بسم الله الرّحمن الرّحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

عدد تحمیل کننده در گراف

استاد راهنما

دکتر سید محمود شیخ الاسلامی

استاد مشاور

دکتر بهروز خیرفام

پژوهشگر

عاطفه ملایی قاضی جهانی

مهرماه ۱۳۸۹

تبریز ایران

تقدیم به پدر و مادرم

و تقدیم به همسر عزیزم

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سید محمود شیخ الاسلامی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر بهروز خیرفام که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان نامه را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

ازکلیه اساتید گرامی دوران تحصیلم، مخصوصاً از آقای دکتر جعفر پور محمود که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل نمودند، نیز تشکر می‌نمایم.

همچنین لازم می دانم از سرکار خانم مریم عطاپور به خاطر کمک های ارزنده اش نهایت قدردانی را داشته باشم.

و در پایان، از همسر عزیزم به پاس حمایتهای همه جانبه اش در این دو سال بی نهایت سپاسگزاری می نمایم.

عاطفه ملایی قاضی جهانی

شهریور ۱۳۸۸

چکیده

فرض کنید که G گرافی با جورسازی کامل M باشد . عدد تحمیل کننده جورسازی کامل M، کمترین تعداد یال‌هایی در $S \subset M$ می‌باشد که در آن S مشمول در هیچ جورسازی دیگری نیست.
در این پایانامه، طیف عدد تحمیل کننده مطالعه می‌کنیم و کران‌هایی را برای این پارامتر در برخی از گراف‌ها مانند شبکه‌های مربعی، منطقه ایست، چنبره و گراف‌های دوپارچه ارایه می‌دهیم.

کلیدواژه‌ها: عدد تحمیل کننده ، جورسازی کامل ، دور متناوب.

پیشگفتار

مفهوم عدد تحمیل کننده در گراف‌ها نخستین بار در سال ۱۹۸۷ توسط کلین [۱][۹] و همکارانش تعریف گردید. بعدها به دلیل اهمیت کاربرد این مفهوم در شیمی، تعاریف متعددی از اعداد تحمیل کننده از جمله تحمیل کننده‌ها در مربعات لاتین، طرح‌های بلوکی و رنگ آمیزی گراف‌ها مطرح گردید. مفهوم عدد تحمیل کننده در جورسازی‌ها نخستین بار توسط هراری[۲][۷] در سال ۱۹۹۱ مطرح گردید. فرض کنید G یک گراف با جورسازی M باشد. زیرمجموعه S از M را یک مجموعه تحمیل کننده نامند هرگاه S مشمول در هیچ جورسازی دیگری در G نباشد. مینیمم اندازه یک مجموعه تحمیل کننده در G را عدد تحمیل کننده می‌نامند.

در فصل اول این پایانامه برخی تعاریف مقدماتی را که در فصل بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم. در فصل دوم عدد تحمیل کننده در شبکه‌های مربعی را مطالعه کرده و برخی کران‌ها را برای این پارامتر ارائه می‌دهیم . در فصل سوم عدد تحمیل کننده برخی زیرشبکه‌های مربعی معروف به منطقه ایست را مطالعه می‌کنیم. فصل چهارم را به عدد تحمیل کننده در چنبره‌ها و ابر مکعب‌ها اختصاص دادیم. در فصل پنجم عدد تحمیل کننده گراف‌های دوپارچه را مطالعه نموده و کران‌هایی برای این پارامتر بیان می‌کنیم. در فصل ششم طیف عدد تحمیل کننده گراف‌ها را تعریف نموده و این مفهوم را در گراف‌های

---

[۱] Klein

[۲] Harary

دوپارچه و مشبک مطالعه می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

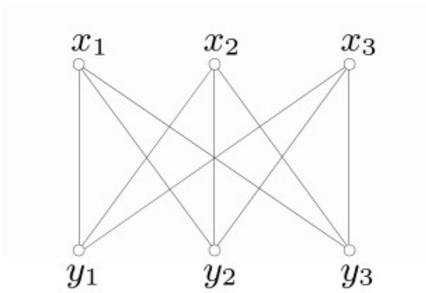
۱.۱ مقدمه

در دنیای اطراف ما مسائل و فرایندهایی وجود دارد که می‌توان آن‌ها را با نموداری متشکل از مجموعه‌ای از نقاط و خطوطی که برخی از این نقاط را به هم وصل می‌کنند، نمایش داد. به عنوان مثال در یک شبکه ارتباطاتی، برای نشان دادن مراکز از نقاط و برای نشان دادن ارتباط بین مراکز از خطوطی که این نقاط را به هم وصل می‌کنند، استفاده می‌کنیم. در چنین نموداری آنچه اهمیت دارد، این است که آیا بین نقاط داده شده خطی وجود دارد یا نه. مطالعه این نمودارها و مسائل مربوط به آن به مفهوم گراف منتهی می شود. در این فصل، برخی تعاریف مقدماتی نظریه گراف را مطرح می‌کنیم. برای آشنایی بیشتر با تعاریف و نمادهای اولیه در نظریه گراف که در اینجا تعریف نشده‌اند، خواننده را به [۳، ۱۴] ارجاع می‌دهیم.

گراف $G = (V, E)$ از یک مجموعه متناهی V از نقاط به نام رأس و یک مجموعه E از دوتایی های نامرتب روی V به نام یال تشکیل شده است. تعداد اعضای V را مرتبه و تعداد اعضای E را اندازه G می نامند. یک گراف از مرتبه n و اندازه m را یک

$(n,m)-$گراف می نامند.

گراف G را دوپارچه نامند هرگاه بتوان رئوس آن را به دو مجموعه X و Y افراز کرد به قسمی که رئوس انتهای هر یال یکی در X و دیگری در Y باشند. X و Y را کلاس‌های افراز گراف G گویند.



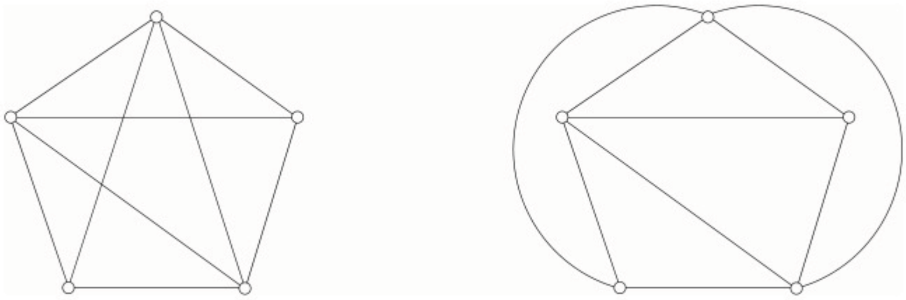
شکل ۱.۱ : یک گراف دوپارچه

و

درحالت خاص، گراف $P_{۲n} \times P_{۲n}$ را با R_n نشان داده و آن را شبکه مربعی می‌نامند. چنبره $۲n \times ۲m$ نیز از ضرب دکارتی گراف $C_{۲m}$ و گراف $C_{۲n}$ حاصل می‌شود.

ابرمکعب گرافی است که با Q_n نمایش داده می‌شود و مجموعه رئوس آن مجموعه‌ای از n تایی‌های دودویی است که در آن دو n تایی مجاورند، اگر و تنها اگر دقیقا در یک مولفه اختلاف داشته باشند.

گراف G را مسطح نامند هرگاه بتوان آن را به گونه‌ای در صفحه رسم کرد که هر یال آن، تنها در رئوس انتهایی با دیگر یال‌های گراف برخورد داشته باشد. این طریقه رسم کردن گراف مسطح، نشاندن مسطح نامیده می‌شود .



شکل ۱.۲: یک نشاندن مسطح

گراف H را یک زیرگراف G گویند هرگاه $V(H) \subset V(G)$ و $E(H) \subset E(G)$.
زیرگراف H از G را یک زیر گراف القایی G گویند هرگاه مجموعه یال‌های H متشکل از تمام یال‌هایی در G باشد که دو رأس انتهای آن‌ها در $V(H)$ قرار دارند.

دو یالی را که در یک رأس مشترک باشند همبند و در غیر این صورت ناهمبند می‌نامند. زیر مجموعه M از یال‌های G جورسازی نامیده می‌شود هرگاه اعضای M دوبه‌دو ناهمبند باشند. رأس v را یک رأس $M-$ آلوده نامند هر گاه v رأس انتهایی یکی از یال‌های M باشد. جورسازی M از G را کامل نامند هرگاه هر رأس G، $M-$ آلوده باشد.

فرض کنید M یک جورسازی در گراف G باشد. مسیر P (یا به ترتیب دور C) را یک مسیر $M-$ متناوب (یا به ترتیب دور $M-$ متناوب) نامند هر گاه یال‌های P (یا به ترتیب C) یک در میان در M و $E-M$ باشند. ماکسیمم تعداد دورهای متناوب ساده مجزا در جورسازی M از گراف G را با $c(M)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید G یک گراف با جورسازی M باشد. اشتراک یک دور متناوب با جورسازی M را دور سایه‌دار گویند.

فرض کنید G یک گراف با جورسازی کامل M باشد. زیرمجموعه S از مجموعه M را یک مجموعه تحمیل کننده نامند هرگاه S مشمول در هیچ جورسازی کامل دیگری نباشد. اندازه یک مجموعه تحمیل کننده مینیمم را عدد تحمیل کننده جورسازی کامل M نامیده و با $f(M,G)$ نمایش می‌دهیم. ماکسیمم و مینیمم مقدار آن را با $F(M)$ و $f(M)$ نشان می‌دهیم.

فصل ۲

عدد تحمیل کننده شبکه‌های مربعی

در این فصل، کران‌هایی را برای عدد تحمیل کننده در شبکه‌های مربعی ارایه داده برای عدد تحمیل کننده شبکه‌های مربعی کران‌های بالا و پائین ارائه می‌دهیم و مسائل تحمیل کننده را به مسائل مینیمم مجموعه بازخورد مربوط می‌کنیم. گزاره زیر در اثبات نتایج این فصل مفید خواهد بود.

گزاره ۲.۰.۱. *فرض کنید G گرافی با جورسازی کامل M باشد در این صورت $f(M,G) > 0$ اگر و فقط اگر $c(M) > 0$ باشد.*

۲.۱ کران بالا

در این بخش، یک کران بالا برای عدد تحمیل کننده با استفاده از قضیه زیر مشهور به قضیه پیک [۱] ارائه می دهیم.

قضیه ۲.۱.۱. [۵] *مساحت یک چند ضلعی مشبک P از رابطه $A = i + \frac{b}{2} - 1$ حاصل*

[۱] Pick ‘s Thoeorem

می‌شود. که در آن i تعداد نقاط درون و b تعداد نقاط مرزی چند ضلعی مشبک P است.

قضیه ۲.۱.۲. *فرض کنید M یک جورسازی کامل از R_n باشد. در این صورت $f(M,G) \leq n^{۲}$ و این کران قابل وصول است.*

برهان. شبکه مربعی R_n را در صفحه $R^{۲}$ چنان می‌نشانیم که مرزهایش موازی محور xها و yها بوده و هر یال دارای طول واحد باشد. شبکه مربعی R_n را در ناحیه اول بنشانید بطوری که یکی از گوشه‌های آن دارای مختصات $(۰,۰)$ باشد. در این صورت هر رأس دارای بر چسب (i,j) خواهد بود که در آن $۰ \leq i,j \leq ۲n-۱$. فرض کنید F مجموعه‌ای متشکل از یالهایی باشد که هر کدام شامل یک رأس انتهایی است که هر دو مختص آن زوج است.

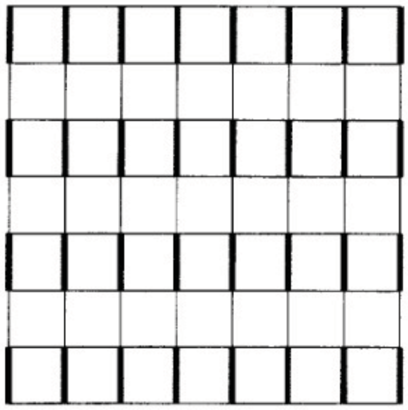
ادعا: $M-F$ هیچ دور متناوب ساده‌ای ندارد.

برهان ادعا : فرض کنید $C=(v_۱,v_۲,...,v_n)$ دوری در G باشد که شامل هیچ رأسی با هر دو مختص زوج نیست. همچنین فرض کنید همه رئوس C مجزا هستند. در این صورت C ناحیه‌ای از صفحه را مانند S محصور می‌کند.

فرض کنید b تعداد رئوس در C و i تعداد رئوس در S بوده و مساحت ناحیه S، A است. بدون کاستن از کلیت مسأله می‌توانیم، فرض می‌کنیم که هر دو مختص $v_۱$ فرد است. توجه کنید که برای همه jهای فرد یال‌های $(v_j,v_{j+۱})$ و $(v_{j+۱},v_{j+۲})$ در یک سمت قرار دارند. زیرا C شامل رأسی نیست که هر دو مختص آن زوج باشد . این نشان می‌دهد که A,b بر ۴ بخش پذیر هستند. چون $i=A-\frac{b}{۲}+۱$ ، i باید فرد باشد. بنابراین اگر $M-F$ دارای یک دور متناوب باشد، آنگاه نمی توان رئوس داخل S را تحت جورسازی M جفت کرد. □

بنابراین $c(M-F)=۰$ و بنابر گزاره ۱.۰.۲، F یک مجموعه تحمیل‌کننده برای M است. برای اثبات دقیق بودن کران فرض کنید M یک جورسازی کامل از R_n باشد که در آن یال‌ها در یک جهت یکسان قرار دارند. بوضوح $n^{۲}$ دور متناوب مجزا $C_۴$ موجود

است و چون هر مجموعه تحمیل کننده باید هر دور متناوب را قطع کند، لذا باید شامل حداقل $n^۲$ یال باشد. شکل ۱.۲ جورسازی کامل M و مجموعه تحمیل‌کننده آن را نشان می‌دهد. □



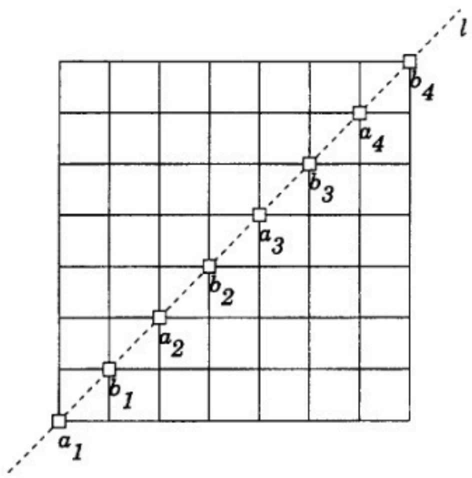
شکل ۱.۲

۲.۲ کران پائین

قضیه ۱.۲.۲. *هر جورسازی کامل M از R_n را می‌توان حداقل به n دور متناوب ساده مجزا تجزیه کرد.*

برهان. در اینجا از روش سیوسو [۲] در قضیه فاکتورگیری‌اش [۴] استفاده می‌کنیم. R_n را در صفحه چنان می‌نشانیم که همه یال‌ها طول یکسان داشته باشند و با محور xها یا محور yها موازی باشند. فرض کنید l قطری از گوشه سمت چپ پائین به گوشه سمت راست بالا باشد. توجه کنید l یک محور تقارن برای R_n بوده و رئوسی که l قطع می‌کنند، دارای برچسب‌های متناوب $a_۱, b_۱, a_۲, b_۲, ..., a_n, b_n$ باشند (شکل ۲.۲).

[۲] Ciucu



شکل ۲.۲

فرض کنید M یک جورسازی کامل از R_n بوده و M' جورسازی بدست آمده از M تحت قرینه‌یابی روی قطر L باشد. فرض کنید (توجه کنید که می‌توان یال تکراری داشته باشد) $D = M \cup M'$. توجه کنید که D یک ۲- عامل از G بوده و لذا اجتماع مجزا از دورهای به طول زوج است. به علاوه، چون D روی L متقارن است، لذا هر دور را به دور دیگری تحت قرینه‌یابی تصویر می‌کند.

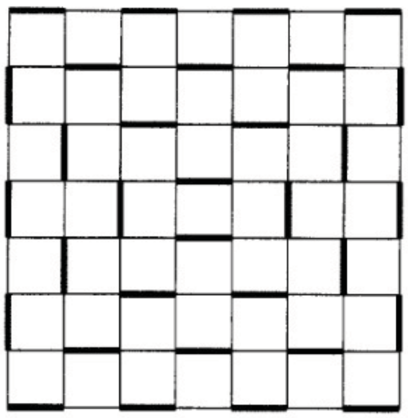
تعریف کنید C_i' دوری شامل a_i است C_i' می‌تواند حداکثر یک راس دیگر روی L داشته باشد. زیرا هر راس در C_i' دارای درجه ۲ است. به علاوه این راس از نوع b_j می‌باشد. زیرا در غیر این صورت تعداد رئوس محصور در C_i' فرد است، که یک تناقض است زیرا D اجتماع مجزا از دورهای به طول زوج است. بنابراین همه دورهای C_i' مجزا هستند. بالاخره، فرض کنید $C_i = C_i' \cap M$ دورهای متناوبی در M بدست آمده از C_i' باشند. بنابراین استدلال بالا دورهای متناوب C_i مجزا هستند و دقیقا n تا از آنها وجود دارد و برهان تمام است. □

قضیه ۲.۲.۲. *فرض کنید M یک جورسازی کامل از R_n باشد. در این صورت* $n \leq (M, G)$

و این کران قابل وصول است.

برهان. چون هر مجموعه تحمیل کننده برای جورسازی کامل M باید هر دور متناوب را قطع کند، لذا بنابر قضیه ۱.۲.۲ $n \leq \varphi(M)$.

حال نشان می‌دهیم که کران بالا دقیق است. جورسازی کامل M از $R_۴$ نمایش داده شده در شکل ۲.۲ را در نظر بگیرید. بوضوح $f(M,G) = ۴$. ساختار کلی برای یک جورسازی کامل M از R_n با $f(M,G) = n$ متشکل از n دور متناوب ساده هم‌مرکز نشان داده شده در شکل ۲.۲ است.



شکل ۳.۲

یال‌های تحمیل‌کننده روی دورهای متناوب شناور هستند که از یک یال افقی در گوشه شروع می‌شود. چون M شامل n دور متناوب هم مرکز است، لذا $f(M,G) \geq n$. به راحتی می‌توان دید که مجموعه یال‌های فوق یک مجموعه تحمیل کننده برای M است و لذا $f(M,G) = n$. □

۳.۲ قضیه مینیمم-ماکسیمم

برای اثبات کران بالا و پائین از گزاره ۱.۰.۲ استفاده می‌کنیم. اگرچه گزاره ۱.۰.۲ تنها چیزی است که در اثبات نیاز داریم ، یک نتیجه قوی تر می توان ثابت کرد که کلاس بزرگتری غیر از R_n را نتیجه دهد.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید G یک گراف جهت‌دار متناهی باشد. مجموعه بازخورد، یک مجموعه از یال‌هاست که شامل حداقل یک یال از هر دور جهت‌دار است.

لوچسی و یانگر[۳][۱۱] در قضیه زیر رابطه بین تعداد دورهای مجزا در یک گراف جهت‌دار و مینیم اندازه مجموعه بازخورد را مشخص کرده‌اند. در هر گراف جهت‌دار متناهی مسطح، اندازه یک مجموعه مینیمم بازخورد با ماکسیمم تعداد دورهای مجزا جهت‌دار برابر است.

این قضیه اخیرا توسط باراهونا [۴][۲] به صورت زیر اصلاح شده است.

قضیه ۲.۳.۲. *اگر D یک گراف جهت‌دار متناهی باشد که شامل هیچ زیر تقسیمی از $K_{۳,۳}$ نیست، آنگاه اندازه یک مجموعه بازخورد مینیمم با ماکسیمم تعداد دورهای مجزا یالی برابر است.*

تعریف ۳.۳.۲. گراف جهت‌دار G دارای خاصیت بسته بندی دوری است، هرگاه ماکسیمم اندازه یک خانواده از دورهای مجزا یالی با مینیمم اندازه یک مجموعه بازخورد برابر باشد، گراف بی‌جهت دارای خاصیت بسته‌بندی دوری است هرگاه در هر جهت‌دهی از یال‌های آن منجر به یک گراف جهت دار با خاصیت بالا شود.

اینک قضایا بالا را برای مسأله تحمیل‌کننده به کار می‌بریم. فرض کنید G یک گراف دوپارچه و M یک جورسازی کامل از آن باشد. گراف جهت‌دار $D(M)$ با خاصیت بسته

[۳] Lucchesi, Younger

[۴] Barahona

بندی دوری را به روش زیر بسازید: فرض کنید مجموعه رئوس $D(M)$، همان مجموعه رئوس G باشد. چون G دو پارچه است، لذا رئوس می‌توانند به دو مجموعه مجزا افراز شوند. این مجموعه‌ها را A و B بنامید. اگر $e \in M$، آنگاه e را از A به B جهت دار کنید و اگر $e \notin M$، آنگاه e را از B به A جهت دار کنید. برهان لم زیر بلافاصله از تعاریف بالا حاصل می‌شود.

لم ۲.۳.۴. *یک تناظر یک‌به‌یک بین دورهای متناوب در M و دورهای جهت‌دار در $D(M)$ وجود دارد. علاوه بر این، دو دور متناوب در $D(M)$ همدیگر را در یک یال قطع می کنند یا اصلا قطع نمی‌کنند.*

همچنین یک تناظر طبیعی بین مجموعه های تحمیل‌کننده در M و مجموعه‌های بازخورد در $D(M)$ موجود است.

لم ۲.۳.۵. *برای هر مجموعه بازخورد در $D(M)$ یک مجموعه تحمیل‌کننده در M با همان اندازه موجود است.*

برهان. فرض کنید F_M یک مجموعه بازخورد در $D(M)$ باشد. اگر همه یال‌های F_M مشمول در M باشند، آنگاه بنابه گزاره ۲.۰.۱، F_M یک مجموعه تحمیل‌کننده برای M است. اگر یالی چون e وجود داشته باشد که $e \in F_M$ و $e \notin M$ ، آنگاه یال منحصربه‌فردی مانند $f \in M$ موجود است که انتهای آن ابتدای یال e است. هر دور در $D(M)$ که از e عبور کند، باید از f نیز عبور کند. بنابراین می توان یال e را از F_M حذف کرده و یال f را اضافه کرد. این روند را ادامه می دهیم تا همه یال‌های F_M در M قرار گیرد. □

عکس لم ۲.۳.۵ نیز صحیح است. زیرا هر مجموعه تحمیل‌کننده در M یک مجموعه بازخورد در $D(M)$ است. بعلاوه $D(M)$ دارای خاصیت بسته‌بندی دوری است. زیرا G خاصیت بسته‌بندی دوری دارد.

قضیه ۶.۳.۲. *برای هر جورسازی کامل M از گراف دوپارچه G با خاصیت بسته‌بندی دوری $f(M,G)=c(M)$.*

برهان. هر مجموعه تحمیل‌کننده $S \subset M$ باید شامل یک یال از هر دور متناوب باشد. در غیراین‌صورت اگر C دور متناوبی باشد که $S \cap C = \emptyset$، آنگاه S می‌تواند مشمول در جورسازی دیگری مانند M' با عوض کردن یال‌های عضو M در C با یال‌های دیگر باشد، بنابراین $f(M,G) \geq C(M)$.

□

قضیه ۲ .۳ .۶ و لم‌های ۲ .۳ .۴، ۲ .۳ .۵ نشان می‌دهند که در گراف دوپارچه با خاصیت بسته‌بندی دوری مسائل تحمیل‌کننده معادل با تعیین تعداد دورهای متناوب مجزا در جورسازی است.

حال می‌توانیم با استفاده از قضیه ۲ .۳ .۶ یک کران بالا برای عدد تحمیل‌کننده یک جورسازی کامل در گراف‌های دوپارچه بدست آوریم.

گزاره ۷.۳.۲. *فرض کنید G یک گراف دوپارچه از مرتبه p با کمر g دارای بسته‌بندی دوری و جورسازی کامل باشد. در این صورت برای هر جورسازی کامل M از G، $\varphi(M) \leq \lfloor \frac{p}{g} \rfloor$.*

برهان. واضح است که هر دور متناوب ساده باید شامل حداقل g رأس باشد. بنابر قسمت دوم لم ۴.۳.۲، ماکسیمم تعداد دورهای متناوب ساده مجزا در M، برابر $\lfloor \frac{p}{g} \rfloor$ است. بنابر قضیه۶.۳.۲، $\varphi(M) \leq \lfloor \frac{p}{g} \rfloor$ و این برهان را کامل می‌کند. □

۴.۲ مسایل متفرقه

نتایج بدست آمده در بخش‌های قبل را می‌توانیم به شبکه‌های مستطیلی $P_n \times P_m$ دلخواه در حالتی که mn زوج است، تعمیم دهیم. اگرچه رفتار کران پائین در این نوع گراف‌ها