ها را داشتم تشکر نموده و از پروردگار متعال سلامتی و سعادت آن‌ها را خواستارم.

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا برد عددی عملگر T روی فضای هیلبرت H را معرفی و مفاهیم و خواص آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس شعاع عددی عملگر T ($w(T)$) را تعریف کرده و نشان می‌دهیم شعاع عددی و نرم عملگری با هم معادلند:

$$w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T).$$

در ادامه، روابط میان شعاع عددی ، نرم عملگری و شعاع طیفی را برای عملگرهای خاص مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم، شعاع عددی زیرجمعی بوده ولی زیرضربی نیست. درادامه‌ی مطالب، شعاع عملگری اقلیدسی را معرفی کرده و نشان می‌دهیم یک نرم در $B^2(H)$ تشکیل می‌دهد.

از نامساویی که فؤاد کیتانه[1] در سال (۲۰۰۵) [۱۹]، ارائه داده، استفاده کرده و نتایجی که کیتانه برای شعاع عملگری اقلیدسی دو عملگر به دست آورده را توسیع می‌دهیم. سپس به روابطی بین شعاع عملگری اقلیدسی، شعاع عددی و نرم عملگری پرداخته و با قرار دادن قیودات جدید روی نرم، نامساوی‌های خاصی را به دست می‌آوریم. همچنین در بخشی نیز به روابط میان عملگرهای (α, β)—نرمال و شعاع عددی می‌پردازیم.

سرانجام، نامساوی شوارتز را در مورد عملگرهای مثبت به کار برده و شعاع عددی برای یک عملگر را تعمیم می‌دهیم. در آخر چند نتیجه‌ی جدید که تعمیمی از شعاع عملگری اقلیدسی است را، بیان می‌کنیم.

---

[1] F. Kittaneh

فهرست

۳ نامساوی‌هایی برای شعاع عملگری اقلیدسی از دو عملگر در فضای هیلبرت

۴ نامساوی‌هایی برای نرم و شعاع عددی از ترکیب عملگرها در فضاهای هیلبرت

۵ نامساوی‌هایی برای عملگرهای مثبت و تعمیم نامساوی‌های شعاع عددی

مقدمه

برد عددی یک عملگر روی فضای نرمدار خطی توسط جی. لومر[۱] و اف.اف. بونسال[۲] توسعه یافت. برای یک عنصر از فضای باناخ واحددار این سؤال مطرح شد که آیا طیف را می‌توان توسط برد عددی تقریب زد؟ این سؤال توسط بونسال و جی. دانکن [۳] جواب داده شد. در ادامه ریاضی‌دانانی همچون: جی. دانکن [۴]، جی. ویلیامز[۵]، پالمر[۶] گوستافسون[۷]، پوپسکیو[۸]، بوزانو[۹]، کیتانه[۱۰]، دراگومیر[۱۱] و مصلحیان [۱۲] به توسعه‌ی این بخش از ریاضی پرداختند.

در این پایان‌نامه به خواص مهم برد عددی از جمله: تقریب طیف توسط برد عددی، محدب بودن، قضیه‌ی توپولیتز هاسدورف و زیرجمعی بودن برد عددی می‌پردازیم و با تعریف شعاع عددی روی $B(H)$ روابط این نرم با نرم عملگری مطرح شده و معادل بودن این دو نرم نشان داده می‌شود. همچنین با تعریف نرم شعاع عملگری اقلیدسی روی $B^2(H)$، روابط میان این نرم و دو نرم قبلی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و با طرح قضایای مختلف شعاع عددی و شعاع عملگری اقلیدسی برای عملگرهای مختلف تعمیم داده می‌شود.

در فصل اول ابتدا فضای هیلبرت و فضای نرمدار خطی را معرفی کرده و به بیان خواص و قضایای مربوط به آن‌ها می‌پردازیم سپس جبر باناخ را تعریف کرده و با مفاهیمی همچون همئومورفیسم، مجموعه‌ی عناصر معکوس‌پذیر، طیف، مجموعه‌ی حلال، شعاع طیفی، قضیه‌ی گلفاند—مازور، واحد تقریبی، قضیه‌ی تجزیه‌ی کوهن، مجموعه‌ی تابعک‌های خطی—ضربی، جبرهای اینولوشن‌دار ، عضو هرمیتی، تابعک مثبت و حقیقی و با

۱ G. Lumer
۲ F.F. Bonsall
۳ J. Duncan
۴ J. Duncan
۵ J. Williams
۶ Palmer
۷ Gustafson
۸ Popescu
۹ Buzano
۱۰ Kittaneh
۱۱ Dragomir
۱۲ Moslehian

دو قضیه‌ی مهم، گلفاند—نیمارک و قضیه‌ی نمایش گلفاند—نیمارک آشنا می‌شویم که این مفاهیم از مراجع [۱] ، [۲۱] و [۲۳] جمع آوری شده‌اند.

در فصل دوم برد عددی عملگر T ($W(T)$)، که زیر مجموعه‌ای از اعداد مختلط است را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که برد عددی یک عملگر، محدب بوده و بستار برد عددی یک عملگر، طیف آن عملگر را در بردارد. همچنین عملگر خودالحاق است اگر و تنها اگر $W(T)$ حقیقی باشد. سپس شعاع عددی ($w(\cdot)$) را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که یک نرم روی $B(H)$ تشکیل می‌دهد که این نرم با نرم عملگری معادل می‌باشد. در ادامه روابط میان شعاع عددی و شعاع طیفی و نرم عملگری را برای عملگرهای مختلف بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که شعاع عددی زیرجمعی است و با مثال‌هایی زیر ضربی بودن آن را رد می‌کنیم. سپس برای عملگرهای خاص شعاع عددی ضرب دو عملگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالب این فصل از مرجع [۱۳] می‌باشد.

در فصل سوم کران‌های دقیقی برای شعاع عملگری اقلیدسی ($w_e(\cdot,\cdot)$) از دو عملگر خطی کراندار در فضای هیلبرت ارائه می‌شود. به این ترتیب که ابتدا شعاع عملگری اقلیدسی را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که روی $B^2(H)$ تشکیل نرم می‌دهد و در ادامه نامساویی که کیتانه در سال (۲۰۰۵) به جای نامساوی نرم معادلی ارائه داد را برای حالت‌های خاص از عملگرها مورد بررسی قرار می‌دهیم و به روابطی که بین شعاع عملگری اقلیدسی با شعاع عددی و نرم عملگری وجود دارد می‌پردازیم. مطالب این فصل از مراجع [۲۰] و [۶] می‌باشد.

در فصل چهارم نامساوی‌های شعاع عددی و نرم را برای یک عملگر و همچنین برای دو عملگر ارائه می‌کنیم و سپس این نامساوی‌ها را برای حالتی که یکی از عملگرها معکوس‌پذیر باشد مورد بررسی قرار می‌دهیم به بیان ساده تر در این فصل بیشتر تظریف‌های نرم معادلی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس عملگر (α,β)—نرمال را معرفی کرده و روابط میان شعاع عددی این عملگرها با نرم عملگری را بیان می‌کنیم و در آخر نیز به نامساوی‌هایی از نرم می‌پردازیم. مطالب این فصل از مراجع [۱۱] ، [۴] و [۸] می‌باشد.

در فصل پنجم ابتدا نامساوی مخلوطشوارتز را برای عملگرهای مثبت بیان می‌کنیم و سپس با استفاده از این مطلب، این نامساوی‌ها را برای عملگرهای خودالحاق و فوق نرمال ثابت می‌کنیم و در ادامه نامساوی راید[۱] را بیان کرده و این نامساوی را تعمیم داده و از مطالبی که در بخش‌های قبل همین فصل اثبات شده استفاده کرده

[۱] Reid

و شعاع عددی برای یک عملگر را تعمیم می‌دهیم و در آخر نیز چند نتیجه‌ی جدید که ایده‌ی اصلی آن از قضایای فصل سوم و پنجم است، شعاع عملگری اقلیدسی را برای عملگرهای مختلف تعمیم می‌دهیم. مطالب این فصل از مراجع [۱۸] و [۱۴] می‌باشد.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی خواهیم پرداخت که در فصول آینده مورد استفاده قرار می‌گیرند. بیشتر تعاریف و قضایا به منابع اصلی در آنالیز حقیقی، آنالیز تابعی و جبرهای باناخ ارجاع داده شده‌اند.

۱.۱ نظریه‌ی مقدماتی فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری مختلط H را یک **فضای ضرب داخلی(فضای یکه‌ای)** گوییم، اگر به هر زوج مرتب از بردارهای x,y، در H یک عدد مختلط مانند $\langle x,y\rangle$، به نام **حاصلضرب داخلی** (حاصلضرب اسکالر) x,y، چنان مربوط شده باشد بطوریکه شرایط زیر برقرار باشند:

a) $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است)؛

b) اگر $x,y,z\in H$، $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$؛

c) اگر $x,y\in H$ و $\alpha\in\mathbb{C}$، $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$؛

d) برای هر $x\in H$، $\langle x,x\rangle\geq 0$؛

e) اگر $\langle x,x\rangle=0$ بتوان نتیجه گرفت که $x=0$.

با استفاده از شرایط فوق به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر $y \in H$ ثابت، نگاشت $x \longrightarrow \langle x, y\rangle$، یک تابعک خطی بر H است.

(a) و (c) نشان می‌دهند که $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$ ؛

(a) و (b) نشان می‌دهند که

$$\langle z, x+y\rangle = \langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$$

همچنین با استفاده از (d) نرم بردار $x \in H$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\|x\|^{2} = \langle x, x\rangle.$$

نامساوی شوارتز[1]: خواص (a) تا (d) ایجاب می‌کنند که به ازای هر $x, y \in H$،

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\ \|y\|$$

نامساوی مثلثی[2] : به ازای هر $x, y \in H$، داریم

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

تعریف ۲.۱.۱ از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| \qquad (x, y, z \in H)$$

اگر فاصله‌ی بین x و y، را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم، تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرار می‌شود. لذا H یک فضای متری است، هرگاه این فضای متری تام باشد؛ یعنی، هر دنباله‌ی کوشی در H همگرا باشد، آنگاه H را یک **فضای هیلبرت** [3] گویند.

Schwartz Inequality [1]
Triangl Inequality [2]
Hilbert [3]

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری مختلط با ضرب داخلی باشد. در این صورت به ازای هر x, y، در V

$$\langle x, y\rangle = Re\langle x, y\rangle + iIm\langle x, y\rangle$$

اما از طرفی $Im\langle x, y\rangle = Re\langle x, iy\rangle$، پس ضرب داخلی به طور کامل توسط (جزء حقیقی‌اش) برابر است با

$$\langle x, y\rangle = Re\langle x, y\rangle + iRe\langle x, iy\rangle$$

و اتحادهای زیر را که به **اتحادهای قطبی** معروف هستند را نیز به راحتی می‌توان از تعریف نرم و ضرب داخلی به دست آورد.

اگر $\langle x, y\rangle$ حقیقی باشد، داریم:

$$\langle x, y\rangle = \frac{۱}{۴}\|x+y\|^{۲} - \frac{۱}{۴}\|x-y\|^{۲}$$

و در حالتی که $\langle x, y\rangle$ مختلط باشد، داریم:

$$\langle x, y\rangle = \frac{۱}{۴}\|x+y\|^{۲} - \frac{۱}{۴}\|x-y\|^{۲} + \frac{i}{۴}\|x+iy\|^{۲} - \frac{i}{۴}\|x-iy\|^{۲}.$$

در فضای هیلبرت H اتحاد زیر برای هر $u, v \in H$، برقرار است که به **اتحاد متوازی‌الاضلاع** معروف است

$$\|u+v\|^{۲} + \|u-v\|^{۲} = ۲\|u\|^{۲} + ۲\|v\|^{۲}$$

قضیه ۴.۱.۱ نگاشت‌های

$$x \longrightarrow \|x\|, \qquad x \longrightarrow \langle y, x\rangle, \qquad x \longrightarrow \langle x, y\rangle$$

به ازای هر $y \in H$ ثابت، توابع پیوسته‌ای بر Hاند.

برهان. به قضیه‌ی (۶.۴) از مرجع [۲۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۵.۱.۱ زیرمجموعه‌ی M از فضای برداری V را یک **زیر فضای** V گوییم اگر M نسبت به جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در V خود یک فضای برداری باشد.

تعریف ۶.۱.۱ مجموعه‌ی E در فضای برداری V را **محدب** گوییم اگر دارای خاصیت هندسی زیر باشد. به ازای هر $x, y \in H$، و $\circ < t < \mathsf{1}$

$$z_t = (\mathsf{1} - t)x + ty \in E$$

تعریف ۷.۱.۱ کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل E را **غلاف محدب** E می‌نامند. به عبارت دیگر

$$Co(E) = \{t_\mathsf{1} x_\mathsf{1} + \cdots + t_n x_n : \ n \in \mathbb{N}, \ t_\mathsf{1}, \cdots, t_n \geq \circ, \ \Sigma_{i=\mathsf{1}}^n t_i = \mathsf{1}, \ x_\mathsf{1}, \cdots x_n \in E\}.$$

$Co(E)$ مقطع مجموعه‌های محدب حاوی E است. همچنین غلاف محدب بسته‌ی E عبارت است از $\overline{Co}(E)$. این مجموعه کوچک‌ترین مجموعه‌ی بسته حاوی E یا مقطع کلیه‌ی مجموعه‌های بسته‌ی حاوی E است.

تعریف ۸.۱.۱ اگر به ازای x و yی در H داشته باشیم $\langle x, y\rangle = \circ$ گوییم x **متعامد** به y است و با نماد $x \perp y$، نمایش می‌دهیم. و اگر M زیرفضایی از H باشد، $M^\perp$ را مجموعه‌ی تمام $y \in H$هایی می‌گیریم که به هر $x \in M$ متعامد است. توجه کنید که $x^\perp$ یک زیرفضای H است زیرا $x \perp y$ و $x \perp y'$ رابطه‌ی $x \perp (y + y')$ و $x \perp \alpha y$ را ایجاب می‌کند.

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنیم M زیرفضای بسته‌ای از فضای هیلبرت H باشد. در این صورت

a) هر $x \in H$ تجزیه‌ی منحصربفردی مانند

$$x = Px + Qx$$

به مجموعی از $Px \in M$ و $Qx \in M^\perp$ دارد؛

b) Px و Qx به ترتیب نزدیکترین نقاط به x در M و در $M^\perp$اند؛

c) نگاشتهای $P : H \longrightarrow M$ و $Q : H \longrightarrow M^\perp$ خطی‌اند؛

d) $\|x\|^\mathsf{2} = \|Px\|^\mathsf{2} + \|Qx\|^\mathsf{2}$.

برهان. به قضیه‌ی (۱۱۰۴) از مرجع [۲۱] مراجعه کنید. □

نتیجه ۱۰.۱.۱ هر گاه $M \neq H$، آنگاه عنصری مانند $y \in H$ و $y \neq 0$ هست بطوریکه $M \perp y$. P و Q را تصاویر متعامد H روی M و $M^{\perp}$ می‌نامند.

لم ۱۱.۱.۱ فرض کنیم

a) X و Y دو فضای متری بوده و X تام باشد؛

b) $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته باشد؛

c) X زیر مجموعه‌ی چگالی مانند X_0 داشته باشد که f بر آن ایزومتری باشد و

d) $f(X_0)$ در Y چگال باشد،

در این صورت f یک ایزومتری از X به روی Y می‌باشد.

برهان. لم (۱۶۰۴) از مرجع [۲۱] را ببینید. $\square$

تعریف ۱۲.۱.۱ فضای برداری مختلط X را یک **فضای خطی نرمدار** گوییم اگر به هر $x \in X$، یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم چنان مربوط شده باشد که

a) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

b) اگر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، آنگاه $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$؛

c) $\|x\| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب نماید.

بنا بر (a) نامساوی مثلثی برقرار است:

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \qquad (x, y, z \in X)$$

این مطلب در تلفیق با (b) ($\alpha = 0$ و $\alpha = -1$) و (c) نشان می‌دهد که هر فضای خطی نرمدار را می‌توان یک فضای متری گرفت.

هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله‌ی نرمش تام می‌باشد. بنابراین هر

فضای هیلبرت یک فضای خطی نرمدار است.

تعریف ۱۳.۱.۱ (عملگر خطی) فرض کنیم X و Y فضاهای برداری روی یک میدان باشند. قرار می‌دهیم $T : X \longrightarrow Y$ به طوریکه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$،

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

در این صورت T را یک عملگر خطی گوییم. اگر $Y = \mathbb{C}$ آنگاه T یک تابعک خطی است.

قضیه ۱۴.۱.۱ فرض کنید V فضای برداری و T عملگری خطی روی V باشد اگر W زیرفضایی از V باشد، گوییم W تحت T پایاست، هرگاه به ازای هر بردار x در W، بردار Tx هم در W باشد؛ یعنی، $T(W) \subseteq W$ باشد.

برهان. به قضیه‌ی (۶۰۴) از مرجع [۱۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۱۵.۱.۱ به ازای هر عملگر خطی T روی فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V، عملگر یکتایی چون T^* روی V وجود دارد که به ازای هر x و y از V داشته باشیم:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

عملگر T^* را **الحاقی** T می‌نامیم.

برهان. به قضیه‌ی (۷۰۳.۰۸) از مرجع [۱۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۶.۱.۱ عملگر خطی T از فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y را در نظر گرفته و نرم آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \ \|x\| \leq ۱, \ x \in X\} \qquad (۱.۱)$$

هرگاه $\|T\|<\infty$، آنگاه T را یک **عملگر خطی کراندار** می‌نامند. مقدار T در نقطه‌ی x را با $\langle T,x\rangle$ نمایش می دهیم.

مجموعه‌ی نگاشتهای خطی و کراندار از فضای نرمدار خطی X به فضای نرمدار خطی Y را با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. این مجموعه با اعمال جمع و ضرب نقطه‌ای و نرم بالا به یک فضای نرمدار تبدیل خواهد شد. اگر Y باناخ باشد، $B(X,Y)$ به فضای باناخ تبدیل خواهد شد.

در رابطه‌ی (۱.۱)، $\|x\|$، نرم x در X و $\|Tx\|$، نرم Tx در Y است و می‌توان به بردارهای یکه‌ی x محدود شد؛ یعنی، به xهایی که $\|x\|=1$. این امر سوپریمم را تغییر نمی‌دهد زیرا

$$\|T(\alpha x)\|=\|\alpha Tx\|=|\alpha|\,\|Tx\|.$$

همچنین $\|T\|$ کوچکترین عددی است که نامساوی

$$\|Tx\|\leq\|T\|\,\|x\|$$

به ازای هر $x\in X$ برقرار است.

قضیه ۱۷.۱.۱ به ازای عملگر خطی T از فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y، گزاره‌های زیر معادلاً؛

i) T کراندار است؛

ii) T پیوسته است؛

iii) T در یک نقطه از X پیوسته است.

برهان. به قضیه‌ی (۴.۵) از مرجع [۲۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۱.۱۸ **(قضیه‌ی نگاشت باز[۱])** فرض کنیم U و V گوی‌های یکه‌ی بازی از فضاهای باناخ X و Y باشند به هر تبدیل خطی کراندار T از X به روی Y یک $\delta > 0$ چنان نظیر است که

$$T(U) \supset \delta V$$

برهان. به قضیه‌ی (۹.۵) از مرجع [۲۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۱.۱۹ اگر X و Y فضاهای باناخ و T یک عملگر خطی کراندار از X به روی Y باشد که یک به یک نیز باشد، آنگاه δای وجود دارد، بطوریکه

$$\|Tx\| \geq \delta \|x\| \qquad (x \in X).$$

به عبارت دیگر، T^{-1} یک عملگر خطی کراندار از Y به روی X می‌باشد.

برهان. به قضیه‌ی (۱۰.۵) از مرجع [۲۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۱.۲۰ **(قضیه‌ی هان–باناخ[۲])** هرگاه M زیرفضایی از فضای خطی نرمدار X بوده و f یک تابعک خطی کراندار بر M باشد، آنگاه f را می‌توان به یک تابعک خطی کراندار مانند F بر X به طوری توسیع داد که $\|F\| = \|f\|$.

برهان. به مرجع [۱] و [۲۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۱.۱.۲۱ اگر $\varphi \in H'$، آنگاه عضو منحصربفرد $f \in H$ موجود است بطوریکه

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \qquad (\forall\, v \in H).$$

بعلاوه $\|\varphi\|_{H'} = \|f\|$.

---

[۱] Open Mapping Theorem

[۲] Hahan-Banach Theorem

برهان. به مرجع [۲۳] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را فشرده گوییم هرگاه $\overline{T(B_X)}$ فشرده باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱ فضای متریک X را جدایی پذیر گوییم هرگاه دارای زیر مجموعه‌ای چگال و شمارا باشد.

گزاره ۲۴.۱.۱ اگر T عملگر خود توان و کراندار در فضای هیلبرت H باشد در این صورت $R(T) \cap N(T) = \{0\}$ است.

$$x \in R(T) \cap N(T) \implies x \in R(T) \quad , \quad x \in N(T)$$

$$\implies x \in R(T) \quad , \quad Tx = 0 \tag{۲.۱}$$

$$\implies \exists \ y \in H \quad Ty = x \quad , \quad Tx = 0 \tag{۳.۱}$$

$$\implies T(Ty) = T^2 y = Ty = x = 0$$

بنابراین از (۲.۱) و (۳.۱) نتیجه می‌شود که $x = 0$ و لذا $R(T) \cap N(T) = \{0\}$ و در نتیجه می‌توان فضای هیلبرت H را به صورت زیر نمایش داد

$$H = R(T) \oplus N(T).$$

نتیجه ۲۵.۱.۱ اگر X یک فضای خطی نرمدار بوده و $x_0 \in X$ و $x_0 \neq 0$، یک تابعک خطی کراندار مانند f بر X با نرم ۱ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = \|x_0\|$.

برهان. به مرجع [۱] مراجعه کنید. $\square$