دانشگاه سیستان وبلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

قضیه ریس برای نیم‌گروههای توپولوژیکی ساده

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

سیما سرگزی

بهمن ۱۳۸۹

چکیده

دراین پایان نامه ابتدا ساختار نیم‌گروههای معکوس توپولوژیکی $0-$ساده فشرده شمارا را توصیف نموده و سپس نیم‌گروههای توپولوژیکی را که تحت شرایط خاص پاراگروه توپولوژیکی می شوند مشخص می نماییم، سپس به بررسی شرایطی می پردازیم که تحت آن نیم‌گروه توپولوژیکی ساده S پاراگروه توپولوژیکی می شود.

مقدمه

در اوایل قرن حاضر، مفهوم کلی تری از فضا، یعنی فضای توپولوژیک در عرصه ریاضیات ظهورنمود. با پیدایش این فضا، نظریه ای زیبا در ریاضیات معاصر به وجود آمد که اینک آن را توپولوژی می نامند. تحقیقات ریاضیدانان در زمینه های مختلف توپولوژی منجر به گسترش دامنه آن و ایجاد شاخه های گوناگونی از آن مانند توپولوژی عمومی، توپولوژی جبری و ... شده است. امروزه نظریه توپولوژی نقشی اساسی در اغلب رشته های ریاضیات، بخصوص در هندسه و آنالیز دارد.

در اصل کلمه توپولوژی از ترکیب دو کلمه یونانی $\tau o\pi os$ به معنی جا و مکان و $\lambda o\nu\tau\alpha$ به معنی مطالعه حاصل شده است. از جنبه تاریخی توپولوژی در سال ۱۸۴۷ توسط لیستینگ [۱] از شاگردان گاوس [۲] معرفی شد. از جنبه هندسی، توپولوژی مطالعه خواصی است که تحت آن همسان ریختی ها پایا هستند. هندسه را نیز می توان موضوعی دانست که به مطالعه خواصی می پردازد که بوسیله انواع خاصی از توابع حفظ می شوند. تعاریف کلی فضاهای توپولوژیک برای نخستین بار در آثار فرشه [۳]، هاسدورف و ریس [۴] ظاهر و تعریف کامل فضاهای توپولوژیک توسط ریاضیدان لهستانی کوراتوفسکی [۵] و ریاضیدان روسی الکساندروف [۶] ارائه شد. پس از آن ریاضیدانان برجسته زیادی به بررسی خواص گروه ها و نیم‌گروههای توپولوژیکی در زمینه های مختلف پرداختند.

ساس کویچ در سال ۱۹۲۸ در حالت خاص به بررسی ساختار جبری نیم‌گروههای کاملاً ساده پرداخت و

[۱] $Listing$

[۲] $Gause$

[۳] $Fershe$

[۴] $Rees$

[۵] $Kuratowski$

[۶] $Alexandrov$

بعدها در سال ۱۹۴۰ ریس در حالت کلی به بررسی این موضوع پرداخت.

در سال ۱۹۵۵ کلیفورد[۷] نیم‌گروههای معکوس را تعریف نمود و در همان سال والاس[۸] با قراردادن توپولوژی روی آن نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی را تعریف و در سال ۱۹۵۶ نسخه توپولوژیکی قضیه ریس — ساس کویچ[۹] را برای نیم‌گروههای توپولوژیکی فشرده اثبات نمود، در سال ۱۹۸۴ راپرت[۱۰] به بررسی خواص نیم‌گروههای نیم‌توپولوژیکی فشرده و بعدها گوتیک[۱۱]، پاگون [۱۲] و ریپاوز [۱۳] به بررسی نیم‌گروههای توپولوژیکی فشرده شمارای دنباله ای پرداختند. حال دراین پایان نامه ما به بررسی خواص نیم‌گروههای معکوس توپولوژیکی ۰—ساده فشرده شمارا و نیم‌گروههای توپولوژیکی ساده در قضیه ریس می پردازیم.

---

[۷] $Clifford$

[۸] $Wallace$

[۹] $Rees - Suschkewitsch$

[۱۰] $Ruppert$

[۱۱] $Gutic$

[۱۲] $Pagon$

[۱۳] $Repovs$

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه

در این فصل برخی از تعاریف، مفاهیم و قضایایی را که در فصول بعدی به کار خواهیم برد گرد آورده ایم، بیشتر مطالب این فصل بر گرفته از کتاب توپولوژی عمومی نوشته انگلکینگ [۱] [۱۳] و منابع ارجاعی می باشند. تمامی گزاره ها و قضایایی که دراین فصل بدون ذکر شماره منبع قید شده اند، برگرفته از منبع [۱۳] می باشند.

۱—۱ فضاهای توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱: فرض کنید X یک مجموعه‌ای دلخواه باشد. مجموعه توانی X یعنی گردایه تمام زیر مجموعه‌های X را با $\mathcal{P}(X)$ نمایش می دهند. $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ را یک توپولوژی روی مجموعه ناتهی X گویند در صورتی که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$.

(۲) اگر $A, B \in \tau$، آنگاه $A \cap B \in \tau$.

(۳) به ازای هر زیر گردایه از τ مانند $\mathcal{A}$، $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

اعضای τ را مجموعه‌های باز و زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژیکی گویند. بنابراین، یک توپولوژی روی مجموعه ناتهی X گردایه ای از زیرمجموعه های X است که تحت اعمال تشکیل اجتماعهای دلخواه و اشتراکهای متناهی بسته است. در این پایان نامه همواره X ناتهی فرض می شود.

---

[۱] $Engelking$

تعریف ۲.۱.۱: فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد و $E \subseteq X$. در این صورت E را در X بسته گویند، هر گاه $X \setminus E$ در X باز باشد، به بیان دیگر $X \setminus E \in \tau$.

گزاره ۳.۱.۱: فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد. در این صورت شرایط زیر برقرار است:

(۱) X و $\emptyset$ در X بسته‌اند.

(۲) اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته در X، بسته است.

(۳) مقطع دلخواه از مجموعه‌های بسته در X، بسته است.

تعریف ۴.۱.۱: فرض کنید τ یک توپولوژی روی مجموعه X باشد. زیرگردایه $\mathcal{B}$ از τ را پایه‌ای برای τ گویند، هر گاه هر عضو τ بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد. بعبارت دیگر، $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای τ است، هر گاه برای هر $G \in \tau$ و هر $x \in G$، $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد بطوریکه $x \in B \subset G$.

تعریف ۵.۱.۱: فرض کنید τ و τ' دو توپولوژی X باشند. در این صورت τ' را ظریف تر(قوی تر) از τ گویند، هر گاه $\tau \subseteq \tau'$ گویند.

واضح است وقتی که τ' ظریفتر از τ باشد، همهٔ اعضای τ را شامل خواهد بود. بنابراین همهٔ مجموعه‌های باز فضای (X,τ) در فضای (X,τ') باز خواهند بود.

توپولوژی $\tau = \mathcal{P}(X)$ قوی ترین توپولوژی روی X می باشد، که آن را توپولوژی گسسته گویند.

توپولوژی $\tau = \{\varnothing, X\}$ ضعیف ترین توپولوژی روی X می باشد، که آن را توپولوژی ناگسسته یا بدیهی گویند.

گزاره ۶.۱.۱: فرض کنید (X,τ) و (X,τ') دو فضای توپولوژیکی و $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ به ترتیب پایه‌هایی برای τ و τ' باشند. در این صورت τ' ظریف تر از τ است اگر و تنها اگر به ازای هر B از $\mathcal{B}$ و هر $x \in B$، عضوی از پایهٔ $\mathcal{B}'$ مانند B' موجود باشد به طوریکه $x \in B' \subseteq B$.

تعریف ۷.۱.۱: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیکی X باشد. بزرگترین مجموعهٔ باز مشمول در A را درون A گویند و با $int(A)$ نشان می‌دهند.

گزاره ۸.۱.۱: فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از فضای توپولوژیکی (X,τ) باشند. در این صورت:

(۱) $int(\emptyset) = \emptyset$ و $intX = X$.

(۲) $int(A) \subseteq A$؛

(۳) $int(A)$ مجموعه‌ای باز است (خواه A باز باشد یا نباشد).

(۴) $int(int(A)) = int(A)$.

(۵) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $int(A) \subseteq int(B)$.

(۶) $x \in int(A)$ اگر و تنها اگر مجموعهٔ بازی مانند G موجود باشد به طوری که $x \in G \subseteq A$.

تعریف ۹.۱.۱: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیکی (X,τ) باشد. کوچکترین مجموعه بسته شامل A را بستار A گویند و با $\overline{A}$ یا clA نشان می‌دهند.

گزاره ۱۰.۱.۱: فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از فضای توپولوژیکی (X,τ) باشند، دراین صورت:

(۱) $\overline{\emptyset}=\emptyset$ و $\overline{X}=X$.

(۲) $A\subseteq\overline{A}$.

(۳) $\overline{A}$ بسته است (خواه A بسته باشد یا باز).

(۴) A بسته است اگر و تنها اگر $\overline{A}=A$.

(۵) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

(۶) اگر $A\subseteq B$ آنگاه $\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

(۷) $x\in\overline{A}$ اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ باز شامل x مجموعهٔ A را قطع کند.

(۸) $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

تعریف ۱۱.۱.۱: فرض کنید Y زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیکی X باشد. Y را در X چگال گویند هر گاه $\overline{Y}=X$.

گزاره ۱۲.۱.۱: فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیکی (X,τ) باشد. در این صورت :

(۱) $A\subseteq X$ در X چگال است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه باز و ناتهی مانند U در X ، $U\cap A\neq\varnothing$ باشد.

(۲) اگر U در X باز باشد، آنگاه $\overline{U} = \overline{U \cap A}$.

تعریف ۱۳.۱.۱: فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیکی و Y زیرمجموعه ای ناتهی از X باشد. در این صورت گردایهٔ $\tau|Y = \{U \cap Y | U \in \tau\}$ یک توپولوژی روی Y است. این توپولوژی را توپولوژی القایی یا توپولوژی زیرفضایی می‌گویند. فضای توپولوژیک $(Y,\tau|Y)$ رانیز یک زیر فضای (X,τ) گویند.

۱—۲ نیم‌گروه های توپولوژیکی، گروه‌های توپولوژیکی و نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی

تعریف ۱.۲.۱: یک نیم‌گروه عبارت است از مجموعه ای ناتهی مانند S همراه بایک عمل دوتایی شرکت پذیر یعنی،

$$\forall a,b,c \in S, \qquad a(bc) = (ab)c$$

مثال ۲.۲.۱: $(\mathbb{Z},.)$، $(\mathbb{Q} \setminus \{\circ\},.)$ و $(\mathbb{C} \setminus \{\circ\},.)$ نیم‌گروه هستند. مجموعه $M(n,\mathbb{C})$ شامل ماتریس های $n \times n$ روی مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$ تحت ضرب ماتریس ها نیز یک نیم‌گروه است.

تعریف ۳.۲.۱: عنصر ۱ از یک نیم گروه S را همانی راست (چپ) برای S گویند، هرگاه برای هر $s \in S$، $s.۱ = s$ ($۱.s = s$). یک همانی عبارت است از یک همانی راست و چپ. یک نیم گروه ممکن است همانی های راست زیادی داشته باشد. بعنوان مثال در نیم‌گروهی شامل همه ماتریس هایی

به شکل

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

هر عنصر یک همانی راست است. بااین حال اگر نیم‌گروهی دارای همانی راست و چپ باشد، آنگاه هر دو مساویند. اگر نیم‌گروه S دارای همانی نباشد، آنگاه $S^1 = S \cup \{1\}$ با ضرب $1x = x1 = x$ $(x \in S)$، یک نیم‌گروه با همانی ۱ است.

تعریف ۴.۲.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد :

(۱) S را تکواره گویند، هرگاه S دارای عنصر همانی باشد.

(۲) S را گروه گویند، هرگاه S تکواره‌ای با عنصر همانی باشد و برای هر $a \in S$ وجود داشته باشد $b \in S$ ، به طوری که $ab = ba = 1$.

تعریف ۵.۲.۱: در نیم‌گروه S، $0 \in S$ را صفر راست (چپ) S گویند، هرگاه برای هر $x \in S$، $x0 = 0$ $(0x = 0)$. یک صفرS ، عضوی است که صفر راست و چپ باشد. اگر S دارای صفر باشد آن را $0-$نیم گروه گویند. اگر S دارای یک صفر راست و یک صفر چپ باشد، آنگاه آن دو مساویند. بدین ترتیب هر نیم‌گروه حداکثر یک صفر دارد.

مثال ۶.۲.۱: مجموعه $Q_{\sqrt{2}} = \{x + y\sqrt{2} : x, y \in Q\}$ تحت ضرب معمولی یک گروه است، که $e = 1$ عنصر همانی این گروه است.

تعریف ۷.۲.۱: فرض کنید S یک گروه باشد. در این صورت برای هر $x \in S$ نگاشت $l_s : S \to S$ با ضابطه $l_s(x) = sx$ را انتقال داخلی چپ و نگاشت $r_s : S \to S$ با ضابطه $r_s(x) = xs$ را یک انتقال داخلی راست تحت S گویند.

تعریف ۸.۲.۱: فرض کنید X, Y, Z فضاهای توپولوژیکی باشند. نگاشت

$$\varphi : X \times Y \to Z$$
$$(x, y) \to \varphi(x, y)$$

(۱) راست پیوسته است اگر در متغیر راست پیوسته باشد، به این معنی که برای هر متغیر ثابت $x_\circ \in X$، نگاشت

$$Y \to Z$$
$$y \to \varphi(x_\circ, y)$$

پیوسته باشد، پیوستگی در متغیر چپ نیز بطور مشابه تعریف می شود.

(۲)بطور مجزا پیوسته است اگردر هر دو متغیر راست و چپ پیوسته باشد.

(۳) تواماً پیوسته است اگر نگاشت φ بین فضای حاصلضرب $X \times Y$ و فضای Z پیوسته باشد.

مثال ۹.۲.۱: تابع $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده بوسیله

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^۲ + y^۲} & (x, y) \neq (\circ, \circ) \\ \circ & (x, y) = (\circ, \circ) \end{cases}$$

در هر متغیر پیوسته است ولی تواماً پیوسته نیست.

تعریف ۱۰.۲.۱ : فرض کنید$(S, .)$ یک نیم گروه وτ یک توپولوژی روی S باشد،$(S, ., \tau)$:

(۱) راست (چپ) نیم گروه توپولوژیکی است اگر عمل . راست (چپ) پیوسته باشد.

(۲) نیم‌گروه نیم توپولوژیکی است اگر عمل . بطور مجزا پیوسته باشد.

(۳) نیم‌گروه توپولوژیکی است اگر عمل . تواماً پیوسته باشد.

(۴) گروه توپولوژیکی است، هرگاه S گروهی باشد که در آن عمل . و نگاشت معکوس $S \to S$ تعریف شده بوسیله $x \to x^{-1}$ پیوسته باشند.

با توجه به تعریف واضح است که هر نیم‌گروه توپولوژیکی یک نیم‌گروه نیم‌توپولوژیکی است و هر نیم‌گروه نیم‌توپولوژیکی هر دو نیم‌گروه توپولوژیکی راست وچپ می باشد.

مثال ۱۱.۲.۱: مجموعه $M(n,\mathbb{C})$ از ماتریس های $n \times n$ با درایه های مختلط به همراه توپولوژی معمولی یک نیم‌گروه توپولوژیکی است . مجموعه $GL(n.\mathbb{C})$ از ماتریس های $n \times n$ نامنفرد یک گروه توپولوژیکی است.

گزاره ۱۲.۲.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه همراه با یک توپولوژی روی آن باشد، در این صورت S یک نیم‌گروه توپولوژیکی است اگر و تنها اگر برای هر $x,y \in S$ و هر همسایگی باز دلخواه W از xy در S ، همسایگی های باز U و V به ترتیب از y,x در S موجود باشند به طوری که $UV \subseteq W$.

گزاره ۱۳.۲.۱: نگاشت معکوس روی گروه S پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $x \in S$ و هر همسایگی دلخواه U از x^{-1} ، همسایگی V از x وجود داشته باشد، به طوری که $V^{-1} \subseteq U$.

گزاره ۱۴.۲.۱: گروه $(S,.)$ به همراه توپولوژی τ گروه توپولوژیکی است اگر و تنها اگر نگاشت $S \times S \to S$ تعریف شده با ضابطه $(x,y) \to xy^{-1}$ پیوسته باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱: تابع حقیقی مقدار d روی $X \times X$ شبه متر نامیده می شود، هر گاه برای هر $x,y,z \in X$:

(۱) $d(x,y) \geq 0$، تساوی تنها زمانی برقرار است که $x=y$.

(۲) $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$.

مثال ۱۶.۲.۱: فرض کنید $X = \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$، که $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی است. فرض کنید عمل $*$ به ازای هر $x \in X \setminus \{0\}$ و هر $y \in X$، توسط $x*y=x$ و به ازای هر $x \in X$ به صورت $0*x=x$ تعریف شود. تابع حقیقی مقدار d را روی $X \times X$ به صورت زیر تعریف می کنیم.

(۱) برای هر $x \in X$، $d(x,x)=0$.

(۲) برای هر $x,y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، اگر $x<y$، $d(x,y)=\frac{1}{(y-x)}$ و اگر $x>y$، $d(x,y)=1$.

(۳) برای هر $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، $d(\infty,x)=\frac{1}{(x+1)}$ و $d(x,\infty)=1$.

در اینصورت d یک شبه متر روی X است. اگر τ_d توپولوژی تعریف شده بوسیله d باشد، آنگاه $(X,*,\tau_d)$ یک نیم‌گروه توپولوژیکی است.

تعریف ۱۷.۲.۱: نیم‌گروه S، نیم‌گروه معکوس نامیده می شود اگر برای هر $x \in S$ یک $y \in S$ منحصربفرد وجود داشته باشد، به طوری که $xyx=x$ ، $yxy=y$. $y \in S$ را معکوس x نامیده و با

x^{-1} نمایش می دهند.

تعریف ۱.۲.۱۸: فرض کنید (S,τ) یک نیم‌گروه توپولوژیکی باشد. (S,τ) را نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی گویند، هرگاه S نیم‌گروه معکوس باشد و نگاشت معکوس پیوسته باشد.

تعریف ۱.۲.۱۹: فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. $a \in S$ را خودتوان گویند، هرگاه $a^{2} = a$. یک نیم‌گروه توپولوژیکی آبلی را که هر عنصر آن خودتوان باشد یک نیم‌مشبکه توپولوژیکی گویند.

مثال ۱.۲.۲۰: هر گروه توپولوژیکی یا هر نیم‌مشبکه توپولوژیکی یک نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی است. همچنین مجموعه اعداد حقیقی نامنفی با توپولوژی معمولی و ضرب یک نیم‌گروه معکوس است که نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی نیست.

گزاره ۱.۲.۲۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی و A یک زیرنیم‌گروه معکوس از S باشد در این صورت A و $\overline{A}$ نیم‌گروه های معکوس توپولوژیکی هستند.

برهان: فرض کنیم $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله ای در A و همگرا به $x \in \overline{A}$ باشد، آنگاه $\{x_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا به x^{-1} است و چون به ازای هر n، $x^{-1} \in A$، بنابراین $x^{-1} \in \overline{A}$. لذا $\overline{A}$ یک زیرنیم‌گروه معکوس از S است. پیوستگی نگاشت معکوس روی A و $\overline{A}$ از پیوستگی نگاشت معکوس روی S نتیجه می شود.

تعریف ۱.۲.۲۲: نیم‌گروه توپولوژیکی S پایا است، هر گاه برای هر $a, b \in S$:

(۱) اگر $Sa \subset Sab$، آنگاه $Sa = Sab$.

(۲) اگر $aS \subset baS$، آنگاه $aS = baS$.

۱–۳ λ–توسیع برانت

تعریف ۱.۳.۱: فرض کنید S یک نیم‌گروه و I_λ یک مجموعه غیر تهی با عدد اصلی λ باشد عمل روی مجموعه $B_\lambda(S) = I_\lambda \times S^1 \times I_\lambda \cup \{0\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(\alpha, a, \beta).(\gamma, b, \delta) = \begin{cases} (\alpha, ab, \delta) & if \quad \beta = \gamma \\ 0 & if \quad \beta \neq \gamma \end{cases}$$

در این صورت $B_\lambda(S)$ یک نیم‌گروه است، که آن را $\lambda-$ توسیع برانت می نامند.

اگر نیم گروه S بدیهی باشد (S شامل فقط یک عضو باشد)، آنگاه $B_\lambda(S)$ نیم‌گروهی از واحدهای ماتریس $I_\lambda \times I_\lambda$ است که آنرا با B_λ نمایش می دهند.

لم ۲.۳.۱[۱۶]: فرض کنید T یک زیرنیم‌گروه چگال از یک نیم‌گروه توپولوژیکی S باشد. اگر T ، 0–نیم گروه باشد، آنگاه S نیز، 0–نیم گروه است . بویژه صفر T و S مساویند.

تذکر ۳.۳.۱: عدد اصلی مجموعه $\{0, 1, 2, ...\}$ را با ω نشان می دهند.

قضیه ۴.۳.۱: فرض کنید $\lambda \geq 2$ و B_λ زیرنیم‌گروهی از نیم‌گروه معکوس توپولوژیکی