بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

درآمدی بر منطق های گودل

توسط

زهرا پارسا

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقری

بهمن‌ماه ۱۳۹۰

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم زهرا پارسا** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۷۵۶۶۱۰۰۸ تحت عنوان: «**درآمدی بر منطق‌های گودل**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مسعود پورمهدیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:
«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۰ در دانشکده ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار ~~خانم~~/جناب آقای دکتر سید محمد باقری ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب زهرا پارسا دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: زهرا پارسا

تاریخ و امضا: ۱۳۹۱ / ۲/۱۱

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب زهرا پارسا دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۷ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۱۳۹۱/۲/۱۱

چکیده

در این پایان نامه منطق های گودل مرتبه اول که خانواده ای از منطق های متناهی یا نا متناهی ارزشی هستند، مطالعه می‌شود. مجموعه‌ی ارزش‌های صدق، V، زیر مجموعه‌ی بسته‌ای از $[۰,۱]$ است که شامل ۰ و ۱ می‌باشد. G_V منطق حاصل از مجموعه ی V، مجموعه ی آن دسته از فرمول ها است که تحت هر تعبیری بتوی V ارزش ۱ پیدا کنند. انتخاب مجموعه های متفاوت V موجب پدید آمدن منطق‌های متفاوت G_V می‌شود.

ثابت خواهیم کرد که G_V بنداشت پذیر است اگر و تنها اگر یکی از سه حالت زیر رخ دهد:

۱− V متناهی باشد ۲− V ناشمارا باشد و ۰ نقطه‌ی تنهای آن باشد ۳−هر همسایگی ۰ در V ناشمارا باشد. همچنین این پایان نامه به ارائه‌ی توضیح مختصری درباره مهمترین t−نرم‌های پیوسته و مانده‌ی وابسته به آن‌ها می‌پردازد.

کلمات کلیدی: منطق های گودل، بنداشت پذیری، منطق شهودی

فهرست مندرجات

مقدمه

منطق‌های گودل یکی از قدیمی ترین و جالب‌ترین خانواده‌های منطق های چند ارزشی است. منطق های گودل متناهی ارزشی گزاره ای توسط گودل [1] و برای اثبات اینکه منطق شهودی ماتریس مشخصه متناهی ندارد، معرفی شدند [۵]. آنها اولین مثال برای منطق های میانی بودند. (میانی یعنی اینکه از نظر قدرت بین منطق های کلاسیک و منطق های شهودی است).

دامت [2] اولین کسی بود که منطق های گودل گزاره‌ای نامتناهی ارزشی را مطالعه کرد. او مجموعه همانگوهای منطق‌های نامتناهی ارزشی را بوسیله گسترش منطق شهودی با $(A \to B) \vee (B \to A)$ بنداشت سازی کرد [۴]. از اینرو منطق گودل گزاره‌ای نامتناهی ارزشی گاهی منطق گودل—دامت یا منطق LC دامت نیز نامیده می شود. بر اساس معناشناسی کریپکی بنداشت بالا آن دسته از روابط دسترس پذیری که مرتب خطی هستند را مشخص می کند.

یکی از حقایق شگفت انگیز در مورد منطق های گودل این است که هر چند تنها یک منطق گودل گزاره‌ای نامتناهی ارزشی وجود دارد، نامتناهی تا منطق گودل مرتبه اول نامتناهی ارزشی متفاوت، وابسته به انتخاب مجموعه ی ارزش های صدق، وجود دارد.

در این پایان نامه که مرجع اصلی آن [۲] می باشد به مطالعه‌ی بنداشت پذیری بازگشتی رابطه استنتاج در منطق های گودل مرتبه اول خواهیم پرداخت. که در آن استنتاج به این صورت تعریف می شود: $\Gamma \vDash A$ اگر برای هر تعبیر J داشته باشیم

$$\inf\{J(B) : B \in \Gamma\} \leqslant J(A)$$

ما در اینجا ابتدا به مقدماتی از منطق فازی و معرفی چند t—نرم معروف و شناخته شده می‌پردازیم و پس از

---

[1] $K.Gödel$

[2] M. Dummett

آن دستور و معناشناسی منطق های گودل را ارائه می‌دهیم. بعلاوه به بررسی تعداد خاصی از منطق های گودل مرتبه اول و روابط بین آنها می پردازیم(فصل ۱).

در فصل ۲ تعدادی نتایج وابسته به توپولوژی مجموعه‌های ارزش های درستی بیان می‌شود. نتایج اصلی و مهم این پایان نامه در فصل ۳—۵ گنجانده شده است.

یک دسته بندی کامل از بنداشت پذیری منطق های گودل مرتبه اول ارائه خواهیم داد. نتایج اصلی چنین هستند:

یک منطق مبنی بر مجموعه ارزش صدق V بنداشت پذیر است اگر و تنها اگر یکی از سه حالت زیر رخ دهد.

(۱) V متناهی است. (فصل ۵)

(۲) V ناشمارا و ۰ مشمول در هسته تام V است. (۱.۴)

(۳) V ناشمارا و ۰ نقطه‌ی تنهاست. (۲.۴)

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل منطق فازی را به‌طور مختصر معرفی می کنیم و نشان می دهیم جایگاه آن در میان منطق های چند ارزشی است. سپس به مطالعه‌ی منطق های گودل مرتبه اول خواهیم پرداخت.

از نام‌گذاری منطق های چند ارزشی به روشنی مشخص است که بر خلاف منطق کلاسیک، گزاره‌ها در آن فقط دو ارزش ۰ و ۱ ندارند. اولین منطق گزاره ای که سه مقدار داشت، منطق سه مقداری لوکاسیویچ بود که در سال ۱۹۲۰ بوجود آمد و سومین مقدار متناظر با احتمال آینده بود. در سال ۱۹۳۰ لوکاسیویچ[۱] و تارسکی[۲] مقاله ای راجع به منطق گزاره ای با مجموعه ارزش های [۰, ۱] منتشر کردند. این منطق اکنون منطق نامتناهی ارزشی لوکاسیویچ نامیده می شود. در سال ۱۹۳۲ گودل مقاله ای منتشر کرد که در آن نشان داد منطق شهودی نمی تواند معناشناسی متناهی ارزشی داشته باشد. این مقاله منجر به تعریف منطق نامتناهی ارزشی‌ای شد که اکنون منطق گودل نامیده می شود. هیچ یک از لوکاسیویچ و گودل منطق شان با مفهوم منطق فازی رابطه نداشت، این ارتباط بعدها بیان شد و اینک هر دو منطق گودل و لوکاسیویچ دوتا از

---

[۱] J.Lukasiewicz

[۲] Tarski

مهمترین گونه های منطق فازی هستند.

منطق فازی در سال ۱۹٦۵ توسط لطفعلی عسگر زاده پرفسور علوم کامپیوتر دانشگاه برکلی کالیفرنیا ارائه شد. منطق فازی منطقی چند ارزشی است، یعنی اجازه می دهد که ارزش هایی را بین دو ارزش درست و نادرست داتشه باشیم. می توان مفاهیمی چون خیلی، نسبتاً، تقریباً و ... را که پایه های اندیشه و استدلال های معمولی انسان می باشند، به صورت ریاضی در آورد تا بوسیله کامپیوتر قابل فهم باشند و از این طریق بتوان برنامه‌های کامپیوتری را که به منطق و تفکر انسان نزدیک‌ترند بوجود آورد.

عمده مطالب این بخش و بخش بعد از مرجع [٦] اقتباس شده است.

۱.۱ tـ نرم‌های پیوسته و مانده‌ی وابسته

ابتدا حساب گزاره‌ای فازی پایه را بررسی می کنیم. بازه یکه حقیقی $[\circ,\text{۱}]$ به عنوان مجموعه‌ی استاندارد ارزش ها گرفته می شود. ۱ بطور مطلق درست و $\circ$ بطور مطلق غلط معنی می دهد. ترتیب معمولی اعداد حقیقی $\leqslant$ برای مقایسه ی ارزش ها بکار می رود. $t-$نرم های پیوسته به عنوان تعبیرهای ممکن از رابط عطف در نظر گرفته می شوند.

تعریف ۱.۱.۱ $t-$ نرم یک عملگر دوتایی $\star$ روی $[\circ,\text{۱}]$ است (یعنی $t : [\circ,\text{۱}]^{\text{۲}} \to [\circ,\text{۱}]$) که در شرایط زیر صدق می کند.

(i) $\star$ جابجایی و شرکت پذیر است یعنی برای هر $x, y \in [\circ,\text{۱}]$

$$x \star y = y \star x$$
$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

(ii) $\star$ از هر دو طرف غیر نزولی است.

$$x_1 \star y \leqslant x_2 \star y \quad \text{ایجاب می کند} \quad x_1 \leqslant x_2$$

$$x \star y_1 \leqslant x \star y_2 \quad \text{ایجاب می کند} \quad y_1 \leqslant y_2$$

(iii) برای هر $x \in [0, 1]$، $0 \star x = 0$ و $1 \star x = x$.

اگر t پیوسته باشد آنرا یک $t-$ نرم پیوسته می‌نامند.

مثال ۲.۱.۱ مهمترین مثال ها از t—نرم‌های پیوسته عبارتند از:

(i) t—نرم لوکاسیویچ: $x \star y = \max(0, x + y - 1)$

(ii) t—نرم گودل: $x \star y = \min(x, y)$

(iii) t—نرم ضربی: (ضرب حقیقی) $x \star y = x \cdot y$

اکنون اجازه دهید درباره‌ی استلزام بحث کنیم. در منطق دو ارزشی، استلزام $\varphi \to \psi$ درست است اگر و تنها اگر ارزش φ کمتر یا مساوی ارزش ψ باشد. ما این را به این صورت که بزرگی ارزش $\varphi \to \psi$ باید نشان دهد که مقدار ارزش φ بزرگتر از مقدار ارزش ψ نیست تعمیم می دهیم. این امر ما را به نکته‌ای راهنمایی می کند که باید تابع ارزشی استلزام، $x \Rightarrow y$، غیر صعودی در x و غیر نزولی در y باشد. بعلاوه ما به روایت فازی قیاس استثنایی نیاز خواهیم داشت.

لم ۳.۱.۱ فرض کنید $\star$، یک t—نرم پیوسته باشد. آنگاه عملگر یکتای $x \Rightarrow y$ وجود دارد که برای هر $x, y, z \in [0, 1]$ در شرط $z \leqslant (x \Rightarrow y)$ اگر و تنها اگر $(x \star z) \leqslant y$ صدق می کند. به این ترتیب:

$$x \Rightarrow y = \max\{z | x \star z \leqslant y\}$$

اثبات: برای هر $x, y \in [0, 1]$ قرار دهید $(x \Rightarrow y) = \sup\{z | x \star z \leqslant y\}$ و برای یک z ثابت تابع f را چنین تعریف می کنیم $f(x) = x \star z$. f تابعی پیوسته و غیر نزولی است و از اینرو با $\sup$ جابجا می شود.

$$x \star (x \Rightarrow y) \quad = \quad x \star \sup\{z | x \star z \leqslant\}$$

$$= \quad \sup\{x \star z | x \star z \leqslant y\} \leqslant y$$

وبنابراین $\quad x \quad \Rightarrow \quad y = \max\{z | x \star z \leqslant y\}$

تعریف ۴.۱.۱ عملگر $x \Rightarrow y$ در لم ۳.۱.۱ مانده t—نرم $\star$ نامیده می شود.

لم ۵.۱.۱ بسادگی دیده می شود که برای هر t—نرم پیوسته $\star$ و مانده‌اش $\Rightarrow$ داریم

(i) $x \leqslant y$ اگر و تنها اگر $(x \Rightarrow y) = ۱$

(ii) $(۱ \Rightarrow x) = x$

لم ٦.۱.۱ (۱) اگر $x \leqslant y$ آنگاه $x = y \star (y \Rightarrow x)$.

(۲) اگر $x \leqslant u \leqslant y$ و u خود توان باشد، یعنی $u \star u = u$، آنگاه $x \star y = x$.

برهان:

(۱) قرار می دهیم $f(z) = z \star y$.

f روی $[۰, ۱]$ پیوسته و $f(۰) = ۰$ و $f(۱) = y$ طبق قضیه مقدار میانی و با توجه به اینکه $x \leqslant y$، zای وجود دارد که $f(z) = x$. برای z ماکسیمال که در تساوی $f(z) = z \star y = x$ صدق می‌کند، می‌گیریم

$$z = y \Rightarrow x$$

(۲) نخست فرض می شود $u = y$ آنگاه طبق (۱)

$$x = u \star (u \Rightarrow x)$$

$$x \star u = u \star (u \Rightarrow x) \star u$$

$$= u \star (u \Rightarrow x) = x \qquad \text{خود توانی } u$$

اکنون قرار دهید $u \leqslant y$ آنگاه طبق خواص $\star$ داریم $x \star y \geqslant x \star u = x$ و واضح است $x \star y \leqslant x$ بنابراین $x \star y = x$. ■

قضیه ۷.۱.۱ عملگرهای زیرین مانده‌ی سه t—نرم تعریف شده‌ی قبل هستند. برای $x \leqslant y$ همواره داریم $(x \Rightarrow y) = ۱$.

برای $x > y$

(i) استلزام لوکاسیویچ: $x \Rightarrow y = ۱ - x + y$

(ii) استلزام گودل: $x \Rightarrow y = y$

(iii) استلزام ضربی: $x \Rightarrow y = \frac{y}{x}$

برهان: فرض $x > y$

(i) آنگاه $x \star z = y$ اگر و تنها اگر $x + z - ۱ = y$ اگر و تنها اگر $z = ۱ - x + y$ بنابراین

$$۱ - x + y = \max\{z | x \star z \leqslant y\}$$

(ii) آنگاه $x \star z = y$ اگر و تنها اگر $\min(x, z) = y$ اگر و تنها اگر $z = y$ (با توجه به اینکه $x > y$).

(iii) همچنین $x \star z = y$ اگر و تنها اگر $x \cdot z = y$ اگر و تنها اگر $z = \frac{y}{x}$ (زیرا $x > ۰$). ■

مشاهده می شود که استلزام لوکاسیویچ پیوسته است اما استلزام گودل و ضربی پیوسته نیستند اما به آسانی می توان نشان داد که مانده‌ی هر t—نرم پیوسته، از چپ در اولین متغیر (مقدم) و از راست در دومین متغیر (تالی) پیوسته است.

تعریف ۸.۱.۱ مانده ،$\Rightarrow$، عملگر یکتای پیش متمم متناظر با خود را چنین تعریف می کند:

$$(-)x = (x \Rightarrow ۰)$$

لم ۹.۱.۱ عملگرهای زیرین، پیش متمم های سه t—نرم شناخته شده ی ما هستند.

(i) نفی لوکاسیویچ $(-x) = ۱ - x$

(ii) نفی گودل برای $x > ۰$، $(-)x = ۰$ و $(-)۰ = ۱$

(iii) پیش متمم ارائه شده با استلزام ضربی برابر با نفی گودل است.

برهان: با محاسبات مقدماتی. ■

سه t—نرم لوکاسیویچ، گودل و ضربی، t—نرم های پیوسته‌ی بنیادی هستند یعنی هر t—نرم پیوسته‌ی دیگر ترکیبی از آنها است. اثبات این مطلب از حوصله‌ی بحث ما خارج است([۷]).

۲.۱ منطق چند ارزشی پایه

تعریف ۱.۲.۱ حساب گزاره ای $PC(\star)$ مفروض $\star$ دارای متغیرهای گزاره ای $P_۱, P_۲, \cdots$، رابط های $\to$ و $\&$ و ثابت درستی $\bar{۰}$ برای ۰ است. فرمول ها به شکل معمول تعریف می شوند: هر متغیر گزاره ای یک فرمول است؛ $\bar{۰}$ فرمول است؛ اگر φ و ψ فرمول باشند آنگاه $\varphi \to \psi$، $\varphi\&\psi$ فرمول هستند. بعلاوه دیگر رابط ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$\varphi \wedge \psi$	هست	$\varphi\&(\varphi \to \psi)$
$\varphi \vee \psi$	هست	$((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$
$\neg\varphi$	هست	$\varphi \to \bar{۰}$
$\varphi \equiv \psi$	هست	$(\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$

یک ارزشدهی متغیرهای گزاره ای یک نگاشت e است که به هر متغیر گزاره ای p مقدار ارزش $e(p) \in [0, 1]$ را نسبت می دهد. این تعریف به طور یکتا به ارزش گذاری همه ی فرمول ها گسترش می یابد.

$$e(\bar{0}) = 0$$
$$e(\varphi \to \psi) = (e(\varphi) \Rightarrow e(\psi))$$
$$e(\varphi \& \psi) = (e(\varphi) \star e(\psi))$$

لم ۲.۲.۱ برای هر فرمول φ و ψ داریم:

$$e(\varphi \wedge \psi) = \min(e(\varphi), e(\psi))$$
$$e(\varphi \vee \psi) = \max(e(\varphi), e(\psi))$$

تعریف ۳.۲.۱ فرمول φ، ۱ ـ همانگو برای $PC(\star)$ است اگر برای هر تابع ارزشدهی e داشته باشیم $e(\varphi) = 1$.

بنابراین هر ۱ ـ همانگو فرمولی است که بطور مطلق تحت هر نگاشت ارزشدهی e درست است.

فرمول هایی که برای هر $PC(\star)$ (یعنی برای هر tـنرم پیوسته $\star$) ۱ـهمانگو هستند منطقی را تشکیل می‌دهند که پایه‌ی مشترک همه منطق های $PC(\star)$ است. منطق حاصل از تعریف این tـنرم ها را، BL، منطق گزاره ای فازی پایه می نامند.

تعریف ۴.۲.۱ فرمول های زیر بنداشت‌های منطق پایه‌ی BL می‌باشند:

(A_1) $\quad (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(A_2) $\quad (\varphi \& \psi) \to \varphi$

(A_3) $\quad (\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi)$

(A_4) $\quad (\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to (\psi \& (\psi \to \varphi))$

(A_{5a}) $\quad (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi)$

(A_{5b}) $\qquad ((\varphi \& \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$

(A_6) $\qquad ((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$

(A_7) $\qquad \bar{0} \to \phi$

قاعده استنتاج BL عبارت است از قیاس استثنایی:

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$

برهان و برهان پذیری به طور بدیهی تعریف می شوند. یک برهان در BL دنباله $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ از فرمول هاست بطوریکه هر φ_i یک اصل از BL است یا از تعدادی φ_j, φ_k که $j, k < i$ بوسیله قیاس استثنایی بدست می‌آید. یک فرمول برهان پذیر است،هرگاه عضو پایانی یک برهان باشد.

تعریف تمامیت: برای هر فرمول φ، BL φ را برهان می کند اگر و تنها اگر φ یک t−همانگو باشد (یعنی برای هر t−نرم $\star$ و هر تابع ارزشدهی e، $e_\star(\varphi) = 1$)

تبصره ۵.۲.۱ اجازه دهید شرح کوتاهی بر این بنداشت‌ها دهیم.

(A_1) خاصیت ترایایی استلزام است. (A_2) بیان می کند که عطف $\&$ اولین عضو را ایجاب می کند و (A_3) می گوید عطف $\&$ خاصیت جابجایی دارد. (A_4) جابجایی بودن عطف $\wedge$ را بیان می کند. (A_5) مانده را شرح می دهد. (A_6) می گوید اگر χ نتیجه شود از $\psi \to \varphi$ آنگاه اگر χ همچنین از $\varphi \to \psi$ نتیجه شود آنگاه χ (A_7) $\bar{0}$ هر چیزی را ایجاب می کند.

لم ۶.۲.۱ همه‌ی بنداشت‌های BL در هر $PC(\star)$ ۱−همانگو هستند. اگر φ و $\psi \to \varphi$، ۱−همانگو $PC(\star)$ باشند آنگاه ψ نیز ۱−همانگو $PC(\star)$ است. در نتیجه هر فرمول برهان پذیر در BL ۱−همانگو در هر $PC(\star)$ است.

برهان: $(A_۲)-(A_۴)$ و $A_۷$ بطور واضح ۱—همانگو هستند برای اثبات $A_۱$ ما نشان می دهیم که

$$۱ \leqslant (x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$$

یعنی با سه بار استفاده از مانده

$$(x \Rightarrow y) \star (y \Rightarrow z) \star x \leqslant z$$

اما این نتیجه می شود از این حقیقت که $x \star (x \Rightarrow y) = \min(x, y) \leqslant y$ و همچنین $y \star (y \Rightarrow z) \leqslant z$.

$(A_۵)$ مانده را شرح می دهد. عبارات زیر هم ارز هستند.

$$t \leqslant x \Rightarrow (y \Rightarrow z),$$
$$t \star x \leqslant (y \Rightarrow z),$$
$$t \star x \star y \leqslant z$$
$$t \leqslant (x \star y) \Rightarrow z$$

برای اثبات $(A_۴)$ مشاهده می کنیم که $[x \Rightarrow y = ۱$ یا $(y \Rightarrow x) = ۱]$ و نیز $۱ \Rightarrow y = y$ (زیرا $z \leqslant y$ اگر و تنها اگر $(z \leqslant ۱ \Rightarrow y$). برای قیاس استثنایی می بینیم که اگر $x = ۱$ و $x \Rightarrow y = ۱$ آنگاه لزوماً $y = ۱$ (زیرا $y = y \Rightarrow ۱$ مانند بالا). ■

تعریف ۷.۲.۱ سه t—نرم مهم تعریف شده در بالا (Ł—لوکاسیویچ، G—گودل، $\prod$—ضرب) منطق های مهم و معروف قویتر از BL را ارائه می دهند.

منطق لوکاسیویچ با اضافه کردن اصل نقیض دوگانه یعنی $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ $(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ به BL بنداشت سازی می شود. فرمول های برهان پذیر در این منطق دقیقاً همه‌ی Ł—همانگوها هستند.

تعریف ۸.۲.۱ بنداشت‌های لوکاسیویچ در زیر آمده است.

$(Ł_۱)$ $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

$(Ł_۲)$ $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

($Ł_۳$) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

($Ł_۴$) $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$

منطق ضربی، $\prod$، BL است بعلاوه دو بنداشت اضافی زیر

(۱) $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

(۲) $\neg\neg\chi \to (((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi)) \to (\varphi \to \chi))$

منطق گودل، G، BL هست بعلاوه تنها بنداشت $\varphi \equiv \varphi\&\varphi$ یعنی خود توانی عطف قوی. همچنین توجه کنید که دو عطف $\wedge$ و $\&$ تنها در منطق گودل هم ارز هستند و در منطق های دیگر چنین نیست.

عطف مینیمم $\wedge$، خود توان است. فرمول $\varphi \equiv \varphi \wedge \varphi$ یک BL—همانگو است اما برای عطف قوی $\&$، چنین نیست. برای مثال در منطق لوکاسیویچ اگر $e_Ł(\varphi) = ۰.۷$ آنگاه

$$e_Ł(\varphi\&\varphi) = e_Ł(\varphi) \star e_Ł(\varphi) = \max(۰, ۰.۷ + ۰.۷ - ۱) = ۰.۴$$

لم ۹.۲.۱ BL خواص زیر را برای استلزام اثبات می کند.

(۱) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(۲) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$

(۳) $\varphi \to \varphi$

برهان:

(۱) بنابر $(A_۲)$، $\vdash (\varphi\&\psi) \to \varphi$؛ طبق $(A_۵)$، $\vdash ((\varphi\&\psi) \to \varphi) \to (\varphi \to (\psi \to \varphi))$.

بنابراین بوسیله قیاس استثنایی $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$

(۲) بنابر $(A_۱)$