بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

طبقه بندی الگوهای انتگرال گیری روی سوپرمنیفلدها

گردآورنده:

سید سجاد پورمرتضوی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل عزیزپور

شهریور ۱۳۹۱

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

طبقه‌بندی الگوهای انتگرال‌گیری روی سوپرمنیفلدها

دانشجو:

سید سجاد پورمرتضوی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل عزیزپور

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد، در دو فصل اول، مقدماتی را فراهم می‌آوریم تا بتوانیم به کمک آن منیفلد را از دیدگاه هندسه جبری بیان کنیم. در فصل سوم و چهارم، مقدمات لازم برای تعریف سوپرمنیفلد (منیفلد مدرج) و تعریف انتگرال نامعین روی سوپرمنیفلد $\mathbb{R}^{1,1}$، از نگرشی جدید آورده می‌شود. در ادامه جزئیات فصل‌ها را تفصیل می‌کنیم. مرجع اصلی در فصل اول و دوم، کتاب تنیسون [1] [۲۸] می‌باشد، البته از مراجع دیگری نیز استفاده شده که در متن به آن‌ها اشاره می‌کنیم. در فصل اول پس از تعریف پریشیف، شیف و ریخت میان آن‌ها، موضوع کلی دستگاه‌های جهت‌دار شده را مطرح می‌کنیم و به تعریف حد مستقیم برای این دستگاه می‌پردازیم. آنگاه پریشیف‌ها را در همسایگی یک نقطه به عنوان یک دستگاه جهت‌دار شده در نظر می‌گیریم تا حد مستقیم برای یک پریشیف معنی داشته باشد و این حد مستقیم را ساقه پریشیف (شیف) در آن نقطه می‌نامیم و سپس به دو طریق ثابت می‌کنیم هر دستگاه جهت‌دار از پریشیف‌ها در همسایگی یک نقطه، دارای حد مستقیم است و این حد مستقیم‌ها در حد یکریختی مساویند. همچنین، نشان می‌دهیم هر ریخت میان پریشیف‌ها یک ریخت میان ساقه‌های متناظر القا می‌کند. پس از معرفی فضای شیف و ریخت میان آن‌ها، ارتباط میان یک فضای شیف و یک پریشیف را بیان می‌کنیم. در واقع به ساختن شیف از روی فضای شیف و فضای شیف از روی پریشیف می‌پردازیم. در ضمن ثابت می‌کنیم ساقه‌های یک پریشیف با تارهای شیف‌سازش یکریخت هستند. در پایان، فصل را با تعریف فضای شیف از گروه‌های آبلی به اتمام می‌رسانیم. در فصل دوم ابتدا با بیان مفاهیم مجرد رسته‌ها و تابعگرها، پریشیف‌ها و شیف‌ها را به عنوان یک تابعگر همورد نگاه می‌کنیم و در ادامه، پریشیف هسته یک ریخت و پریشیف هم‌هسته یک ریخت را مطرح کرده سپس در حکم‌هایی به ارتباط میان پرشیف هسته (هم‌هسته) یک ریخت و تکریختی‌ها (بروریختی‌ها) و ارتباطی که موارد ذکر شده با ریخت القایی میان ساقه‌ها دارند می‌پردازیم. در پایان، فضاهای هندسی و منیفلد را تعریف کرده و با مثالی فصل را به پایان می‌رسانیم. مرجع اصلی در فصل سوم کتاب توینمن [2] [۲۹] است. البته همانند فصل اول و دوم از مراجع دیگری نیز استفاده شده که در متن اشاره می‌کنیم. در فصل سوم، حلقه ، مدول، جبر و مشتق مدرج را تعریف می‌کنیم که به نوعی تعمیم حلقه، مدول، جبر و مشتق رایجی هستند که می‌شناسیم. سپس همان‌طور که انتظار می‌رود احکام و قضایا در حالت غیرمدرج را اینجا بررسی می‌کنیم. مرجع اصلی در بخش اول فصل چهارم، پایان‌نامه دکتری لیتس [3] [۱۲] و در بخش‌های دیگر، مقاله [۲٤] می‌باشد. در بخش اول ابتدا مفهوم سوپردامنه را مطرح کرده و سپس به تعریف سوپرمنیفلد می‌پردازیم. هدف اصلی در بخش‌های دوم و سوم، طبقه‌بندی انتگرال‌های نامعینی است که می‌توان بر روی $\mathbb{R}^{1,1}$ تعریف کرد. این طبقه‌بندی ابتدا با نگاه کردن به کنش (عمل) گروه دیفئومورفیسم G بر روی جبرلی مدرج $\mathrm{Der}C^{\infty}(\mathbb{R}^{1,1})$، روی حلقه مدرج $C^{\infty}(\mathbb{R}^{1,1})$ صورت گرفته است. این کنش چندین مدار داشته و برخی از این مدارات نمایش جالبی دارند. مجموعه تمام مشتقاتی که ضرایب ثابت دارند سوپر جبرلی مدرج $gl_{1,1}$ نامیده می‌شود. می‌توان زیرگروه پایدارساز H زیرمجموعه G، از $gl_{1,1}$ را تحت $G-$ کنش داده شده تعیین کرد. مشخص شده است، $H-$ مدار هایی که در $gl_{1,1}$ تجزیه می‌شوند، به راحتی قابل

[1] Tennison
[2] Tuynman
[3] Leites

توصیف هستند (حکم (٤-٢-١٧)). مسئله یافتن یک معکوس راست مانند I_D برای مشتق $D:C^\infty(\mathbb{R}^{1,1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{1,1})$، ابتدا برای Dهای متعلق به $gl_{1,1}$ پیشنهاد شد، دقیقا تعیین شده کدام H-مدارها در $gl_{1,1}$، هرعنصرشان معکوس‌پذیر راست است (قضیه (٤-٣-٣)). اصولا دو نوع مختلف از چنین مداراتی وجود دارند که مشتقات مربوط به آن‌ها به ترتیب معکوس‌پذیر راست از نوع (١) و نوع (٢) نامیده می‌شوند. فرمول صریحی برای معکوسات راست D یعنی I_D، به‌دست آمده و نشان داده شده، معکوس راست برای مشتق D که توسط زوج اولیه (t_0,α) پارامتری می‌شود یکتا است. آن را انتگرال نامعین، نسبت به D با شرط اولیه α در نقطه پایه t_0 نامیده و با نماد $I_{(D;t_0,\alpha)}$ نشان می‌دهیم. در حکم (٤-٣-٩) نشان داده شده است که به‌طور طبیعی چه ارتباطی میان انتگرال‌های نامعینِ مشتقات مختلفِ معکوس‌پذیر راست از $gl_{1,1}$، در یک H-مدار وجود دارد. علاوه بر این، مشاهده شده که چنین H-هم‌ارزی‌هایی معلول فرمول تغییر متغیر مربوط به دیفئومورفیسم‌های H است. با این نتیجه که پیش رویمان است، علامت انتگرال نامعین را به مشتقات کلی‌تری نسبت به $gl_{1,1}$ تعمیم می‌دهیم. در واقع خاصیت هم‌ارزی انتگرال‌ها از H، به کل گروه دیفئومورفیسم‌های $\mathbb{R}^{1,1}$، یعنی G تعمیم یافته است. مشتق D متعلق به $DerC^\infty(R^{1|1})$ را معکوس‌پذیر راست می‌نامیم، هرگاه در G-مدار یک مشتق با ضرایب ثابت، که با توجه به قضیه (٤-٣-٣)، معکوس‌پذیر راست است، قرار داشته باشد. به‌طور کلی، فرمول تغییر متغیر یک عبارت هم‌ارزی با توجه به گروه دیفئومورفیسم‌های $\mathbb{R}^{1,1}$ یعنی G است. مشاهده می‌کنیم فرمول‌های انتگرال‌گیری مختلف برای منیفلدهای مدرج که در متن معرفی شده‌اند، به‌صورت مثال‌هایی خاص از طبقه‌بندی ما ظاهر می‌شوند. دلایل متعددی وجود دارد که مسئله انتگرال‌گیری روی $\mathbb{R}^{1,1}$ را قبل از تلاش برای توسعه نظریه انتگرال‌گیری روی منیفلدهای مدرج در نظر بگیریم (به عنوان مثال مراجع [٣١، ٣٢] را ببینید تا نیاز بحثمان برای یک نگرش مناسب به نظریه انتگرال‌گیری از دید کوهومولوژی[٤] تکمیل شود). اول از همه، ارتباط $\mathbb{R}^{1,1}$ در نظریه منیفلدهای مدرج از این واقعیت سرچشمه می‌گیرد که بخش‌های ساختار شیف داده شده منیفلد مدرج M، می‌تواند در تناظر یک به یک با ریخت‌های $M \to R^{1,1}$ میان منیفلدهای مدرج قرار بگیرد (حکم (٤-٢-٣) و مراجع [١٥، ٢٣] را ببینید). انتگرال‌گیری روی منیفلدهای مدرج مورد علاقه فیزیک‌دانان بوده و از این رو مفهوم ابرتقارن[٥] در دهه ٧٠ معرفی شد. منبع بسیار معروف در انجام انتگرال‌گیری میدان‌های فرمیونی[٦]، انتگرال برزین[٧] می‌باشد. شیف برزین شیف بسیار کارایی برای تحلیل کردن روی منیفلد مدرج است. با این حال، تنها کسر کوچکی از اطلاعات در مورد منیفلد مدرج وجود دارد که می‌توان از طریق انتگرال برزین به‌دست آورد. در حقیقت همچنان که بُعد فرد منیفلد مدرج بیشتر می‌شود، تعداد بیشتری از بخش‌های مختلف شیف برزین (که به آن‌ها فرم‌های برزین[٨] می‌گویند) انتگرال برزین یکسانی دارند. از این رو هدف ساختن تمایزات ظریف‌تر بین بخش‌های شیف برزین، انتگرال برزین ضعیف است. دقیقا همین دلیل بوده که به ما انگیزه داده تا مسئله انتگرال‌گیری بر روی منیفلدهای مدرج را با یک دیدگاه تازه‌تر پیگیری کنیم. ما در نهایت

[٤] Cohomology
[٥] Supersymmetry
[٦] Fermionic
[٧] Berezin Integral
[٨] Berezin Forms

متذکر می‌شویم که مفاهیم کاملا جدیدی مربوط به مسئله انتگرال‌گیری در جبرهای هاپف[۹] وجود دارد، که وقتی درجه‌بندی $\mathbb{Z}_2$ در نظر گرفته می‌شود، انتگرال برزین می‌تواند از آن بیرون بیاید.

[۹] Hopf

چکیده:

عنوان پایان‌نامه: طبقه‌بندی الگوهای انتگرال‌گیری روی سوپرمنیفلد $\mathbb{R}^{1,1}$

نگارنده: سید سجاد پورمرتضوی

مسئله انتگرال‌گیری در $\mathbb{R}^{1,1}$ به وسیله نگاه به مشتقاتی از این منیفلد مدرج که معکوس راست می‌پذیرد قابل پیگیری است. فرمول‌های انتگرال‌گیری که از این طریق بروز پیدا می‌کنند بر اساس کنش (عمل) گروه دیفئومورفیسم $\mathbb{R}^{1,1}$ طبقه‌بندی می-شوند. انتگرال برزین، و سایر فرمول‌های انتگرال‌گیری که در مباحث منیفلدهای مدرج پیشنهاد شده‌اند به عنوان مثال‌هایی از معکوس‌های راست، برای مشتقات خاصی ارائه شده‌اند.

کلید واژه: شیف، جبر مدرج، منیفلد مدرج، انتگرال برزین

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس خداوند عز و جل را، که با یاری او این پایان‌نامه به اتمام رسید.

از زحمات فراوان والدین، برادر و اساتیدم در طول دوران تحصیل، کمال تشکر را دارم. بخصوص از استادم آقای دکتر عزیزپور به خاطر کمک‌های علمی و حکیمانه ایشان سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر میر محمد رضایی به خاطر ایده‌ها و نظرات ارزشمند ایشان برای ادامه کار و همچنین داوری این پایان‌نامه صمیمانه تشکر می‌کنم.

از جناب آقای دکتر داوود احمدی دستجردی که کار داوری این پایان‌نامه را پذیرفته و با دقت نظر و ظرافت فراوان خود، پیشنهادهای ارزنده‌ای در جهت بهبود این پایان‌نامه داشتند تشکر می‌کنم.

از جناب آقای دکتر حبیب الله انصاری که در مباحث جبری این پایان‌نامه مرا یاری کردند، نهایت سپاسگزاری را دارم.

از دوست بسیار خوبم جناب آقای دکتر اولیایی به خاطر بحث‌های علمی و مفید ایشان و این‌که همواره در تمام مراحل زندگی‌ام یار و مشوق من بوده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از همه کسانی که در اتمام این پایان‌نامه مرا یاری نمودند، بخصوص آقایان سیامک کیوانی، محمد رسول معصومی، سید مصطفی شمس، احسان اولیایی، عابدین علیدوست، مجتبی کریم‌دوخت، کریم محمدی، محمد رزاقی از صمیم قلب متشکرم.

فصل اول

نظریه شیف‌ها

فصل دوم

فضای حلقوی

فصل سوم

مقدمات نظریه درجه‌بندی

فصل چهارم

طبقه‌بندی روش‌های

انتگرالگیری روی سوپرمنیفلدها

(۱-۱) پریشیف‌ها

(۱-۱-۱) تعریف: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، رده[۱] F از مجموعه‌ها را، یک **پریشیف**[۲] روی X گوییم، هرگاه

الف) به ازای هر زیرمجموعه باز U از X، مجموعه‌ای به نام $F(U)$ در F وجود داشته باشد.

ب) به ازای هر دو مجموعه باز U و V از X اگر $V \subseteq U$، آنگاه نگاشتی چون $^F\rho_V^U : F(U) \to F(V)$ در F وجود داشته باشد که در خواص زیر صدق کند

۱) به ازای هر سه مجموعه باز U، V و W از X، اگر $V \subseteq U \subseteq W$، آنگاه $^F\rho_V^U \circ {}^F\rho_U^W = {}^F\rho_V^W$.

۲) به ازای هر مجموعه باز U از X، $^F\rho_U^U = Id_{F(U)}$.

در تعریف فوق $F(U)$ را، مجموعه **بخش‌های (مقطع‌های)**[۳] پریشیف F روی U و $^F\rho_V^U$ را، **نگاشت تحدید**[۴] در پریشیف F گوییم و هرگاه ابهامی نباشد نگاشت تحدید را با ρ_V^U نمایش می‌دهیم. در اغلب موارد روی پریشیف F، یک ساختار جبری هم در نظر گرفته می‌شود. پریشیف F در تعریف بالا را یک **پریشیف از یک ساختار جبری (توپولوژیکی)** گوییم، هرگاه همه $F(U)$ ها دارای آن ساختار جبری (توپولوژیکی) و نگاشت‌های تحدید، همریختی‌های[۵] بین این ساختارهای جبری (توپولوژیکی) باشند.

(۱-۱-۲) مثال: در مثال‌های زیر، پریشیف‌ها روی فضای توپولوژیک X در نظر گرفته می‌شوند.

الف) فرض کنید Y یک فضای توپولوژیک باشد. پریشیف F را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \forall\, U \in T_X & F(U) = C^Y(U) \\ \forall\, U, V \in T_X & V \subseteq U \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho_V^U : F(U) \to F(V) \\ f \mapsto f|_V \end{pmatrix}. \end{cases}$$

اگر Y دارای ساختاری جبری باشد، می‌توان همین ساختار را به پریشیف F انتقال داد. اگر X و Y دو منیفلد دیفرانسیل‌پذیر[۶] (هموار) باشند و $F(U)$ را مجموعه همه توابع دیفرانسیل‌پذیر از U به Y یعنی $C_Y^\infty(U)$ در نظر بگیریم، باز هم

---

[۱] Class

[۲] Presheaf

[۳] Sections

[۴] Restriction Map

[۵] Homomorphism

[۶] Differentiable

با تعریف فوق، F یک پریشیف می‌باشد.

ب) فرض کنید A یک مجموعه دلخواه باشد. پریشیف F را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \forall U \in T_X & F(U) = A \\ \forall U, V \in T_X & \left(\begin{matrix} V \subseteq U \Rightarrow \rho_V^U : F(U) \to F(V) \\ a \mapsto a \end{matrix} \right) \end{cases}.$$

F را **پریشیف ثابت**[۷] روی X می‌نامیم و آن را با A_X نمایش می‌دهیم.

ج) پریشیف‌های P_1 و P_2 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} P_1(X) = \mathbb{Z} \\ \forall U \in T_X \quad (U \neq X \Rightarrow P_1(U) = \{0\}) \\ \forall U, V \in T_X \left(V \subseteq U \Rightarrow \begin{cases} V \neq X \Rightarrow \rho_V^U = 0 \\ V = X \Rightarrow \rho_V^U = id_X \end{cases} \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} a \in X \\ \forall U \in T_X \quad \begin{cases} a \in U \Rightarrow \ P_2(U) = \mathbb{Z} \\ a \notin U \Rightarrow \ P_2(U) = \{0\} \end{cases} \\ \forall U, V \in T_X \left(V \subseteq U \Rightarrow \begin{cases} a \in V \Rightarrow \rho_V^U = id_{\mathbb{Z}} \\ a \notin V \Rightarrow \rho_V^U = 0 \end{cases} \right) \end{cases}.$$

در مثال فوق برای پریشیف P_2، فرض بر این است که فضای توپولوژیک X ناتهی باشد. می‌توانیم بجای $\{0\}$ هر مجموعه تک عضوی دیگری هم قرار دهیم.

(۱-۱-۳) نکته: الف) در مثال (ب)، پریشیف F را با توجه به مجموعه A می‌توان به عنوان پریشیفی از یک ساختار جبری یا توپولوژیکی در نظر گرفت.

ب) در مثال (ج)، P_1 و P_2 به وضوح پریشیف‌هایی از گروه‌های آبلی و حتی از حلقه‌ها می‌باشند.

(۱-۲) حد مستقیم

(۱-۲-۱) تعریف: الف) مجموعه Λ با یک رابطه شبه ترتیب[۸] $\leq$ را، یک مجموعه **جهت‌دار شده**[۹] گوییم هرگاه به ازای هر α و β متعلق به Λ، γ متعلق به Λ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

[۷] Constant Presheaf

[۸] Pre-order

[۹] Directed Set

قرارداد: قرار می‌دهیم $\Lambda_1=\{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Lambda \mid \alpha\le\beta\}$.

ب) یک **دستگاه جهت‌دار**[10] از مجموعه‌های اندیس‌دار، که بوسیله مجموعه جهت‌دار Λ اندیس‌گذاری شده‌اند، خانواده‌ای چون $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ از مجموعه‌ها می‌باشد به‌طوری‌که به ازای هر (α,β) متعلق به Λ_1، یک نگاشت از مجموعه‌ها به نام $\rho_{\alpha\beta}:U_\alpha\to U_\beta$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند

الف) به ازای هر α متعلق به Λ، $\rho_{\alpha\alpha}=id_{U_\alpha}$.

ب) به ازای هر α، β و γ متعلق به Λ، اگر $\alpha\le\beta\le\gamma$، آنگاه $\rho_{\beta\gamma}\circ\rho_{\alpha\beta}=\rho_{\alpha\gamma}$.

(۱-۲-۲) یادآوری: در تعریف (۱-۲-۱) (الف)، رابطه شبه ترتیب را یادآوری می‌کنیم. زیرمجموعه $\le$ از $\Lambda\times\Lambda$ را یک رابطه **شبه ترتیب** گوییم هرگاه انعکاسی[11] و متعدی[12] باشد. بنابراین هر رابطه ترتیب (ترتیب جزئی[13])، یک رابطه شبه ترتیب می‌باشد. به رابطه شبه ترتیب گاهی اوقات شبه ترتیب جزئی نیز می‌گوییم.

(۱-۲-۳) مثال: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. T_X یک مجموعه جهت‌دار شده با رابطه شبه ترتیب $U\le V\Leftrightarrow U\supseteq V$ $(U\le V\Leftrightarrow U\subseteq V)$ می‌باشد زیرا به ازای هر U و V متعلق به T_X، $U\bigcap V$ متعلق به T_X می‌باشد و از طرفی $U\bigcap V\subseteq U$ و $U\bigcap V\subseteq V$. البته رابطه‌ای که در بالا تعریف کردیم، دارای خاصیت پاد متقارن[14] نیز می‌باشد و لذا یک رابطه ترتیب (ترتیب جزئی) است. فرض کنید F یک پریشیف روی X باشد، خانواده $(F(U))_{U\in T_X}$ را در نظر می‌گیریم و به ازای هر U و V متعلق به T_X، اگر $U\le V$، آنگاه قرار می‌دهیم $\rho_{U,V}={}^F\rho_V^U$ در این صورت خانواده $(F(U))_{U\in T_X}$ با نگاشت‌های $\rho_{U,V}$ یک دستگاه جهت‌دار از مجموعه‌ها می‌باشد. توجه کنید پریشیف F را با رابطه $U\le V\Leftrightarrow U\subseteq V$ نمی‌توان به یک دستگاه جهت‌دار تبدیل کرد زیرا نگاشت‌های ${}^F\rho_V^U$ از $F(U)$ به $F(V)$ هستند.

(۱-۲-٤) تعریف: فرض کنید $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ به همراه نگاشت‌های $(\rho_{\alpha,\beta}:U_\alpha\to U_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ یک دستگاه جهت‌دار از مجموعه‌های اندیس‌دار باشد که بوسیله مجموعه جهت‌دار Λ ، اندیس‌گذاری شده است.

الف) یک **هدف**[15] برای دستگاه فوق، زوج $(V,(\sigma_\alpha:U_\alpha\to V)_{\alpha\in\Lambda})$ می‌باشد که در آن V یک مجموعه و $(\sigma_\alpha:U_\alpha\to V)_{\alpha\in\Lambda}$ یک خانواده از نگاشت‌ها است، به‌طوری‌که خانواده نگاشت‌ها در شرط سازگاری صدق کند یعنی به

---

[10] Direct System
[11] Reflexive
[12] Transitive
[13] Partial Order
[14] Antisymmetric
[15] Target

ازای هر α و β متعلق به Λ، اگر $\alpha \leq \beta$، آنگاه $\sigma_\alpha = \sigma_\beta \circ \rho_{\alpha,\beta}$.

می‌توان شرط سازگاری[١٦] را این‌طور بیان نمود، به ازای هر (α,β) متعلق به Λ_1، نمودار[١٧] (مثلث) زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \arrow[d, "\rho_{\alpha,\beta}"'] \arrow[dr, "\sigma_\alpha"] & \\
U_\beta \arrow[r, "\sigma_\beta"'] & V
\end{tikzcd} .$$

ب) یک **حد مستقیم**[١٨] برای دستگاه فوق، یک هدف مانند $(U,(\tau_\alpha : U_\alpha \to U)_{\alpha\in\Lambda})$ می‌باشد که در خاصیت عمومی[١٩] صدق می‌کند. یعنی به ازای هر هدف چون $(V,(\sigma_\alpha : U_\alpha \to V)_{\alpha\in\Lambda})$ نگاشت یکتایی مانند $f : U \to V$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر α متعلق به Λ داشته باشیم، $\sigma_\alpha = f \circ \tau_\alpha$.

(١-٢-٥) نکته: اگر بخواهیم یک هدف را تفسیر کنیم می‌توانیم بگوییم که یک هدف، شئ‌ای است که در سمت راست هر شئ دیگر قرار می‌گیرد. همچنین یک حد مستقیم بهترین هدف است. به تصویر زیر توجه کنید

$$\begin{tikzcd}
 & U_\delta \arrow[dr] & & & \\
U_\alpha \arrow[dr] & & U_\lambda \arrow[dr] & & \\
 & U_\gamma \arrow[ur] \arrow[dr] & & U_\zeta & \cdots \\
U_\beta \arrow[ur] & & U_\nu \arrow[ur] & & \\
 & U_\varepsilon \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

(١-٢-٦) حکم: فرض کنید $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ به همراه نگاشت‌های $(\rho_{\alpha,\beta} : U_\alpha \to U_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ یک دستگاه جهت‌دار از مجموعه‌ها باشد و $(U,(\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ و $(U',(\tau'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ دو حد مستقیم برای این دستگاه باشند. در این صورت این دو حد مستقیم، بطور طبیعی با یکدیگر یکریخت هستند (منظور از یکریختی این است که یک نگاشت دوسویی (یکتا) چون $f : U \to U'$ وجود دارد که با همه τ_α و τ'_α ها سازگار است یعنی به ازای هر α متعلق به Λ، $f \circ \tau_\alpha = \tau'_\alpha$).

برهان) از آنجایی که زوج $(U,(\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ یک حد مستقیم و زوج $(U',(\tau')_{\alpha\in\Lambda})$ یک هدف برای دستگاه فوق می‌باشد و برعکس، لذا بنا به خاصیت عمومی برای U و U'، نگاشتی‌هایی یکتا چون $f : U \to U'$ و $g : U' \to U$ وجود دارند به‌طوری‌که به ازای هر α متعلق به Λ، $g \circ \tau'_\alpha = \tau_\alpha$ و $f \circ \tau_\alpha = \tau'_\alpha$. بنابراین با تلفیق این دو رابطه نتیجه می‌گیریم به ازای هر α متعلق به Λ، $(g \circ f) \circ \tau_\alpha = \tau_\alpha$ و $(f \circ g) \circ \tau'_\alpha = \tau'_\alpha$. از طرفی چون هر حد مستقیمی یک هدف نیز می-

[١٦] Compatibility Condition

[١٧] Diagram

[١٨] Direct Limit

[١٩] Universal Property

باشد لذا اگر خاصیت عمومی را برای زوج $(U,(\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ به عنوان یک حد مستقیم و یک هدف به‌کار ببریم، بدست می‌آوریم $g\circ f=\mathrm{Id}_U$. برای اثبات $f\circ g=\mathrm{Id}_{U'}$ کافی است خاصیت عمومی را برای زوج $(U',(\tau'_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ به عنوان یک حد مستقیم و یک هدف به‌کار ببریم. □

(۱-۲-۷) نمادگذاری: با توجه به یکریختی که در حکم (۱-۲-۶) گفتیم و از آنجایی که حد مستقیم در حد یکریختی یکتا است، لذا از این بعد نماد $\varinjlim_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ یا $\varinjlim U_\alpha$ را برای U انتخاب می‌کنیم. البته می‌توانیم نماد ذکر شده را برای زوج $(U,(\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ نیز به‌کار ببریم.

(۱-۲-۸) قضیه: فرض کنید زوج $(U,(\tau_\alpha:U_\alpha\to U)_{\alpha\in\Lambda})$ یک هدف برای دستگاه $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ با نگاشت‌های $(\rho_{\alpha,\beta}:U_\alpha\to U_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ باشد به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کند

الف) به ازای هر u متعلق به U، α ای متعلق به Λ وجود داشته باشد به‌طوری‌که u متعلق به $\mathrm{Im}(\tau_\alpha)$ باشد.

ب) به ازای هر α و β متعلق به Λ، هر u_α متعلق به U_α و هر u_β متعلق به U_β، داشته باشیم

$$\tau_\alpha(u_\alpha)=\tau_\beta(u_\beta)\Leftrightarrow \exists\gamma\in\Lambda\ \text{ s.t }\ (\alpha\le\gamma)\wedge(\beta\le\gamma)\wedge\left(\rho_{\alpha,\gamma}(u_\alpha)=\rho_{\beta,\gamma}(u_\beta)\right).$$

در این صورت U یک حد مستقیم برای دستگاه $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ می‌باشد.

برهان) فرض می‌کنیم که $(V,(\sigma_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ یک هدف برای دستگاه $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ باشد. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $f:U\to V$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر α متعلق به Λ، نمودار ذکر شده در تعریف (۱-۲-۴)(ب)، جابجایی باشد، آنگاه چنین fای یکتا است. بنا به فرض (الف)، برای u متعلق به U، α ای متعلق به Λ وجود دارد به‌طوری‌که u عضو $\mathrm{Im}(\tau_\alpha)$ است و لذا u_αای متعلق به U_α وجود دارد به‌طوری‌که $u=\tau_\alpha(u_\alpha)$، چون f در شرط جابجایی یا همان نمودار ذکر شده صدق می‌کند بنابراین داریم $f(u)=f(\tau_\alpha(u_\alpha))=(f\circ\tau_\alpha)(u_\alpha)=\sigma_\alpha(u_\alpha)$ این نشان می‌دهد f یکتا است. حال نشان می‌دهیم چنین fای وجود دارد، از آنجا که هر u عضو U در تصویر τ_αای قرار می‌گیرد لذا $f:U\to V$ را به‌صورت $f(u)=\sigma_\alpha(u_\alpha)$ تعریف می‌کنیم. f خوش تعریف است زیرا اگر $u=\tau_\alpha(u_\alpha)=\tau_\beta(u_\beta)$ که در آن u_α متعلق به U_α و u_β متعلق به U_β می‌باشد، آنگاه با توجه به قسمت (ب)، γای متعلق به Λ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha\le\gamma$ و $\beta\le\gamma$ و $\rho_{\alpha,\gamma}(u_\alpha)=\rho_{\beta,\gamma}(u_\beta)$. حال با استفاده از نمودار

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ & U_\gamma \arrow[r] & V \\ U_\beta \arrow[ur] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

نتیجه می‌گیریم $\sigma_\alpha(u_\alpha)=\sigma_\gamma(\rho_{\alpha,\gamma}(u_\alpha))=\sigma_\gamma(\rho_{\beta,\gamma}(u_\beta)=\sigma_\beta(u_\beta)$. این ایجاب می‌کند f خوش تعریف است. f ای که در بالا تعریف کردیم در شرط عمومی نیز صدق می‌کند زیرا به ازای هر α متعلق به Λ و هر u_α متعلق به U_α

داریم $(f\circ \tau_\alpha)(u_\alpha)=f(\tau_\alpha(u_\alpha))=\sigma_\alpha(u_\alpha)$. □

عکس قضیه بالا نیز درست است نکته (۱-۲-۱۷) (ب) را ببینید.

(۱-۲-۹) ساختن (حد مستقیم): پس از تعریف حد مستقیم و بیان نکاتی در مورد آن سوالی که به ذهن می‌رسد این است که آیا برای هر دستگاه، یک حد مستقیم وجود دارد؟ جواب مثبت است. روند ساختن حد مستقیم برای یک دستگاه به شکل زیر است؛

فرض می‌کنیم $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ یک دستگاه جهت‌دار از مجموعه‌ها با نگاشت‌های $(\rho_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in\Lambda_1}$ باشد، قرار می‌دهیم $W=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\{\alpha\}\times U_\alpha$. فرض می‌کنیم (α,u_α) و (β,u_β) متعلق به W باشند، که در آن u_α متعلق به U_α و u_β متعلق به U_β است در این‌صورت رابطه $\sim$ را روی W به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(\alpha,u_\alpha)\sim(\beta,u_\beta)\Leftrightarrow \exists\gamma\in\Lambda\ \text{ s.t. }\ (\alpha\le\gamma)\wedge(\beta\le\gamma)\wedge\left(\rho_{\alpha,\gamma}(u_\alpha)=\rho_{\beta,\gamma}(u_\beta)\right).$$

رابطه $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد، انعکاسی و متقارن بودن رابطه $\sim$ بدیهی است، فقط متعدی بودن آن را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $(\alpha,u_\alpha)\sim(\beta,u_\beta)$ و $(\beta,u_\beta)\sim(\gamma,u_\gamma)$، در این‌صورت روابط زیر را داریم

$$(\alpha,u_\alpha)\sim(\beta,u_\beta)\Leftrightarrow \exists\delta\in\Lambda\ \text{ s.t. }\ (\alpha\le\delta)\wedge(\beta\le\delta)\wedge\left(\rho_{\alpha,\delta}(u_\alpha)=\rho_{\beta,\delta}(u_\beta)\right).$$
$$(\beta,u_\beta)\sim(\gamma,u_\gamma)\Leftrightarrow \exists\varepsilon\in\Lambda\ \text{ s.t. }\ (\beta\le\varepsilon)\wedge(\gamma\le\varepsilon)\wedge\left(\rho_{\beta,\varepsilon}(u_\beta)=\rho_{\gamma,\varepsilon}(u_\gamma)\right).$$

چون Λ یک مجموعه جهت‌دار است لذا ξای متعلق به Λ وجود دارد به‌طوری‌که $\delta\le\xi$ و $\varepsilon\le\xi$. بنابراین با توجه به شرط سازگاری نمودار جابجایی زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \arrow[dr] \arrow[ddrr] & & \\
& U_\delta \arrow[dr] & \\
U_\beta \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & U_\xi \\
& U_\varepsilon \arrow[ur] & \\
U_\gamma \arrow[ur] \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$

بنابراین روابط زیر را داریم

$$\rho_{\alpha,\xi}=\rho_{\delta,\xi}\circ\rho_{\alpha,\delta}\ ,\ \rho_{\beta,\xi}=\rho_{\varepsilon,\xi}\circ\rho_{\beta,\delta}\ ,\ \rho_{\beta,\xi}=\rho_{\varepsilon,\xi}\circ\rho_{\beta,\varepsilon}\ ,\ \rho_{\gamma,\xi}=\rho_{\varepsilon,\xi}\circ\rho_{\gamma,\varepsilon}.$$

حال با توجه به روابطی که از نمودار نوشته‌ایم رابطه زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\rho_{\alpha,\xi}(u_\alpha)=\rho_{\delta,\xi}(\rho_{\alpha,\delta}(u_\beta))=\rho_{\delta,\xi}(\rho_{\beta,\delta}(u_\beta))=\rho_{\beta,\xi}(u_\beta)=\rho_{\varepsilon,\xi}(\rho_{\beta,\varepsilon}(u_\beta))=\rho_{\varepsilon,\xi}(\rho_{\gamma,\varepsilon}(u_\gamma))=\rho_{\gamma,\xi}(u_\gamma).$$