پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

عنوان:

رده‌هایی از H- ماتریس‌های کلی

استاد راهنما:

دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور:

دکتر مسعود امان

نگارنده:

خدیجه قلی‌زاده

تابستان ۱۳۹۰

قدردانی و تشکر

خداوند بلند مرتبه را شکر گذارم که توفیقی دیگر نصیبم نمود تا پله‌ای از مدارج علم و دانش را بپیمایم. بر خود لازم می‌دانم از عزیزانی که در این راه مرا یاری نموده‌اند قدردانی و تشکر نمایم.

مراتب تشکر و سپاس خود را از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر مهدی پناهی ابراز می‌دارم که همچون پدری دلسوز با راهنمایی‌ها و هدایت گرانبهایشان مرا در تدوین این پایان نامه یاری نمودند.

همچنین از استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر مسعود امان که راهنمایی بسیار ارزشمند برای من در طول تحصیلم در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد بوده‌اند نیز کمال تشکر را دارم.

از پدر، مادر و همسرم که در طول نگارش این پایان نامه همواره در کنار من بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

فرض کنید $M(A)$ ماتریس مقایسه‌ی یک Hـ ماتریس مربعی A را نشان دهد، یعنی، $M(A)$ یک Mـ ماتریس باشد. Hـ ماتریس‌هایی که ماتریس‌های مقایسه‌شان نامنفرد هستند، به خوبی در منابع علمی مطالعه شده‌اند. در این تحقیق، مشخص‌سازی‌های Hـ ماتریس‌هایی که ماتریس‌های مقایسه‌شان منفرد یا نامنفرد هستند را مطالعه می‌کنیم. شعاع طیفی ماتریس ژاکوبی $M(A)$ و خاصیت غالب قطری تعمیم یافته در مشخص‌سازی‌ها استفاده شده است. سرانجام، یک رده‌بندی از مجموعه‌ی Hـ ماتریس‌های کلی به دست می‌آید.

کلمات کلیدی: Hـ ماتریس‌ها، ماتریس‌های غالب قطری تعمیم یافته، ماتریس ژاکوبی

جدول نمادها

مجموعه‌ی اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
مجموعه‌ی اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه‌ی بردارهای n- تایی حقیقی	$\mathbb{R}^n$
مجموعه‌ی بردارهای n- تایی مختلط	$\mathbb{C}^n$
مجموعه‌ی ماتریس‌های مختلط $m \times n$	$\mathbb{C}^{m\times n}$
مجموعه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$	$\mathbb{R}^{m\times n}$
ماتریس همانی	I
ترانهاده‌ی ماتریس A	A^T
معکوس A	$A^{-۱}$
طیف ماتریس A	$\sigma(A)$
شعاع طیفی ماتریس A	$\rho(A)$
دترمینان A	$\det A$
نرم برداری x	$\|\|x\|\|$
نرم ماتریسی A	$\|\|A\|\|$
ماتریس قطری با عناصر قطری $d_۱$، ...، d_n	$\mathrm{diag}(d_۱, \ldots, d_n)$
ترانهاده‌ی هرمیتی A	A^H
ماتریس مقایسه‌ی A	$M(A)$
قسمت حقیقی $\lambda(A)$	$\mathrm{Re}\ \lambda(A)$
پایان برهان	$\square$

پیشگفتار

Hـ ماتریس‌ها در روش‌های تکراری دستگاه‌های خطی زیاد استفاده شده‌اند، زیرا آن‌ها در بسیاری از کاربردها مانند حل عددی بعضی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی ظاهر می‌شوند. بعلاوه، Hـ ماتریس‌ها ارتباط نزدیکی با Mـ ماتریس‌ها دارند [۲].

فرض کنید A یک Hـ ماتریس باشد. اگر ماتریس مقایسه‌ی آن، یعنی $M(A)$، نامنفرد باشد، آن گاه A نامنفرد است [۱۱]. این حقیقت، باعث می‌شود که خیلی از مؤلفان که تنها Mـ ماتریس‌ها را نامنفرد فرض می‌کنند، به این نتیجه برسند که Hـ ماتریس‌ها همیشه نامنفرد هستند.

در این تحقیق نشان داده می‌شود که Hـ ماتریس‌ها می‌توانند منفرد باشند و یک Hـ ماتریس A می‌تواند نامنفرد باشد، در حالی که $M(A)$ ممکن است منفرد باشد.

مشخص‌سازی‌های مختلفی از Mـ ماتریس‌های منفرد و نامنفرد در [۲] آورده شده است. در مورد Hـ ماتریس‌ها خواهیم دید که نامنفردی ماتریس A و ماتریس مقایسه‌ی آن انواع مختلفی از Hـ ماتریس‌ها را نتیجه می‌دهد.

آن چه در این تحقیق خواهد آمد، به قرار زیر است:

در فصل ۱ تعاریف، مفاهیم و توضیحاتی را که در روند تحقیق به کار گرفته خواهند شد و آشنایی با آن‌ها برای مطالعه و درک مؤثر مطالب این تحقیق ضروری خواهند بود، ارائه

می‌شود.

در فصل ۲ به تعریف Mـ ماتریس‌ها و Hـ ماتریس‌ها می‌پردازیم. این فصل شامل دو بخش است. بخش اول شامل Mـ ماتریس‌ها و خواص آن‌ها است که در آن به ارائه‌ی تعاریف و شرایط معادل برای Mـ ماتریس‌ها پرداخته شده است. بخش دوم شامل Hـ ماتریس‌ها و خواص آن‌ها است. به ویژه، مثال‌هایی ارائه شده که منفردی بعضی از Hـ ماتریس‌ها را نشان می‌دهد.

فصل ۳ شامل نتایج مشخص‌سازی Hـ ماتریس‌ها است. Hـ ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر با جزئیات بیشتری مطالعه می‌شوند.

سرانجام، سه رده از Hـ ماتریس‌ها که یکی از آن‌ها با ماتریس مقایسه‌ی نامنفرد و دو تای دیگر با ماتریس مقایسه‌ی منفرد هستند در فصل ۴، مشخص شده‌اند. همچنین، الگوریتم‌هایی برای تعیین Hـ ماتریس‌هایی با $M(A)$ی نامنفرد، ارائه شده است.

کلیه‌ی محاسبات عددی در این تحقیق به وسیله‌ی نرم افزار MATLAB انجام شده است.

[report]

رده‌هایی از Hـ ماتریس های کلی

استاد راهنما:

دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور:

دکتر مسعود امان

نگارنده:

خدیجه قلی زاده

تابستان ۱۳۹۰

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و نتایج مقدماتی

در این فصل ابتدا مفاهیم، تعاریف و قضایایی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه بیان می‌شود. سپس نرم‌های برداری و ماتریسی تعریف و چند قضیه در ارتباط با آن‌ها بیان می‌گردد. در انتها یک جداسازی از یک ماتریس را تعریف کرده و براساس آن ماتریس تکرار ژاکوبی یک ماتریس را بیان می‌کنیم.

۱.۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

ابتدا تعاریفی در مورد ماتریس‌ها که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را می‌آوریم. سپس تعاریف و قضایایی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی n ارائه می‌شود.

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های مختلط $m \times n$ را با $\mathbb{C}^{m\times n}$ و مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ را با $\mathbb{R}^{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

۱.۱ تعریف. اگر $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$، آن گاه ماتریس قدر مطلق A را با $|A|$ نشان داده و به صورت

$$|A| = (|a_{ij}|), \quad i = ۱, ۲, \dots, m, \; j = ۱, ۲, \dots, n,$$

تعریف می‌کنیم.

۲.۱ تعریف. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفی (مثبت، نامثبت، منفی) است هرگاه تمام درایه‌هایش نامنفی (مثبت، نامثبت، منفی) باشند و می‌نویسیم $A \geq ۰$ $(A > ۰, A \leq ۰, A < ۰)$.

تعریف فوق برای بردارها نیز برقرار است.

۳.۱ تعریف. ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، $A=(a_{ij})$ را متقارن نامیم، هرگاه

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad i,j=۱,\ldots,n.$$

۴.۱ تعریف. ماتریس $n\times n$ قطری D را با $D=\operatorname{diag}(d_۱,d_۲,\ldots,d_n)$ نشان داده که در آن $d_۱$، $d_۲$، … ، d_n عناصر قطری و سایر عناصر صفر هستند.

۵.۱ تعریف. ماتریسی که از تعویض سطرها (یا ستون‌های) ماتریس همانی به دست می‌آید یک ماتریس جایگشت نامیده می‌شود.

ضرب ماتریس جایگشت P از چپ (راست) در ماتریس A باعث تعویض سطرهای (ستون‌های) آن می‌شود.

۶.۱ مثال. ماتریس جایگشت P و ماتریس A به صورت

$$P=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

داده شده‌اند. در این صورت

$$AP=\begin{pmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ -۲ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}, \qquad PA=\begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ & ۵ \end{pmatrix}.$$

۷.۱ تعریف. ماتریس‌های مربعی A و B را متشابه گویند هرگاه ماتریسی نامنفرد مانند S وجود داشته باشد به طوری که $B=S^{-۱}AS$.

۸.۱ تعریف. فرض کنید $A=(a_{ij})$ ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی n باشد. در این صورت

۱) A بالا مثلثی (پایین مثلثی) گفته می‌شود هرگاه تمام عناصر زیر (بالای) قطر اصلی آن صفر باشد.

۲) A منفرد نامیده می‌شود هرگاه $\det A = 0$، در غیر این صورت آن را نامنفرد گویند.

۳) مزدوج A به صورت $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ تعریف می‌شود.

۴) ترانهاده‌ی هرمیتی A را با A^H نشان داده و به صورت

$$A^H = \bar{A}^T$$

تعریف می‌شود. پس $A^H = (\bar{a}_{ji})$.

۵) A هرمیتی است هرگاه $A^H = A$.

٦) A غالب قطری (سطری) است هرگاه برای هر $i = 1, \ldots, n$،

$$| a_{ii} | \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} |$$

و هرگاه برای هر $i = 1, \ldots, n$، نامساوی فوق به صورت اکید برقرار باشد، A غالب قطری (سطری) اکید است و با SDD[1] نمایش داده می‌شود.

۷) A غالب قطری تعمیم یافته است هرگاه بردار $d = [d_1, d_2, \ldots, d_n]^T > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i = 1, \ldots, n$،

$$| a_{ii} | \, d_i \;\; \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} | \, d_j$$

و هرگاه برای هر $i = 1, \ldots, n$، نامساوی فوق به صورت اکید برقرار باشد، A غالب قطری اکید تعمیم یافته نامیده می‌شود و با $GSDD$[2] نمایش داده می‌شود.

۸) A همگرا (به صفر) است اگر دنباله ماتریس‌های A، A^2، A^3، ... همگرا به ماتریس صفر باشد.

[1] Strictly diagonally dominant

[2] Generalized strictly diagonally dominant

۹.۱ مثال. ماتریس
$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$
غالب قطری نمی‌باشد. با انتخاب $d = [۱, ٦, ۴]^T$ واضح است که A ماتریسی غالب قطری تعمیم یافته است.

۱۰.۱ تعریف. ماتریس $n \times n$ مختلط A، معین مثبت نامیده می‌شود هرگاه $A = A^H$ و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x \neq ۰$،

$$x^H A x > ۰.$$

در حالتی که A حقیقی باشد، A معین مثبت نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq ۰$، $x^T A x > ۰$.

۱۱.۱ تعریف. عدد $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس A نامیده می‌شود هرگاه بردار غیر صفری مانند x چنان موجود باشد که $Ax = \lambda x$. چنین برداری را بردار ویژه‌ی A نظیر مقدار ویژه‌ی λ می‌نامیم.

اگر λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، A و x بردار ویژه‌ی متناظر با آن باشد آن گاه

$$Ax = \lambda x$$

یا به طور معادل

$$(A - \lambda I)x = ۰.$$

دستگاه خطی $(A - \mu I)x = ۰$ دارای جواب غیر بدیهی است اگر و تنها اگر

$$\det(A - \mu I) = ۰.$$

واضح است که

$$\varphi(\mu) = \det(A - \mu I)$$

یک چند جمله‌ای درجه‌ی n بر حسب μ می‌باشد که چند جمله‌ای مشخصه‌ی A نامیده می‌شود. ریشه‌های این چند جمله‌ای مقادیر ویژه‌ی A هستند. اگر λ_1، λ_2، ... ، λ_k ریشه‌های متمایز چند جمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A باشند آن گاه می‌توان $\varphi(\mu)$ را به صورت

$$\varphi(\mu) = (-1)^n (\mu - \lambda_1)^{\sigma_1} (\mu - \lambda_2)^{\sigma_2} \dots (\mu - \lambda_k)^{\sigma_k}$$

نمایش داد. عدد صحیح $\sigma_i = \sigma(\lambda_i)$ مرتبه‌ی تکرار جبری[۳] مقدار ویژه‌ی λ_i نامیده می‌شود.

یک مقدار ویژه‌ی λ از ماتریس A یک مقدار ویژه‌ی ساده است هرگاه مرتبه‌ی تکرار جبری آن برابر ۱ باشد.

۱۲.۱ مثال. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. چند جمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت

$$\det(A - \mu I) = \mu^3 - 10\mu^2 + 32\mu - 32$$

است و مقادیر ویژه‌ی A ریشه‌های معادله‌ی

$$\mu^3 - 10\mu^2 + 32\mu - 32 = 0$$

هستند. می‌توان نشان داد که مقادیر ویژه‌ی A، به صورت

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \qquad \lambda_3 = 2$$

می‌باشند.

[۳] Algebraic multiplicity

۱۳.۱ تبصره. فرض کنید λ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و x بردار ویژه‌ی نظیر آن باشد. در این صورت

۱) ماتریس A^i دارای مقدار ویژه‌ی λ^i با بردار ویژه‌ی نظیر x است.

۲) اگر α و τ اسکالرهای دلخواهی باشند، آن گاه ماتریس $\alpha I - \tau A$ دارای مقدار ویژه‌ی $\alpha - \tau\lambda$ با بردار ویژه‌ی نظیر x است.

۳) اگر A معکوس‌پذیر باشد، آن گاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه‌ی A^{-1} با بردار ویژه‌ی نظیر x است.

۱۴.۱ تعریف. مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را طیف A نامیده و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهیم.

۱۵.۱ تعریف. فرض کنید λ_i، $i = 1, \ldots, n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، A باشند. شعاع طیفی A را با $\rho(A)$ نشان داده و به صورت

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|,$$

تعریف می‌شود.

۱۶.۱ مثال. ماتریس A در مثال ۱۲.۱، را در نظر بگیرید. داریم

$$\sigma(A) = \{4, 4, 2\}, \quad \rho(A) = 4.$$

تعبیر هندسی. اگر همه‌ی مقادیر ویژه‌ی λ_i از A در صفحه‌ی مختلط رسم شوند آن گاه $\rho(A)$ شعاع کوچک‌ترین دیسک $|Z| \leq R$ به مرکز مبدأ می‌باشد که همه‌ی مقادیر ویژه‌ی A را شامل می‌شود.

۱۷.۱ قضیه (گرشگورین[۴]) فرض کنید $A = (a_{ij})$ ماتریس مربعی مرتبه‌ی n و D_i نمایشگر دیسکی در صفحه‌ی اعداد مختلط به مرکز a_{ii} و به شعاع $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ باشد. به عبارت دیگر

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}.$$

در این صورت مقادیر ویژه‌ی A در مجموعه‌ی $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ قرار دارند و اجتماع هر k تا از این دیسک‌ها که $n-k$تای دیگر را قطع نکند، دقیقاً شامل k مقدار ویژه (با شمارش مرتبه‌ی تکرار) می‌باشد.

برهان. به [۱۲] رجوع شود. □

۱۸.۱ مثال. دیسک‌های گرشگورین ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

به صورت

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - 4| \leq 2\},$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - 2| \leq 1\},$$

$$D_3 = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - 9| \leq 2\},$$

هستند. با رسم این دیسک‌ها نتیجه می‌گیریم که یک مقدار ویژه‌ی A در D_3 و دو مقدار ویژه‌ی دیگر در $D_1 \cup D_2$ قرار دارند.

۱۹.۱ قضیه. دترمینان ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، A برابر حاصل ضرب مقادیر ویژه‌اش می‌باشد.

---

[۴] Gerschgorin

برهان. به [۷] رجوع شود. □

۲۰.۱ قضیه. ماتریس‌های متشابه دارای چند جمله‌ای‌های مشخصه‌ی یکسان هستند.

برهان. به [۷] رجوع شود. □

۲۱.۱ گزاره. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ با خاصیت $A \geq |B| \geq ۰$ باشند. در این صورت

$$\rho(B) \leq \rho(A).$$

برهان. به [۱۴] رجوع شود. □

۲۲.۱ مثال. ماتریس‌های A و B را به صورت

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۴ & -۱ \\ -۱ & ۱ & -۲ \end{pmatrix},$$

در نظر بگیرید. به وضوح $A \geq |B| \geq ۰$. با محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس نتیجه می‌گیریم که $۴/۵۷۸۰ = \rho(B) < \rho(A) = ۷/۲۳۶۱$.

۲۳.۱ قضیه. ریشه‌های مختلط یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی، به صورت زوج‌های مزدوج هستند.

برهان. به [۴] رجوع شود. □

۲۴.۱ تعریف. ماتریسی که از حذف سطرها و ستون‌های یکسان ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، $A = (a_{ij})$ به دست می آید یک زیر ماتریس اصلی A نامیده می‌شود. زیر ماتریس اصلی پیشروی مرتبه‌ی k، $k = ۱, ۲, \ldots, n$، از A به صورت

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & \ldots & a_{۱k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k۱} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

تعریف می‌شود.

۲۵.۱ قضیه. اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس نامنفی و A_k یک زیر ماتریس اصلی مرتبه‌ی kام آن باشد، آن گاه

$$\rho(A_k) \leq \rho(A).$$

برهان. به [۱۰] رجوع شود. □

۲۶.۱ تعریف. ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ برای $n \geq ۲$، تحویل‌پذیر نامیده می‌شود اگر یک ماتریس جایگشت $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ موجود باشد به طوری که

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{۱۱} & ۰ \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{pmatrix}$$

یا

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ ۰ & A_{۲۲} \end{pmatrix},$$

که در آن $A_{۱۱}$ و $A_{۲۲}$ ماتریس‌های مربعی و ۰ یک ماتریس صفر است. در صورتی که چنین ماتریس جایگشتی موجود نباشد، ماتریس A تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود. اگر A یک ماتریس ۱×۱ با تک درایه‌ی صفر باشد، آن گاه A ماتریسی تحویل‌پذیر و در غیر این صورت تحویل‌ناپذیر است.

۲۷.۱ مثال. ماتریس‌های A و B را به صورت

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & ۲ & ۵ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۱ & ۴ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۲ \end{pmatrix}$$

در نظر بگیرید. با فرض

$$P = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$