بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

۱۳۵۰

دانشگاه اراک

دانشکده علوم پایه

کارشناسی ارشد رشته ریاضی (جبر لی)

تحقق چندحلقوی جبرهای لی آفین تعمیم یافته و چنبره های لی

پژوهشگر

سمیه هارونی

استاد راهنما

دکتر ولی الله خلیلی

استاد مشاور

دکتر اسماعیل پیغان

شهریور ۱۳۹۰

بسم ا... الرحمن الرحیم

تحقق چندحلقوی جبرهای لی آفین تعمیم یافته و چنبره های لی

توسط:

سمیه هارونی

پایان نامه

ارائه شده به مدیریت تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه

کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی (گرایش جبرلی)

از

دانشگاه اراک

اراک-ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با نمره: ...۱۹/۰۵... درجه: ...عالی...

دکتر ولی الله خلیلی (استاد راهنما و رئیس کمیته)........................استادیار

دکتر اسماعیل پیغان (استادمشاور)........................استادیار

دکتر محرم آقاپورنهر (داور داخلی)........................استادیار

شهریور ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر

سپاس فراوان خداوند متعال را که بار دیگر با لطف و مرحمت بیکرانش مرا یاری کرد. در ابتدا از زحمات و راهنمایی‌های روشنگرانه استاد گرانقدر و عزیز جناب آقای دکتر خلیلی کمال تشکر و تقدیر را دارم و از نظرات اندیشمندانه جناب آقای دکتر پیغان تشکر و قدردانی می‌نمایم. در نهایت از پدر و مادر فداکار و دلسوزم که روشنگر راه زندگیم هستند، سپاسگذاری می‌کنم.

چکیده

هر جبرلی کز– مودی آفین از بکار بردن جبرهای چندحلقوی تحقق می‌یابد و چون هسته‌ی جبرهای لی آفین تعمیم یافته $(EALAS)$ به عنوان یک چنبره‌ی لی بدون مرکز است، لذا مسئله‌ی تحقق جبرهای لی آفین تعمیم یافته به مسئله‌ی تحقق جبرهای لی بدون مرکز کاهش می‌یابد. هدف ما در این رساله آن است که به تحقق خانواده‌ای از چنبره‌های لی بدون مرکز که با بکار بردن جبرهای چندحلقوی تحقق می‌یابند را بررسی کنیم. ما نشان خواهیم داد که همه‌ی خانواده‌های چنبره‌های لی بدون مرکز بجز یکی از خانواده‌ها جهت این تحقق بکار می‌روند. همچنین ثابت خواهیم کرد که شرط لازم و کافی برای بکارگیری تحقق چنبره‌ی لی بدون مرکز ایزوتوپ بودن دو چنبره‌ی لی بدون مرکز است.

واژه‌های کلیدی:

جبرهای لی آفین تعمیم یافته، چنبره‌های لی، ایزوتوپی، تحقق چندحلقوی

فهرست مندرجات

مقدمه

یک جبرلی آفین تعمیم یافته ($EALA$) روی یک میدان با مشخصه‌ی صفر، شامل یک جبرلی L همراه با یک فرم دوخطی متقارن پایای ناتباهیده $(\, , \,)$ روی L و یک زیرجبر ناصفر با بعد متناهی H از L که برای $h \in H$، عملگر $\mathrm{ad}h$ آن قطری‌پذیر است، بطوریکه در اصول موضوعه‌ی طبیعی که در [۲۸] و منابع دیگر آمده است، صدق کند (اگر چه طبق تعریف جبرهای لی آفین تعمیم یافته شامل سه‌تائی $(L, H, (.,.))$ است، ولی بطور مختصر آنرا L گوئیم). یکی از اصول موضوعه به شرح این می‌پردازد که ریشه‌های همسانگرد L یک گروه آبلی آزاد Λ از مرتبه‌ی متناهی را ایجاد می‌کنند که مرتبه‌ی Λ را پوچی L نامیم. بنا بر تعریف جبرهای لی آفین تعمیم یافته نتیجه می‌گیریم که تعاریف اصول موضوعه پس از بیان ویژگیهای جبرهای لی کز − مودی[۱] آفین مدلسازی شدند. در واقع جبرهای لی کز − مودی آفین دقیقاً جبرهای لی آفین تعمیم یافته با پوچی یک هستند. پس به بررسی قضیه‌ی تحقق برای جبرهای لی آفین تعمیم یافته با پوچی مطلق بزرگتر مساوی با یک می‌پردازیم (جبرهای لی آفین تعمیم یافته با پوچی صفر، جبرهای ساده با بعد متناهی هستند که آنها را در این متن نمی‌آوریم).

روند کلاسیک برای تحقق جبرهای لی آفین با کاربرد جبرهای حلقوی در دو مرحله انجام می‌پذیرد (فصلهای ۷ و ۸ از [۲۳]). در مرحله‌ی اول، جبر مشتق به سنج مرکزثقلش از جبرهای آفین به عنوان جبر حلقوی از یک خودریختی نموداری جبرلی ساده با بعد متناهی ایجاد شده است. این جبر حلقوی بطور طبیعی با $Q \times \mathbb{Z}$ مدرج شده است، جائیکه Q شبکه‌ی ریشه‌ای سیستم ریشه‌ی تحویلناپذیر متناهی است (لزومی ندارد که سیستم ریشه تحویلناپذیر باشد). در مرحله‌ی دوم، خود جبر آفین همراه با یک زیرجبر کارتان و یک فرم دوخطی پایای ناتباهیده برای جبر آفین از جبر حلقوی مدرج با ایجاد یک توسیع مرکزی (با مرکز یک بعدی) و افزودن یک جبر مدرج (یک بعدی) از مشتقات تشکیل شده‌اند. جایگزینی برای جبر مشتق به سنج

[۱] Kac-Moody

مرکزش در نظریه $EALA$، هسته‌ی بدون مرکز جبرلی آفین تعمیم یافته است و هسته‌های بدون مرکز جبرهای لی آفین تعمیم یافته، بطور بدیهی به عنوان چنبره‌های لی بدون مرکز مشخص شده‌اند ([۳۳, ۲۷]). یک Λ — چنبره‌ی لی یا به اختصار یک چنبره‌ی لی، یک جبرلی $Q\times\Lambda$ — مدرج L است که در اصول موضوعه‌ای صدق می‌کند، جائیکه Q شبکه‌ی ریشه‌ای از سیستم ریشه‌ی تحویلناپذیر متناهی Δ و Λ گروه آبلی از مرتبه‌ی متناهی است (بخش ۱.۱). نوع سیستم ریشه‌ی Δ را نوع L و رتبه‌ی Λ را پوچی L نامیم. یک چنبره‌ی لی بدون مرکز یک چنبره‌ی لی با مرکز بدیهی است. «نهر[۲]» با شروع از چنبره‌ی لی بدون مرکز نشان داده است که چگونه مرحله‌ی دوم تحقق به روش کلاسیک انجام می‌پذیرد ([۲۸]). «نهر» بویژه چنبره‌ی لی بدون مرکز L از پوچی n را به ساختار ساده‌ای از یک خانواده $\{E(L,D,\tau)\}_{(D,\tau)}$ از جبرهای لی آفین تعمیم یافته با پوچی n با زوجهای (D,τ) پارامتری کرد که در آن D یک جبرلی از مشتقات و τ یک ۲ — همدور پایای مدرج که مقادیر آن در دوگان مدرج D به نام C است (به عنوان یک فضای برداری $E(L,D,\tau) = L\oplus C\oplus D$ و τ برای تعریف ضرب دو عضو D بکار می‌رود. بزرگترین انتخاب ممکن از D، زیرجبر مشتقات بطور مرکزی — کج از L است، $L \oplus C$ توسیع مرکزی جهانی از L است). بعلاوه او ثابت کرد که برای هر L و (D,τ)، هر جبرلی آفین تعمیم یافته ε با $E(L,D,\tau)$ به عنوان جبرلی آفین تعمیم یافته یکریخت است (قضیه ۴.۲ در [۲۸]). (دو جبرلی آفین تعمیم یافته یکریخت هستند هرگاه یک یکریختی جبرلی از یکی به دیگری موجود باشد که تا حد اسکالر ناصفر فرمهای داده شده حفظ شود و نیز حافظ زیرجبرهایی باشد که عملگر ad آن قطری‌پذیر است). از اینرو فقط در مرحله‌ی ابتدائی باید مسئله‌ی تحقق برای چنبره‌های لی بدون مرکز فرض شود. اگر $\mathbb{F}$ بطور جبری بسته و $n \geq ۱$ باشد، ساختاری از یک $\mathbb{Z}^n$ — چنبره‌ی لی بدون مرکز $LT(g,\sigma,H)$ را توصیف می‌کنیم که $\mathbb{Z}^n$ — چنبره‌ی لی چندحلقوی گوئیم. با شروع از جبرلی ساده با بعد متناهی g، یک دنباله σ از n — خودریختی‌های جابه‌جاشونده با مرتبه متناهی که در سه شرط به عنوان $(A۱)$—$(A۳)$ صدق می‌کنند و یک زیرجبر کارتان H از جبر نقطه ثابت g^σ از g ،σ است. در اولین قضیه‌ی اصلی که آنرا قضیه‌ی تحقق می‌نامیم (قضیه ۱.۳.۳)، ثابت می‌کنیم که چنبره‌های لی بدون مرکز L با

---
[۲] Neher

پوچی بزرگتر مساوی با یک، دو $-$ یکریخت با چنبره‌ی لی چندحلقوی هستند اگر و فقط اگر L جبرلی fgc باشد (به این معنا که L به عنوان یک مدول روی مرکز ثقلش با تولید متناهی است). توجه کنیم که وقتی $n = ۱$، شرائط $(A۳)$–$(A۱)$ روی خودریختی منفرد σ هم‌ارز با این شرط است که σ خودریختی نموداری باشد (بخش ۴.۳). از اینرو ارتباطی بین قضیه‌ی تحقق و قضیه‌ی تحقق کلاسیک برای جبرهای آفین وجود دارد.

قضیه‌ی تحقق ما یک جواب صادق برای مسئله‌ی تحقق چنبره‌های لی بدون مرکز و همچنین برای جبرهای لی آفین تعمیم یافته است، چون «نهر» اثبات کرد که فقط یک خانواده از چنبره‌های لی بدون مرکز که fgc نیستند، وجود دارد که جبرهای خطی ویژه‌ی مختصاتی با چنبره‌ی کوانتوم که گروه یکتاییست که گروه جابه‌جاگر نامتناهی دارد، می‌باشد (تذکر ۳.۴.۲). البته در قضیه‌ی تحقق کلاسیک، می‌دانیم که این استثنائات در پوچی یک وجود ندارد. همچنین ثابت می‌کنیم که قضیه‌ی تحقق مسئله‌ای که «ون دلوئر[۳]» در [۳۱]، بوجود آورد را حل می‌کند. در آن مقاله، نویسنده کاربرد یک استدلال حالت به حالت را نشان داد که هسته‌های بدون مرکز از هر جبرلی دو $-$ آفین می‌تواند به عنوان جبرهای چندحلقوی ساخته شوند (جبرهای دو $-$ آفین، جبرهای لی آفین تعمیم یافته با پوچی دو هستند که قبلاً هسته‌های بدون مرکز به عنوان جبرهای حلقوی از جبرهای آفین ساخته شده‌اند). کاری که «نهر» انجام داد، جنبه‌ی تحقیقاتی داشت و نظریه‌ی کلی ارائه نداد. چون هسته‌های بدون مرکز از جبرهای دو $-$ آفین fgc هستند (قسمت (۳) قضیه‌ی ۵.۵ از [۶])، قضیه‌ای که بیان کردیم، چنین ایده‌ای را ثابت می‌کند.

برای اینکه دانسته‌هایمان را از تحقق جبرهای لی آفین تعمیم یافته کامل کنیم، مهم است که بدانیم چه وقت دو چنبره‌ی لی چندحلقوی به همان خانواده از جبرهای لی آفین تعمیم یافته توسیع می‌یابد. به همین منظور، ایزوتوپی از Λ $-$ چنبره‌ی لی L به عنوان Λ $-$ چنبره‌ی لی با تعویض Λ $-$ مدرج با یک همریختی گروهی در $\mathrm{Hom}(Q, \Lambda)$ از L را بدست می آوریم. دو چنبره‌ی لی L و L' به ترتیب مدرج شده با $Q \times \Lambda$ و $Q' \times \Lambda'$ دو $-$ یکریخت گوئیم هرگاه یکریختی جبرلی از L به L' موجود باشد بطوریکه تا حد یک یکریختی Q با Q' و یک یکریختی Λ با Λ' حافظ مدرجها باشد. بعلاوه، به آنها ایزوتوپ گوئیم اگر یکی از آنها دو $-$ یکریخت با

[۳] van de Leur

ایزوتوپ از دیگری باشد. این ایزوتوپی بطور دقیق برای تمایز بین خانواده‌های جبرهای لی آفین تعمیم یافته بکار می‌رود. به دلیل اینکه، اگر دو چنبره‌ی لی بدون مرکز L و L' با یکدیگر ایزوتوپ باشند، در این صورت خانواده‌های متناظر از جبرهای لی آفین تعمیم یافته یکریخت هستند (قضیه‌ی ٦.٢ از [٧])، در همین راستا، دو سوئی از مجموعه پارامتر برای خانواده‌ی اول بتوی مجموعه پارامتر برای خانواده دوم وجود دارد بطوریکه جبرهای لی آفین متناظر یکریخت هستند. در نتیجه، اگر بعضی عضوهای اولین خانواده به عنوان جبرلی آفین تعمیم یافته به بعضی از عضوهای خانواده دوم یکریخت باشند، در این صورت L و L' ایزوتوپ هستند (قضیه‌ی ٦.١ از [٧]). بنابراین خانواده‌های جبرهای لی آفین تعمیم یافته تا حد یکریختی در تناظر یک به یک با کلاسهای ایزوتوپی چنبره‌های لی بدون مرکز هستند.

قضایای ١.٥.٣ و ٤.٦.٣، به بیان شرائط لازم و کافی برای اینکه دو $\mathbb{Z}^n$ — چنبره‌ی لی چندحلقوی $LT(g,\sigma,H)$ و $LT(g',\sigma',H')$ به ترتیب دو — یکریخت و ایزوتوپ باشند، می‌پردازد. با مشاهده‌ی بحث بالا، دومین قضیه (که با استفاده از قضیه‌ی اول اثبات شده) شرائط لازم و کافی برای یکریختی خانواده‌های جبرهای لی آفین تعمیم یافته متناظر با $LT(g,\sigma,H)$ و $LT(g',\sigma',H')$ را فراهم می‌کند. شرائط در دو قضیه، شرائط روی داده‌های ورودی (g,σ,H) و (g',σ',H') است. بویژه شرائط برای دو — یکریختی، وجود یک یکریختی $\varphi : g \longrightarrow g'$ و یک ماتریس $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ است بطوریکه $\sigma' = \varphi\, \sigma^P \varphi^{-1}$، جائیکه $(\sigma,P) \to \sigma^P$ عمل راست طبیعی از $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ روی مجموعه‌ای از دنباله‌های به طول n از خودریختی‌های جابه‌جاشونده با مرتبه متناهی از g است. روشهای اولیه در اثبات قضایا، نتایج کلی روی تحققهای جبرهای مدرج — ساده در [٣] هستند. در بخش آخر رساله، مسائل طبقه‌بندی تا حد دو — یکریختی و تا حد ایزوتوپی برای چنبره‌های لی بدون مرکز fgc با پوچی $n \geq 1$ را رسیدگی می‌کنیم. (به عنوان آنچه که ذکر کردیم، مسائل آخر هم‌ارز با طبقه‌بندی خانواده‌های جبرهای لی آفین تعمیم یافته با پوچی n تا حد دو — یکریختی هستند). این مسائل در دو راه می‌توانند طبقه‌بندی شوند. اولین راه قضایای مختصاتی را که برای چنبره‌های لی بدون مرکز از هر نوع Δ ثابت شده است، بکار می‌بریم (این قضایا را در [٧] می‌بینیم). هر دو مسائل طبقه‌بندی شده برای برخی نوعها در [٧] حل شده‌اند، اما نوعهای دیگر حل نشده‌اند.

در بخش آخر از این رساله، طبقه‌بندی دوم با کاربرد چنبره‌های لی چندحلقوی برای مسائل طبقه‌بندی پیشنهاد می‌کنیم. در این طبقه‌بندی، چنبره‌های لی بدون مرکز fgc با نوع مطلق را سازماندهی می‌کنیم (بخش ۴.۲). انجام این طبقه‌بندی برای نوع مطلق X_l داده شده، احتیاج به اطلاعات دقیق راجع به دنباله‌های خودریختی‌های جابه‌جاشونده با مرتبه متناهی (یا بطور هم‌ارز مدرج سازی با یک گروه آبلی متناهی) از یک جبرلی ساده از نوع X_l روی میدان $\mathbb{F}$ دارد. طبقه‌بندی تا حد دو — یکریختی را در قضیه‌ی ۲.۳.۴ بطور مختصر بیان کرده‌ایم. یکبار طبقه‌بندی تا حد دو — یکریختی برای یک نوع مطلق داده شده کامل شده است. با بکاربردن قضیه‌ی ۴.٦.۳، می‌توانیم نمایشگرهای کلاسهای دو — یکریختی که ایزوتوپ هستند را تعیین کنیم. علاقه‌مندیم که روشی دقیق برای مرحله‌ی آخر ارائه دهیم.

به عنوان مثال، هر دو مسائل طبقه‌بندی را برای نوع مطلق F_4 با استفاده از کار «دراپر[۴]» و «مارتین[۵]» در [۱۸] روی مدرج سازیهای جبرلی ساده از نوع F_4 حل می‌کنیم (مثالهای ۴.۳.۴ و ۵.۳.۴). انتظار داریم که با استفاده از نتایج اخیر و کلاسیک برای دنباله‌های خودریختی‌های جابه‌جاشونده یا مدرج سازیها، طبقه‌بندی را برای حداقل بعضی انواع دیگر نیز بکار ببریم (برای نمونه [۱۴, ۹, ۱۹, ۲۴]).

در پایان، مفاهیم رساله را بطور خلاصه بیان می‌کنیم. در فصل اول، به یادآوری یا اثبات ویژگیهایی می‌پردازیم که مربوط به چنبره‌های لی است. در فصل دوم، دو — یکریختی و ایزوتوپی چنبره‌های لی را معرفی می‌کنیم. در فصل سوم، به بیان ساختار چنبره‌های لی چندحلقوی و اثبات قضیه تحقق و قضایای مربوط به دو — یکریختی و ایزوتوپی چنبره‌های لی چندحلقوی می‌پردازیم. در نهایت، در فصل چهارم، مسائل طبقه‌بندی را توصیف می‌کنیم.

در سراسر این رساله، فرض می‌کنیم که $\mathbb{F}$ یک میدان با مشخصه‌ی صفر است. تمام جبرها، جبرهای روی میدان $\mathbb{F}$ هستند و Λ یک گروه جمعی آبلی است. (ابتدای فصل سوم، چون بطور خاصی با جبرهای چندحلقوی کار خواهیم کرد، فرضیاتی روی $\mathbb{F}$ و Λ قرار می‌دهیم).

اگر $B = \oplus_{\lambda \in \Lambda} B^\lambda$ یک جبر Λ — مدرج باشد، $\mathrm{supp}_\Lambda(B) = \{\lambda \in \Lambda \mid B^\lambda \neq 0\}$ را Λ — محمل از B می‌نامیم. اگر B یک جبر Λ — مدرج و B' یک جبر Λ' — مدرج باشد، گوئیم که

[۴] Draper

[۵] Martin

B و B' یکریخت $-$ یک مدرج هستند هرگاه یک یکریختی جبری $\varphi : B \longrightarrow B'$ و یک یکریختی گروهی $\varphi_{gr} : \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ موجود باشند بطوریکه برای $\lambda \in \Lambda$، $\varphi(B^{\lambda}) = B'^{\varphi_{gr}(\lambda)}$.
اگر $\Lambda = < \mathrm{supp}_{\Lambda}(B) >$، در این صورت φ_{gr} بطور یکتا با φ تعیین می‌گردد.

اگر L یک جبرلی باشد، مرکز آنرا با $Z(L)$ نشان می‌دهیم و L را بدون مرکز نامیم هرگاه $Z(L)=۰$.

این رساله براساس [۲] تدوین شده است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

بطور کلی ما در این فصل تعاریف پایه، نکات و حقایقی را که در این رساله احتیاج داریم، بیان می‌کنیم.

۱.۱ مقدماتی بر جبرهای لی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم که G یک گروه و X یک مجموعه باشد. در این صورت G یک گروه آزاد روی مجموعه‌ی X است اگر تابع $i : X \longrightarrow G$ موجود باشد بطوریکه برای هر گروه H و هر تابع $f : X \longrightarrow H$ همریختی گروهی یکتای $\tilde{f} : G \longrightarrow H$ یافت شود بطوریکه $\tilde{f}oi = f$ ($\tilde{f}oi$ نماد ترکیب دو تابع $\tilde{f}$ و i است). اگر در تعریف فوق G و H گروههای آبلی باشند، G را گروه آبلی آزاد می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم که G یک گروه متناهی باشد که به عنوان مجموع مستقیم دارای تجزیه $G = \sum_i C_i$ باشد جائیکه C_iها گروههای دوری با مرتبه‌ی m_i هستند و $m_1|m_2|...|m_r$. در این صورت گوئیم که G دارای دنباله عوامل پایای $(m_1, ..., m_r)$ است.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم که G یک گروه و e عنصر همانی آن باشد و نیز $A_1, A_2, ..., A_n$ زیرگروههای G باشند.

۱) $G = A_1 A_2 ... A_n$ (حاصلضرب مستقیم)

۲) برای هر $i = 1, 2, ..., n$، $A_i \cap \hat{A}_i = \{e\}$ که در آن $\hat{A}_i = A_1 ... A_{i-1} A_{i+1} ... A_n$،

در این صورت G حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروههای $A_1, A_2, .., A_n$ از G است که بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$G = A_1 \times A_1 \times ... \times A_n.$$

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم که G یک گروه‌آبلی متناهی از مرتبه‌ی n و $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. در این صورت G دقیقاً n شاخص متمایز دارد که با $f_1, ..., f_n$ نشان می‌دهیم که در آن شاخص، نگاشتی از G به $\mathbb{F}^{\times}$ است که این نگاشت، همریختی گروهی می‌باشد. اگر برای هر $g \in G$، $f_1(g) = 1$، آن‌گاه f_1 را شاخص اصلی G نامیم و شاخصهای دیگر را شاخصهای غیراصلی گوئیم. برای هر $g \in G$، $1 \leq j, k \leq n$ مجموعه‌ی $\{f_1, ..., f_n\}$ با تعریف عمل $(f_j . f_k)(g) = f_j(g) f_k(g)$ تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد که آنرا گروه مشخصه‌ی G گوئیم و با $\widehat{G}$ نشان می‌دهیم. شاخص اصلی f_1 عضو همانی $\widehat{G}$ است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه و X یک مجموعه باشد. گوئیم G از راست روی X عمل می‌کند هرگاه برای $x \in X$ و $g \in G$، نگاشت

$$. : X \times G \to X \ ; \ (x, g) \mapsto x.g$$

موجود باشد بطوریکه

۱) برای هر $x \in X$، داریم $x.1_G = x$.

۲) برای هر $g_1, g_2 \in G$ و $x \in X$، داریم $(x.g_1).g_2 = x.(g_1 g_2)$.

در این حالت گوئیم X یک G – راست فضاست.

همچنین گوئیم G از چپ روی X عمل می‌کند هرگاه برای $x \in X$ و $g \in G$، نگاشت

$$. : G \times X \to X \ ; (g,x) \mapsto g.x$$

موجود باشد بطوریکه

۱) برای هر $x \in X$، داریم $1_G.x = x$.

۲) برای هر $g_1,g_2 \in G$ و $x \in X$، داریم $(g_1g_2).x = g_1.(g_2.x)$.

در این حالت گوئیم X یک $G-$ چپ فضاست.

مثال ۶.۱.۱ فرض کنیم V یک فضای برداری ناصفر روی یک میدان $\mathbb{F}$ باشد. در این صورت با نمادهای معمولی فضای برداری، به هر $a \in \mathbb{F}$، یک عنصر $av \in V$ نظیر می‌شود. با این تناظر، بنا بر اصول فضای برداری، گروه $\mathbb{F}^* = (\mathbb{F}\backslash\{0\},.)$ روی مجموعه‌ی V عمل می‌کند.

تعریف ۷.۱.۱ اگر X یک $G-$ راست فضا باشد، برای $x \in X$ تعریف می‌کنیم

$$G(x) := \{\ x.g \mid g \in G\ \} \subseteq X$$

که آنرا مدار x تحت G نامیم.

تعریف ۸.۱.۱ اگر X یک $G-$ راست فضا باشد، گوئیم G بطور انتقالی روی X عمل می‌کند هرگاه برای هر $x,y \in X$، $g \in G$ موجود باشد بطوریکه $x.g = y$. یعنی برای هر $x \in X$، داشته باشیم $G(x) = X$.

تعریف ۹.۱.۱ اگر $l \geq 1$ و $\mathbb{F}$ یک میدان باشد، یک عضو $\zeta_l \in \mathbb{F}^\times$ را یکتا $l-$ امین ریشه‌ی اولیه در $\mathbb{F}$ گوئیم هرگاه ζ_l یک زیرگروه از $\mathbb{F}^\times$ با رتبه‌ی l را تولید کند.

تعریف ۱۰.۱.۱ میدان $\mathbb{F}$ را بطور جبری بسته گوئیم هرگاه هر چندجمله‌ای تک متغیره با ضرائب در $\mathbb{F}$ از حداقل درجه‌ی یک دارای یک ریشه در $\mathbb{F}$ باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ میدان $\bar{\mathbb{F}}$ را بستار جبری از میدان $\mathbb{F}$ گوئیم هرگاه $\bar{\mathbb{F}}$ جبری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و هر چندجمله‌ای $\mathrm{f}(x) \in \mathrm{F}[x]$ بطور کامل روی $\bar{\mathbb{F}}$ شکافته شود. به همین دلیل $\bar{\mathbb{F}}$ شامل تمام عناصری که جبری روی $\mathbb{F}$ هستند، می‌باشد. در واقع، میدان $\bar{\mathbb{F}}$ یک توسیع جبری از میدان $\mathbb{F}$ است که بطور جبری بسته است.

مثال ۱۲.۱.۱ میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ بطور جبری بسته است و نیز بستار جبری میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم که D یک دامنه‌ی صحیح و $\mathbb{F}$ نیز یک میدان باشد. در این صورت $\mathbb{F}$ میدان خارج قسمتی از D است هرگاه شرائط زیر برقرار باشند:

۱) $\mathbb{F}$ شامل یک تصویر یکریخت از D باشد.

۲) اگر $\widetilde{\mathbb{F}}$ میدان دیگری باشد که در شرط (۱) صدق کند و $\widetilde{\mathbb{F}} \subseteq \mathbb{F}$، در این صورت $\widetilde{\mathbb{F}} = \mathbb{F}$.

به این معنا که میدان مینیمال که به عنوان زیرحلقه شامل D باشد را میدان خارج قسمتی یک دامنه‌ی صحیح D گوئیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم V یک $\mathbb{F}$ - فضای برداری باشد. در این صورت منظور از $\mathrm{End}(V)$، فضای برداری متشکل از تمامی $\mathbb{F}$ - تبدیلات خطی از V به V است. زیرگروهی از $End(V)$ را که عناصرش معکوسپذیر باشند را با $\mathrm{GL(V)}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنیم V یک $\mathbb{F}$ - فضای برداری باشد. یک فرم دوخطی روی V را نگاشت $(.,.) \ : \ V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ نامیم هرگاه نسبت به $\mathbb{F}$ دوخطی باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنیم V یک $\mathbb{F}$ - فضای برداری و $(.,.)$ یک فرم دوخطی روی V باشد. در این صورت فرم دوخطی $(.,.)$ روی V متقارن است هرگاه

$$(x,y) = (y,x) \qquad ; \qquad x, y \in V \text{ برای هر}$$

قرارمی‌دهیم

$$rad(.,.) := \{x \in V \mid (x,y) = 0 \qquad ; \qquad y \in V \text{ برای هر}\}$$

فرم دوخطی $(.,.)$ روی V ناتباهیده است هرگاه $rad(.,.) = 0$.

تذکر ۱۷.۱.۱ فرض کنیم H یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان $\mathbb{F}$ و H^* فضای دوگان H باشد. همچنین فرض کنیم $(.,.)$ یک فرم دوخطی ناتباهیده روی H باشد. بوضوح از اینکه H با بعد متناهی است، داریم $\dim H = \dim H^*$. در این صورت چون فرم $(.,.)$ روی H ناتباهیده است، نگاشت $f : H \to H^*$ که برای هر $h \in H$، با ضابطه $h \mapsto (h,.)$ تعریف می‌شود، یک یکریختی است. زیرا این نگاشت، بوضوح خطی است. همچنین f یک‌به‌یک است، زیرا اگر $h \in H$ و $(h,.) = 0$، برای هر $h' \in H$، داریم $(h,h') = 0$. از ناتباهیده بودن فرم $(.,.)$ روی H، نتیجه می گیریم که $h = 0$. از اینکه f یک‌به‌یک است و $\dim H = \dim H^*$، f نیز پوشا می‌باشد. اکنون می‌توان برای $\alpha, \beta \in H^*$، فرم $(.,.)$ روی H را به فرم $(.,.)'$ روی H^* به صورت زیر انتقال دهیم:

$$(\alpha, \beta)' := (t_\alpha, t_\beta)$$

که در آن برای هر $\alpha \in H^*$ و برای هر $h \in H$، $t_\alpha \in H$ از رابطه‌ی زیر بدست می آید:

$$\alpha(h) = (t_\alpha, h)$$

برای هر $\alpha \in H^*$، اگر برای هر $h \in H$، یکتا عنصر t_α از H با ویژگی $\alpha(h) = (t_\alpha, h)$ باشد، گوئیم t_α، α را نمایش می‌دهد.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنیم V یک $\mathbb{F}$ - فضای برداری باشد.

۱) در صورتیکه V با بعد متناهی باشد، زیرفضای W از V را یک ابرصفحه در V نامیم هرگاه هم بعد W، ۱ باشد.

۲) در صورتیکه V با بعد نامتناهی باشد، زیرفضای W از V را یک ابرصفحه در V نامیم هرگاه W یک زیرفضای اکید ماکسیمال از V باشد.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنیم V یک $\mathbb{F}$ - فضای برداری با فرم دوخطی $(.,.)$ باشد. عملگر خطی T روی V را یک بازتاب (انعکاس) نامیم هرگاه یک ابر صفحه P در V موجود باشد بطوریکه برای هر $u \in P$، $T(u) = u$ و برای هر $u' \in P^{\perp}$، داشته باشیم $T(u') = -u'$ که در آن

$$P^{\perp} := \{v \in V \mid (v, w) = \circ \ ; w \in V \quad \text{برای هر}\}$$

تعریف ۲۰.۱.۱ زیرمجموعه T از فضای برداری حقیقی (مختلط) با بعد متناهی X را گسسته در X گوئیم اگر توپولوژی القایی از X روی T گسسته باشد، این معادل است با اینکه برای هر دنباله $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ از عناصر T، که به عنصر a از T همگرا است عدد طبیعی $t \geq 1$ یافت شود، بطوریکه برای هر $n \geq t$، داشته باشیم $a_n = a$.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم U یک فضای برداری حقیقی با بعد متناهی باشد، Λ را یک شبکه در U نامیم هرگاه Λ زیرگروهی از گروه جمعی U باشد که U را تولید کند و در U گسسته باشد.