بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی فیزیک

همبستگی درجات رأس‌ها در شبکه‌های بی‌مقیاس و جهان‌کوچک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ماده چگال

وحید منفردی

استاد راهنما

دکتر کیوان آقابابایی سامانی

۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد فیزیک ماده‌ی چگال آقای وحید منفردی
تحت عنوان

همبستگی درجات رأس‌ها در شبکه‌های بی‌مقیاس و جهان کوچک

در تاریخ ۱۳۹۳/۱۱/۲۸ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱ـ استاد راهنما پایان‌نامه — دکتر کیوان آقابابایی سامانی

۲ـ استاد مشاور پایان‌نامه — دکتر علی اکبر بابایی بروجنی

۳ـ استاد داور — دکتر فرهاد فضیله

۴ـ استاد داور — دکتر فرهاد شهبازی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده‌ی فیزیک — دکتر فرهاد شهبازی

قدردانی

از همه‌ی اعضای خانواده‌ام خصوصاً پدر و مادر مهربانم که همواره و در تمام مراحل زندگی مرا یاری کرده‌اند و همیشه از حمایت‌های ایشان بهره‌مند بوده‌ام تقدیر و تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر سامانی استاد راهنمای گرامی‌ام که علاوه بر جنبه‌ی علمی از لحاظ اخلاقی نیز بسیار از ایشان آموخته‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر بابایی بروجنی استاد مشاور ارجمندم به سبب راهنمایی‌ها و دلگرمی‌هایشان بسیار سپاسگزارم.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به پدرم،

استوارترین تکیه گاهم، که آسایشم را مدیون دستان پینه بسته اش، هستم.

تقدیم به مادرم،

امن ترین پناهگاهم، که آرامشم را مدیون مهربانی های بی پایانش، هستم.

تقدیم به خواهر و برادرانم،

عزیزترین کسانم، که بزرگترین سرمایه های زندگیم هستند.

فهرست مطالب

چکیده

امروزه استفاده از شبکه‌های پیچیده برای توصیف پدیده‌های طبیعی به طور روز افزون در حال گسترش است. یکی از ابزارهای مناسب جهت مطالعه‌ی شبکه‌های پیچیده مدل کردن آن‌ها است. مدل‌های مختلفی برای توصیف شبکه‌ها ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به مدل شبکه‌های تصادفی، شبکه‌های بی‌مقیاس و شبکه‌های جهان‌کوچک اشاره کرد. ویژگی‌های مختلفی را می‌توان به هر یک از این مدل‌ها نسبت داد. از جمله‌ی این ویژگی‌ها می‌توان به طول کوتاهترین مسیر،ضریب خوشگی، میانگی، وجود همایه‌ها و... اشاره کرد. یکی از این ویژگی‌های مهم شبکه‌ها، همبستگی میان درجات آن‌ها است. این ویژگی معیاری از این است که آیا درجه‌ی یک رأس به درجه‌ی رأس‌های همسایه‌اش وابسته است یا نه. تفاوت در ساختار مدل‌های مختلف و همچنین ویژگی‌های آن‌ها به دلیل تفاوت در روند تشکیل هر یک از این شبکه‌ها است. با تغییر در پارامترهای مختلفی که در روند تشکیل شبکه‌ها مؤثر هستند می‌توان شبکه‌هایی با ساختار و ویژگی‌های متفاوت تولید کرد. در این پایان‌نامه تأثیر هر یک از پارامترهای مختلف شبکه‌های بی‌مقیاس و جهان‌کوچک که در روند تشکیل این شبکه‌ها مؤثر هستند را بر روی همبستگی در این دو شبکه مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور از مدل باراباسی-آلبرت برای تولید شبکه‌ی بی‌مقیاس و از روش واتس-استروگاتس برای تولید شبکه‌ی جهان‌کوچک بهره می‌بریم. همچنین برای محاسبه‌ی همبستگی شبکه از معیار پیرسون استفاده می‌کنیم. نشان می‌دهیم که با افزایش در پارامترهای اندازه‌ی شبکه و تعداد یال‌های متصل به رأس جدید در شبکه‌ی بی‌مقیاس و پارامترهای اندازه‌ی شبکه و تعداد نزدیکترین همسایگان در شبکه‌ی جهان‌کوچک، اندازه‌ی همبستگی کاهش می‌یابد. و همچنین بازه‌ی تغییرات آن کوچکتر می‌شود. در پایان عوامل ساختاری مؤثر در این تغییرات همبستگی را بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که افزایش همبستگی ناشی از افزایش تعداد اتصالات داخلی و کاهش تعداد برگ‌های نسبی شبکه است. در حالی که کاهش همبستگی ناشی از افزایش تعداد برگ‌های نسبی شبکه و کاهش تعداد اتصالات داخلی در شبکه است.

کلمات کلیدی:
شبکه‌های پیچیده، همبستگی درجات، شبکه‌ی بی‌مقیاس، شبکه‌ی جهان‌کوچک،

فصل ۱

مقدمه

بسیاری از سیستم‌هایی که در جهان اطراف ما وجود دارند به صورت شبکه‌ای هستند. سیستم‌های کامپیوتری، سیستم‌های اجتماعی و سیستم‌های بیولوژیکی تنها چند نمونه از این نوع سیستم‌ها هستند. مطالعه بر روی این شبکه‌ها به دلایل مختلف از جمله اندازه‌های بزرگ شبکه و همچنین ارتباطات پیچیده‌ی اعضای آن‌ها با هم کار بسیار دشوار و پیچیده است. بنابراین استفاده از روش‌هایی از این پیچیدگی‌ها بکاهد، لازم و ضروری به نظر می‌رسد. استفاده از مدل شبکه‌های پیچیده روشی مؤثر برای مطالعه‌ی بسیاری از این سیستم‌ها است. برای توصیف ریاضی شبکه‌های پیچیده از نظریه گراف استفاده می‌کنیم. نظریه گراف ابزار بسیار مناسبی برای توصیف شبکه‌های پیچیده است، که در آن رأس‌ها نشان دهنده‌ی اعضای شبکه و یال‌ها نشان دهنده‌ی ارتباط بین اعضای شبکه است.

ویژگی‌های مختلفی را می‌توان به شبکه‌ها نسبت داد، ویژگی‌هایی از جمله طول کوتاه‌ترین مسیر،ضریب خوشگی، میانگی و ... شبکه‌های پیچیده از نظر ساختار داخلی و ویژگی‌های مختلف شبکه‌ها با هم متفاوت هستند. این تفاوت‌ها در ساختار و در نتیجه در ویژگی‌های شبکه ناشی از روند تشکیل شبکه‌ها است. بنابراین برای مطالعه بر روی شبکه‌ها بسیار مفید خواهد بود اگر آن‌ها را با مدل‌های مناسب که بتواند ساختار و ویژگی‌های مختلف شبکه را به خوبی بیان کند، مدل‌سازی کرد. مدل‌های مختلفی برای توصیف شبکه‌ها معرفی شده‌اند که از آن جمله می‌توان به مدل‌های شبکه‌های تصادفی، شبکه‌های جهان کوچک و شبکه‌های بی مقیاس اشاره کرد.

در فصل ۲ ابتدا نظریه‌ی گراف و همچنین ارتباط آن با شبکه‌های پیچیده معرفی شده است. در ادامه‌ی این فصل برخی تعاریف و نمادگذاری‌های مورد نیاز بیان شده است. سپس سه مدل شبکه‌های تصادفی، شبکه‌های بی‌مقیاس و شبکه‌های جهان کوچک معرفی و روش‌هایی برای ساخت این شبکه‌ها بیان شده است. برای ساخت شبکه‌ی تصادفی مدل گراف تصادفی اردوش و رنی را معرفی می‌کنیم. پارامترهای

اصلی در این شبکه یکی اندازه‌ی شبکه (N) و دیگری احتمال اتصال دو رأس از گراف (p) است. برای ساخت شبکه‌ی بی‌مقیاس روش باراباسی_آلبرت بیان می‌شود. پارامترهای اصلی در این شبکه، اندازه‌ی شبکه (N)، تعداد یال‌های متصل به رأس جدید که در هر مرحله به شبکه اضافه می‌شود (m) و اندازه‌ی هسته‌ی اولیه ($N.$) است. برای تولید شبکه‌ی جهان‌کوچک نیز از روشی که واتس و استروگاتس معرفی کرده‌اند، استفاده می‌کنیم. پارامترهای اصلی این شبکه نیز اندازه‌ی شبکه (N)، تعداد همسایه‌های هر رأس (m) و احتمال بازآرایی یال‌ها (p) است. در ادامه همچنین خصوصیات مختلف این مدل‌های شبکه نیز بیان می‌شود.

ویژگی‌های مختلفی را می‌توان به هریک از این مدل‌های شبکه نسبت داد. ویژگی‌هایی مانند خوشگی، وجود همایه‌ها، طول کوتاهترین مسیر، میانگی و .... یکی از این ویژگی‌های مهم شبکه‌های پیچیده همبستگی میان درجات رأس‌های آن‌ها است. این ویژگی معیاری از این است که آیا درجه‌ی یک رأس به درجه‌ی رأس‌های همسایه‌اش وابسته است یا نه. از نظر همبستگی شبکه‌ها به دو دسته‌ی همگون و ناهمگون تقسیم می‌شوند. در شبکه‌های ناهمگون رأس‌های با درجه‌ی بالا به رأس‌های با درجه‌ی پایین متصل می‌شوند. در حالی که در شبکه‌ی همگون رأس‌های با درجه‌ی بالا به رأس‌های با درجه‌ی بالا متصل می‌شوند.

در فصل ۳ ابتدا مفهوم همبستگی در مکانیک آماری بیان شده است و در ادامه همبستگی در گراف‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم. برای بررسی کمی همبستگی شبکه معیارهای مختلفی وجود دارد. یکی از این معیارها، معیار پیرسون است که آن را در ادامه‌ی فصل ۳ معرفی می‌کنیم. در دو بخش پایانی فصل ۳ ارتباط بین همبستگی و تحلیل ساختاری شبکه‌ها و همچنین روشی برای تغییر در همبستگی شبکه‌ها بدون تغییر در دنباله‌ی درجات آن‌ها بیان می‌شود.

روند تشکیل و ساختار هر شبکه و همچنین ویژگی‌های مختلف آن با دیگری متفاوت است. هر یک از مدل‌های شبکه دارای پارامترهای اصلی در روند تشکیل شبکه می‌باشند. تغییر در این پارامترها منجر به تولید شبکه‌هایی با ساختار و ویژگی‌های متفاوت می‌شود.

در فصل ۴ تأثیر تغییر در پارامترهای شبکه‌ها را روی همبستگی آن‌ها به عنوان یک ویژگی شبکه مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این فصل دو مدل شبکه‌ی بی‌مقیاس و شبکه‌ی جهان کوچک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. و با تغییر در پارامترهای آن‌ها تغییرات همبستگی شبکه را بررسی می‌کنیم. برای تولید شبکه‌ی بی‌مقیاس از روش باراباسی_آلبرت و برای تولید شبکه‌ی جهان‌کوچک از روشی که واتس و استروگاتس معرفی کرده‌اند استفاده می‌کنیم. برای محاسبه‌ی همبستگی شبکه نیز از معیار پیرسون که توسط نیومن معرفی شد، استفاده می‌کنیم. برای تولید شبکه‌های بی‌مقیاس و جهان‌کوچک و همچنین محاسبه‌ی کمی همبستگی و سایر ویژگی‌های شبکه از نرم‌افزار متلب استفاده شده است.

در نهایت نیز تمامی نتایجی که از تأثیر تغییر در مؤلفه‌های شبکه‌های پیچیده بر روی همبستگی آن‌ها به دست آورده‌ایم در فصل ۵ جمع‌آوری شده است.

فصل ۲

تعاریف و نمادگذاری ها

سیستم‌های پیچیده‌ی زیادی در جهان اطراف ما وجود دارد. که می‌توان آن‌ها را به وسیله‌ی شبکه‌ها توصیف کرد. شبکه‌های پیچیده ابزاری بسیار مناسب برای توصیف این سیستم‌ها می‌باشد. پیچیدگی این سیستم‌ها دانشمندان را بر آن داشته است تا در جستجوی روش‌هایی برای ساده‌سازی مطالعه‌ی آن‌ها باشند. نیاز به توصیف شبکه‌ها به صورت ساده‌تر و مختصرتر برای درک بهتر کارکرد آن‌ها دانشمندان را به سمت استفاده از مدل‌هایی به منظور برآورده کردن این نیاز سوق داده است.
یکی از روش‌های بسیار مناسب برای توصیف شبکه‌ها نشان دادن اعضای شبکه و ارتباط بین این اعضا به وسیله‌ی گراف است. مدل کردن شبکه‌ها به وسیله‌ی گراف یک روش مناسب برای توصیف شبکه‌ها است که در آن رأس‌ها نشان دهنده‌ی اعضای شبکه و یال‌ها نشان دهنده‌ی ارتباط بین این اعضا است.

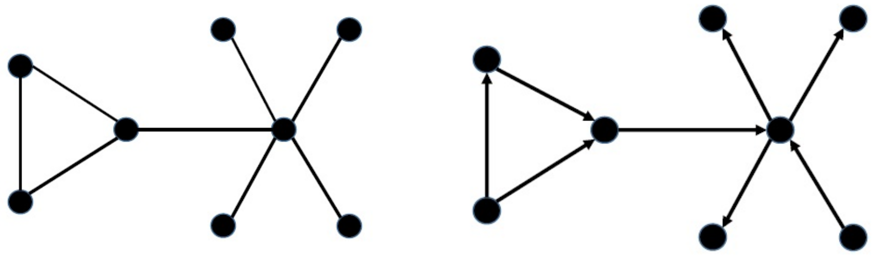
۱.۲ نظریه گراف

نظریه گراف[۱] یک چارچوب طبیعی برای مطالعه‌ی شبکه‌های پیچیده است. بنابراین شبکه‌های پیچیده می‌توانند به وسیله گراف‌ها بیان شوند که در آن اعضای شبکه با نقطه‌ها (رأس‌ها) و ارتباط بین اعضای شبکه با خط‌ها (یال‌ها) نشان داده می‌شود. گراف G را با $G(N,K) = (P,L)$، و یا به صورت ساده‌تر به صورت $G(N,K)$ یا $G_{N,K}$ نشان می‌دهیم.
یک گراف جهت دار[۲] (غیر جهت دار[۳]) $G(N,L)$ گرافی است شامل دو مجموعه N و L که در آن $N \neq \varnothing$ و L هم شامل دوتایی‌های مرتب(نامرتب) از اعضای N است.

[۱] Graph theory

[۲] Directed graph

[۳] Undirected graph



شکل ۱.۲: گراف جهت‌دار ، گراف غیر جهت‌دار

اعضای $P = \{p_1, p_2, p_3, ..., p_N\}$ از گراف G را رأس‌ها[۴] و اعضای $L = \{l_1, l_2, l_3, ..., l_K\}$ را یال‌های[۵] گراف G می‌نامند. تعداد اعضای P, L به ترتیب با N, K نشان داده می‌شوند. در گراف هر یال با یک جفت راس i و j تعریف می‌شود. و به صورت (i, j) یا l_{ij} نشان داده می‌شود که این یال را یال فرودی بر i و j می‌نامند. دو رأس که به وسیله یک یال به هم مرتبط شده باشند، رأس‌های مجاور یا همسایه نامیده می‌شوند. در گراف جهت‌دار ترتیب دو رأس مرتبط با هم مهم است به طوری که l_{ij} نشان دهنده‌ی یالی است که از رأس i به رأس j فرود آمده است و $l_{ij} \neq l_{ji}$. ولی در گراف غیرجهت‌دار ترتیب دو رأس مرتبط با هم مهم نیست. به طوری که l_{ij} نشان دهنده‌ی یالی است که دو رأس i و j را به هم مرتبط کرده است و $l_{ij} = l_{ji}$.

در یک گراف می‌تواند حلقه (یالی که یک رأس i را به خودش وصل می‌کند) وجود داشته باشد. همچنین دو رأس متعلق به گراف می‌توانند با بیش از یک یال به یکدیگر متصل شوند. گرافی که شامل هیچ یک از این دو مورد نباشد گراف ساده نامیده می‌شود.

تعداد راس‌های گراف G را اندازه گراف می‌نامیم.

برای گراف G با اندازه‌ی N حداقل تعداد یال‌ها صفر (حالتی که بین هیچ دو راس از گراف یالی وجود نداشته باشد)، و حداکثر $\frac{N(N-1)}{2}$ (حالتی که بین هر دو راس از گراف یالی وجود داشته باشد) است. گراف G تنک[۶] گفته می‌شود اگر $K \ll N^2$ و متراکم[۷] گفته می‌شود اگر اندازه‌ی K از مرتبه‌ی N^2 $(K = O(N^2))$ و کامل گفته می‌شود اگر $K = \frac{N(N-1)}{2}$ باشد.

مفهوم اصلی در گراف ارتباط بین دو رأس متفاوت از گراف است. دو رأس می‌توانند هم به صورت

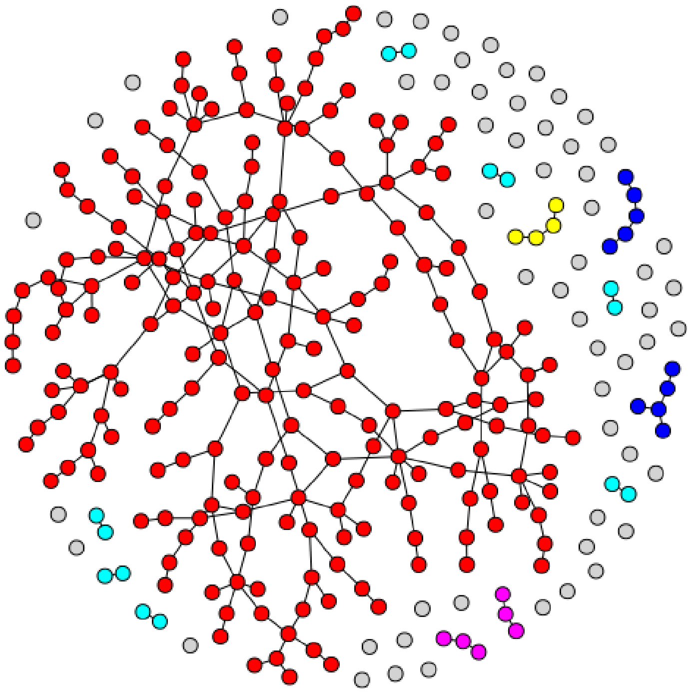
---

[۴] Nodes

[۵] Links

[۶] Sparse

[۷] Dense



شکل ۲.۲: یک گراف با چندین مؤلفه، مؤلفه‌ی بزرگ گراف با رنگ قرمز مشخص شده است. [۱]

مستقیم و هم به صورت غیر مستقیم به وسیله چند رأس و یال دیگر با هم در ارتباط باشند. در واقع از راه‌های مختلفی می‌توان از رأس i به رأس j رسید. مسیر[۸] از رأس i به رأس j، رشته‌ای متوالی از یال‌ها و رأس‌ها است که با رأس i شروع و به رأس j ختم می‌شود. تعداد یال‌هایی را که برای رسیدن از رأس i به رأس j پیموده‌ایم طول مسیر بین دو رأس i و j تعریف می‌کنیم. کوتاه‌ترین مسیر[۹] بین دو رأس i و j مسیری است که برای رسیدن از رأس i به رأس j هیچ یالی تکرار نشود و از هر رأس بیش از یک بار عبور نکرده باشیم. گراف پیوسته[۱۰] (همبند) گرافی است که در آن به ازای هر دو رأس متفاوت i و j راهی وجود داشته باشد که آن‌ها را به هم مرتبط کند. گراف گسسته[۱۱] (غیر همبند) گرافی است که در آن دو رأس i و j وجود داشته باشند که راهی برای ارتباط آن دو وجود نداشته باشد. زیر گراف یک گراف مانند $G=(P,L)$ گرافی مانند $G'=(P',L')$ است. به طوری که $P'\subseteq P$ و $L'\subseteq L$. مؤلفه[۱۲] گراف G یک زیر گراف از گراف G است که از نظر پیوستگی کامل باشد. و هیچ یالی که

[۸] Walk

[۹] Shortest path

[۱۰] Connected

[۱۱] Disconnected

[۱۲] Component

این زیر گراف را به بقیه گراف متصل کند وجود نداشته باشد. مؤلفه بزرگ گراف G یک مؤلفه از گراف G است که اندازه آن از مرتبه گراف G باشد.
گراف $G=(P,L)$ را می‌توان کاملا توسط ماتریس مجاورت[۱۳] A توصیف کرد. A یک ماتریس با بعد $N \times N$ و درایه‌های $a_{i,j}$ است. در ماتریس A اگر بین دو رأس i و j یالی وجود داشته باشد $a_{i,j}$ برابر با یک و در غیر این صورت برابر صفر است.

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & (i,j) \in L \\ ۰ & (i,j) \notin L \end{cases}$$

یک روش مفید دیگر برای توصیف شبکه‌ها استفاده از ماتریس تلاقی[۱۴] است. ماتریس تلاقی یک ماتریس $N \times K$ است که در آن درایه‌ی b_{ik} یک است اگر رأس i یک انتهای یال l_k باشد و در غیر این صورت صفر است. ماتریس مجاورت یک گراف ساده‌ی غیرجهت‌دار، یک ماتریس متقارن با عناصر قطری صفر است.

۱.۱.۲ درجه‌ی رأس ، توزیع درجات

درجه‌ی رأس

در گراف غیر جهت دار G درجه k_i برای رأس i ام تعداد یال‌هایی است که بر این رأس وارد می شود.
درجه‌ی راس k_i را بر حسب ماتریس مجاورت A برای گراف G به صورت زیر می توان نوشت.

$$k_i = \sum_{j \in N} a_{ij} \qquad (۱.۲)$$

در گراف جهت دار G درجه‌ی k_i^{in} برای رأس i ام تعداد یال‌هایی است که به رأس i ام وارد می شود.
و درجه‌ی رأس خروجی k_i^{out} برای رأس i ام تعداد یال‌هایی است که از رأس i ام خارج می شود.

[۱۳] Adjacency matrix

[۱۴] Incidence matrix

درجات رأس ورودی و خروجی بر حسب ماتریس مجاورت A به صورت زیر بیان می‌شود.

$$k_i^{\,in} = \sum_j a_{ji} \tag{۲.۲}$$

$$k_i^{\,out} = \sum_j a_{ij} \tag{۳.۲}$$

درجه‌ی کل برای رأس i ام جمع درجات ورودی و خروجی رأس i ام است. $k_i = k_i^{in} + k_i^{out}$ لیست درجه‌های رأس‌های یک گراف، دنباله‌ی درجه‌های گراف نامیده می‌شود.

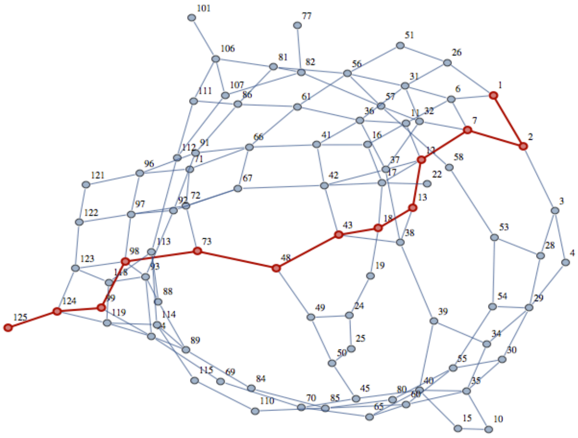
توزیع درجات

توزیع درجه [۱۵] $P(k)$ احتمال به دست آوردن درجه k برای رأسی است که به صورت تصادفی انتخاب شده باشد. و یا به صورت هم‌ارز $P(k)$ کسری از رأس‌ها است که دارای درجه k می‌باشند. همانطور که برای یک رأس می‌توان درجه‌ی رأس ورودی و خروجی تعریف کرد برای توزیع درجات نیز می‌توان توزیع درجات ورودی $P(k^{in})$ و توزیع درجات خروجی $P(k^{out})$ تعریف کرد. اطلاعات چگونگی پخش درجه‌ها در میان رأس‌های شبکه غیرجهت‌دار را می‌توان از روی نمودار مربوط به $P(k)$ و یا از محاسبه‌ی گشتاورهای $P(k)$ به دست آورد. گشتاور nام $P(k)$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\langle k^n \rangle = \sum_n k^n P(k) \tag{۴.۲}$$

گشتاور اول $\langle k \rangle$ میانگین درجه گراف را نشان می‌دهد. دومین گشتاور نیز میزان افت و خیزهای توزیع اتصالات را اندازه‌گیری می‌کند.

[۱۵] Degree distribution



شکل ۳.۲: کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس ۱ و ۱۲۵ [۲]

۲.۱.۲ طول کوتاه‌ترین مسیر، قطر گراف و میانگی

طول کوتاه‌ترین مسیر، قطر گراف

کوتاه‌ترین راه می‌تواند نقش بسیار مهمی را در مشخص کردن ساختار داخلی گراف بازی کند. در مواردی علاقه‌مندیم که بهینه‌ترین راه ممکن برای انتقال از یک ناحیه به ناحیه دیگر در داخل گراف را انتخاب کنیم. بنابراین کوتاهترین مسیر نقش مهمی را در انتقال و ارتباط در داخل شبکه بازی می‌کند.

طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس i و j را با d_{ij} نمایش می‌دهیم. بیشینه مقدار d_{ij} قطر گراف نامیده می‌شود.

میانگین طول کوتاه‌ترین مسیرها بین هر دو رأس از گراف را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۳، ۴]

$$L = \frac{۱}{N(N-۱)} \sum_{i,j \in N, i \neq j} d_{ij} \qquad (۵.۲)$$

در گراف‌های غیرهم‌بند می‌توان دو رأس از گراف را یافت که راهی برای ارتباط بین آن‌ها وجود نداشته باشد. عدم وجود راه بین دو رأس به این معنی است که فاصله بین دو رأس بی‌نهایت است. بنابراین با جمع روی d_{ij}ها، L واگرا می‌شود. یک راه ممکن برای اجتناب از واگرایی L، محدود کردن جمع (۵.۲) به جفت رأس‌هایی است که به مجموعه بزرگترین مؤلفه گراف تعلق دارند [۴]. یک روش دیگر برای رفع این مشکل که در موارد بسیاری مفید واقع می‌شود استفاده از عکس طول کوتاه‌ترین

مسیرها است [۵] . بنابراین اگر بین دو رأس ارتباطی وجود نداشته باشد عکس طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌ها صفر خواهد بود.

$$E = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \in N, i \neq j} \frac{1}{d_{ij}} \quad (۶.۲)$$

بازده انتقال اطلاعات بین دو رأس i و j متناسب با عکس فاصله بین آن‌هاست. بنابراین E بیانگر میانگین بازدهی انتقال اطلاعات بین رئوس شبکه است. این کمیت یک شاخص برای ظرفیت ترافیکی شبکه است.

بینابینی

ارتباط دو رأس غیر مجاور j و k در شبکه به رأس‌هایی که در مسیر ارتباط این دو رأس قرار دارند، وابسته است. میزان وابستگی یک رأس را می‌توان با شمارش تعداد مسیرهای گذرنده از آن رأس محاسبه نمود، به این کمیت بینابینی[۱۶] رأس مورد نظر گفته می‌شود. بینابینی رأس i که آن را با b_i نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b_i = \sum_{j,k \in N, j \neq k} \frac{n_{j,k}(i)}{n_{j,k}} \quad (۷.۲)$$

$n_{j,k}$ تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی متصل کننده‌ی j و k و $n_{j,k}(i)$ تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای متصل کننده‌ی j و k است که از i نیز بگذرد.

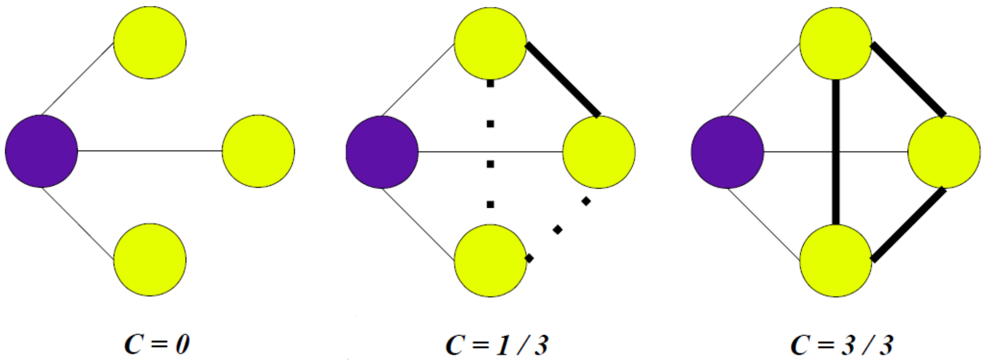
۳.۱.۲ ضریب خوشگی

ضریب خوشگی[۱۷] در یک شبکه بیانگر تعداد مثلث‌های موجود در شبکه است. خوشگی را می‌توان یک ویژگی از شبکه‌های آشنایی در نظر گرفت، به این معنی که دو شخص با یک دوست مشترک محتمل است که همدیگر را بشناسند. بر حسب گراف کلی G رابطه‌ی تراگذری[۱۸] به معنی وجود تعداد زیادی مثلث در گراف است. ضریب خوشگی را با استفاده از تعریف تراگذری می‌توان به صورت

[۱۶] Betweenness

[۱۷] Clustering

[۱۸] Transitivity



شکل ۴.۲: ضریب خوشگی سه گراف مختلف

کمی مورد بررسی قرار داد.

$$T = \frac{\text{تعداد مثلث‌ها در گراف} \times ۳}{\text{تعداد رأس‌های سه‌تایی پیوسته در گراف}}$$

واتس[۱۹] و استروگاتس[۲۰] تعریفی برای ضریب خوشگی گراف ارائه کرده‌اند [۴]. در این تعریف c_i ضریب خوشگی موضعی رأس iام و بیان کننده‌ی میزان احتمال همسایگی دو رأس j و k از طریق رأس iام است. یک زیر گراف G_i را از همسایه‌های رأس i در گراف G در نظر می‌گیریم. تعداد یال‌های زیر گراف G_i را با e_i نشان می‌دهیم. ضریب خوشگی موضعی ارائه شده توسط واتس و استروگاتس به صورت نسبت تعداد یال‌های واقعی گراف G_i، e_i به تعداد کل یال‌های ممکن در گراف G_i، $\frac{k_i(k_i-۱)}{۲}$ تعریف می‌شود.

$$c_i = \frac{۲e_i}{k_i(k_i-۱)} = \frac{\sum_{j,k} a_{ij}a_{jk}a_{ki}}{k_i(k_i-۱)} \qquad (۸.۲)$$

ضریب خوشگی گراف با میانگین گیری c_i بر روی همه‌ی رأس‌های گراف به دست می‌آید:

$$C = \langle c \rangle = \frac{۱}{N}\sum_{i \in N} c_i \qquad (۹.۲)$$

با این تعریف $۰ \leq c_i \leq ۱$ و $۰ \leq C \leq ۱$ است.

[۱۹] Watts

[۲۰] Strogatz