بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

بررسی مدل ماده تاریک اسکالر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

سید نبی الله صالحی ساداتی

استاد راهنما

دکتر مسلم زارعی

۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک آقای سید نبی الله صالحی ساداتی

تحت عنوان

بررسی مدل ماده تاریک اسکالر

در تاریخ ۱۳۹۳/۱۰/۲۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مسلم زارعی
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر فرهنگ لران
۳- استاد مدعو	دکتر بهروز میرزا
۴- استاد ممتحن داخلی	دکتر غلام رضا خسروی
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر فرهاد شهبازی

اکنون که در سایه الطاف و عنایات بیکران پروردگار موفق به نگارش این پایان نامه شده ام، بر خود لازم می دانم که از استاد گرامی ام جناب دکتر زارع که شاگردی ایشان افتخاری بزرگ برای اینجانب بوده و در تمام مراحل انجام این پروژه از راهنمایی های ارزشمندشان بهره مند شدم تشکر و قدردانی نمایم. منش بزرگوارانه و سعه صدر ایشان همواره برایم تحسین برانگیز بوده است. از جناب دکتر طهران که زحمت مشاوره و نیز از آقایان دکتر میرزا و دکتر خسروی که ارزشیابی پایان نامه را بر عهده داشتند بسیار سپاسگزارم.

خالصانه ترین و سبزترین سپاس خود را نثار پدر و مادر بزرگوارم می سازم که وجودشان مایه دلگرمی و آرامشم بوده و حمایت های بی دریغشان همواره یاری رسان من بوده است. از خواهران و برادران عزیزم که در تمام دوران تحصیل مشوق من بوده اند صمیمانه سپاسگزارم و به پاس همه خوبی هایشان از خداوند برایشان خوشبختی می خواهم.

در آخر از همه دوستان عزیزی که دوره دانشجویی را در جمع صمیمانه شان سپری کردم تشکر می کنم و برای همه روزهای خوش همراه با کامیابی را آرزومندم

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم

فهرست مطالب

۱ مقدمه **۱**

۲ مدل استاندارد کیهان‌شناسی **۴**

۱.۲ متریک FRW ۴

۲.۲ ژئودزیک ۱۰

۳.۲ بررسی ژئودزیک با متریک FRW ۱۲

۴.۲ انتقال به سرخ ۱۳

۳ تاریخچه گرمایی کیهان **۱۷**

۱.۳ ترمودینامیک ۱۷

۲.۳ حد نسبیتی ۲۱

۳.۳ حد غیر نسبیتی ۲۲

۴.۳ درجات آزادی موثر ۲۳

۵.۳ پایستگی آنتروپی ۲۶

۶.۳ جدایی نوترینو ۳۳

۷.۳ نابودی زوج الکترون –پوزیترون ۳۴

۴ چگالی نسبی ماده تاریک **۳۷**

۱.۴ معادله بولتزمن ۳۷

۲.۴ یخ زدگی ۴۰

۳.۴ ماده تاریک داغ ۴۳

۴.۴ ماده تاریک سرد ۴۴

۵ مدل ماده تاریک اسکالر **۴۸**

۱.۵ ماده تاریک اسکالر ۴۸

۶ بحث و نتیجه گیری **۵۶**

لیست تصاویر

۱.۳ تغیرات g_* و g_{*s} بر حسب دما [۹] ۲۸
۲.۳ نحوه کاهش دمای فوتون و نوترینو ۳۵

۱.۴ تغییرات تعداد ذرات با تغیر سطح مقطع پراکندگی یخ‌زدگی ذرات جرم دار [۱۴]. ۴۷

۱.۵ نمودار فاینمن $SS \to hh$ ۵۰
۲.۵ نمودار فاینمن $SS \to W^{\pm}$ ۵۱
۳.۵ نمودار فاینمن $SS \to ZZ$ ۵۲
۴.۵ نمودار فاینمن $SS \to \bar{f}f$ ۵۴
۵.۵ نحوه‌ی تغییر چگالی نسبی ذره‌ی اسکالر در اثر تغییر جفتیدگی برای ذره‌ی اسکالر بدون جرم اولیه ۵۴
۶.۵ فضای پارامتر تابعی از جرم و جفتیدگی ذره‌ی اسکالر ($۰/۴ < \Omega_{DM} < ۰/۲$) ۵۵
۷.۵ فضای پارامتر تابعی از جرم اولیه و جفتیدگی ذره اسکالر ($۰/۴ < \Omega_{DM} < ۰/۲$) ۵۵

چکیده

پارامتر چگالی نسبی Ω_{DM} (نسبت چگالی ماده تاریک به چگالی بحرانی) را می‌توان با استفاده از مدل استاندارد کیهان‌شناسی و معادله‌ی بولتزمن بر اساس نرخ بر هم‌کنش ماده تاریک با دیگر ذرات، محاسبه نمود. نرخ برهم‌کنش تابعی از سطح مقطع پراکندگی است. بنابراین با محاسبه‌ی سطح مقطع پراکندگی و واپاشی می‌توان پارامتر چگالی نسبی را محاسبه کرد. با اعمال قید بر روی Ω_{DM} می‌توان فضای پارامتر مدل های مختلف ماده تاریک را به دست آورد. با بررسی و مقایسه پارامتر چگالی نسبی به دست آمده با چگالی ماده تاریک می‌توان مدل‌هایی که خصوصیات ماده تاریک دارند را مشخص نمود. در این پژوهش ما به بررسی ساده‌ترین مدل ارائه شده برای ماده تاریک (اسکالر حقیقی) با تقارن $Z_۲$ (نگه داشتن جملات تا مرتبه $\phi^۴$) که به مدل استاندارد اضافه می‌شود، می‌پردازیم و با توجه به فراوانی ماده تاریک به دست آمده از نتایج ماهواره پلانک، حدود پارامترهای فضا(جرم ماده تاریک و جفتیدگی ذره ماده تاریک و هیگز) را تعیین می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

سطح مقطع پراکندگی، کیهان اولیه، ماده تاریک، معادله بولتزمن، پارامتر چگالی نسبی، نرخ نابودی، مدل اسکالر حقیقی

فصل ۱

مقدمه

بر اساس مدل استاندارد کیهان‌شناسی، کیهان از یک پلاسمای بسیار داغ و چگال (متراکم)، شروع به انبساط هابلی کرده است. بر اثر این انبساط، جهان داغ اولیه شروع به سرد شدن می‌کند. اغلب گونه‌های تشکیل دهنده پلاسمای کیهان اولیه در تعادل گرمایی هستند. اما بعضی مواقع انحرافات قابل توجهی از تعادل گرمایی به وجود می‌آید. به طور مثال می‌توان به فرایندهای جدایی نوترینو، جدایی تابش زمینه کیهانی، جدایی ماده تاریک از برهم‌کنش با پلاسمای داغ اشاره نمود. اگر چنین فرآیندهایی وجود نداشت، جهان کنونی با چنین دمایی تشکیل نمی‌شد. تحول توزیع فضای فاز گونه‌هایی که در تعادل گرمایی هستند یا کاملا از تعادل جدا شده‌اند، به سادگی محاسبه می‌شوند. اما تغییرات توزیع ذرات حول لحظه جداشدن چالش برانگیز است. معیار کلی برای اینکه یک گونه در تعادل گرمایی باقی بماند و یا از تعادل خارج شود، مقایسه نرخ برهم‌کنش ذرات (Γ) و نرخ انبساط کیهان (H) است. طوری که اگر $\Gamma \geq H$ باشد ذره در تعادل باقی می‌ماند اما اگر $\Gamma < H$ ذره از تعادل خارج می‌شود.

به طور کلی رفتار جدایی یک ذره باید از تابع توزیع فضای فاز پیروی کند یعنی اینکه معادله‌ی بولتزمن برقرار باشد،

$$\frac{x}{Y_{eq}}\frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma_{ann}}{H}[(\frac{dY}{dY_{eq}})^{۲} - ۱] \quad (۱.۱)$$

که در آن Y نسبت چگالی توزیع ذرات n_ψ به چگالی آنتروپی s است، $x \equiv \frac{m}{T}$ و Y_{eq} مشخص‌کننده ذرات در حال تعادل است که برای ذرات غیر نسبیتی به صورت زیر مشخص می‌شود

$$Y_{eq} = \frac{۴۵}{(۲\pi)^۴}(\frac{\pi}{۸})^{\frac{۱}{۲}}\frac{g}{g_{*s}}x^{\frac{۳}{۲}}e^{-x} = ۰/ ۱۴۵\frac{g}{g_{*s}}x^{\frac{۳}{۲}}e^{-x} \quad (x \gtrsim ۳) \tag{۲.۱}$$

و برای ذرات نسبیتی به صورت زیر می‌باشد

$$Y_{eq} = \frac{۴۵\zeta(۳)}{(۲\pi)^۴}\frac{g_{eff}}{g_{*s}} =/ ۲۷۸\frac{g_{eff}}{g_{*s}} \quad x \lesssim ۳ \tag{۳.۱}$$

در رابطه (۱.۱) مشاهده می‌کنیم که تغییرات نسبی تعداد ذرات بر واحد حجم، $\frac{\Gamma}{H}$ برابر اندازه انحراف از تعادل است و وقتی $\frac{\Gamma}{H}$ کمتر از یک باشد تغییرات نسبی تعداد ذرات بر واحد حجم کوچک شده و بر هم‌کنش‌ها منجمد می‌شوند و تعداد ذرات ثابت می‌ماند. معادله‌ی بولتزمن برای بررسی فراوانی گونه‌ها، شکل خاصی از معادله ریکاتی[۱] است که حل عمومی ندارد. معادله را با تقریب حل می‌کنند. نرخ برهم‌کنش‌ها در هر دو حالت نسبیتی و غیرنسبیتی با کاهش دما، کم می‌شوند و سرانجام با انجماد برهم‌کنش‌ها ذره از تعادل خارج می‌شود. در هنگام یخ زدگی، $x = x_f$، نرخ برهم‌کنش‌ها برابر نرخ انبساط می‌شود. ما انتظار داریم که در دماهای بالاتر از دمای یخ زدگی $x \ll x_f$، همه ذرات با هم در تعادل باشند $Y = Y_{eq}$، ولی در دماهای پایین‌تر از دمای یخ زدگی $x \gg x_f$ تعداد ذرات برابر با ذرات در حال تعادل در لحظه یخ زدگی باشد $Y_{x \gtrsim x_f} = Y_{eq}(x_f)$. اگر $x_f \lesssim ۳$ ، گونه در حالی که نسبیتی است از تعادل جدا شود. به این گونه‌ها ماده‌تاریک داغ می‌گویند. برای این نوع از ذرات پارامتر چگالی نسبی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\Omega_\psi h^۲ = ۰/ ۲۷۸[\frac{g_{eff}}{g_{*s}(x_f)}] \tag{۴.۱}$$

اگر $x_f \gtrsim ۳$ باشد و گونه ما به صورت غیر نسبیتی از تعادل گرمایی خارج شود، به این گونه ماده‌تاریک سرد می‌گویند. برای این گونه پارامتر چگالی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\Omega_\psi = ۳ \times ۱۰^{-۱۰}(\frac{GeV^{-۲}}{\sigma_۰})\frac{۱}{\sqrt{g_*(t_f)}}log\Big(\frac{gM^*_{pl}m_\psi\sigma_۰}{(۲\pi)^{\frac{۳}{۲}}}\Big).\frac{۱}{۲h^۲} \tag{۵.۱}$$

با استفاده از روابط بالا می‌توان Ω_ψ های به دست آمده برای گونه را با $\Omega_{DM}h^۲ = ۰/ ۱۱۹۶ \pm ۰/ ۰۰۳۱$ مقایسه نمود [۱۹] تا بتوان گونه‌ای که خصوصیات ماده تاریک دارد، را پیدا کرد. سوالی که پیش می‌آید این است که مدل‌های

[۱] Riccati equation

مناسب توصیف‌کننده‌ی ماده‌تاریک چه مدل‌هایی هستند؟ چه ویژگی‌هایی باید داشته باشند؟ چه نوع ذراتی در واپاشی می‌توانند به ماده تاریک، با پارامتر چگالی نسبی لازم تبدیل شوند؟

کارهای متفاوت بسیاری در این زمینه صورت گرفته است. در این پایان نامه مدل ماده‌تاریک اسکالر حقیقی را بررسی می‌کنیم. واپاشی و سطح مقطع نابودی این مدل را در برهم‌کنش با ذرات دیگر، حساب می‌کنیم و سپس با استفاده از معادله بولتزمن پارامتر چگالی نسبی آن را محاسبه می‌نماییم. مشخص می‌کنیم که چه حدودی را باید بر پارامترها اعمال کنیم و فضای پارامتر را به دست می‌آوریم.

با به دست آوردن فضای پارامتر، به کمک نرم افزار $Mathematica$ به این سوال می‌پردازیم که آیا با حدود اعمال شده بر پارامترها، مدل هم چنان جواب می دهد؟

فصل ۲

مدل استاندارد کیهان‌شناسی

۱.۲ متریک FRW

برای یک فضا-زمان همگن و همسانگرد، متریک فریدمن[1]-رابرتسون[2] -واکر[3] (FRW) جهان در حال انبساط را توصیف می‌کند

$$ds^۲ = dt^۲ - a^۲(t)\{\frac{dr^۲}{۱ - kr^۲} + r^۲ d^۲\theta + r^۲ \sin^۲ \theta d^۲\varphi\} \quad (۱.۲)$$

که در آن (t, r, θ, φ) مختصات همراه[4] هستند.

در این رابطه k نشان دهنده انحنای فضا است و نسبت به زمان ثابت است و می‌تواند مقادیر $(-۱, ۰, +۱)$ را به ترتیب برای انحنای مثبت-تخت و منفی داشته باشد [۱][۵]. در این رابطه $a(t)$ عامل مقیاس است که به طور صریح وابسته به زمان است و نشان دهنده‌ی انبساط عالم است.

---

[1] Friedmann

[2] Robertson

[3] Walker

[4] comoving coordinate

این متریک حلی از معادلات میدان انیشتین است که برای یک سیال کامل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (۲.۲)$$

$G_{\mu\nu}$ تانسور انیشتین، $T_{\mu\nu}$ تانسور فشار-انرژی است که منجر به معادلات فریدمن می‌شود. تانسور $G_{\mu\nu}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R} g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (۳.۲)$$

$g_{\mu\nu}$ برای متریک FRW عبارت است از

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 a^2(t) \sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad (۴.۲)$$

برای مشخص کردن تانسور انحنای انیشتین ابتدا به معرفی کمیت‌های هندسی زیر می‌پردازیم [۳]:

۱-نماد کریستوفل که با Γ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\delta}(g_{\delta\nu,\sigma} + g_{\delta\sigma,\vartheta} - g_{\nu\sigma,\delta}) \qquad (۵.۲)$$

علامت (،) مشتق جزئی را نشان می‌دهد

$$g_{\delta\nu,\sigma} = \frac{\partial}{\partial x_\sigma} g_{\delta\nu} \qquad (۶.۲)$$

و اندیس‌های δ, ν, μ, α مقادیر صفر تا سه را می‌گیرند.

۲-تانسور ریمان با عبارت زیر داده می‌شود

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\delta\mu}\Gamma^{\delta}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\nu}\Gamma^{\delta}_{\beta\mu} \qquad (۷.۲)$$

۳-تانسور ریچی حالتی است که دو تا از اندیس‌های بالا و پایین با هم برابر باشند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \qquad (۸.۲)$$

با استفاده از قانون جمع انیشتین (جمع روی اندیس‌های تکراری)داریم

$$R_{\mu\nu} = R^{0}_{\mu0\nu} + R^{1}_{\mu1\nu} + R^{2}_{\mu2\nu} + R^{3}_{\mu3\nu} \qquad (۹.۲)$$

۴-اسکالر ریچی را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \qquad (۱۰.۲)$$

و با استفاده‌ی دوباره از قانون جمع انیشتن می‌توان نوشت

$$\mathcal{R} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \qquad (۱۱.۲)$$

با استفاده از روابط (۴.۲) و (۵.۲) و (۶.۲) می‌توان Γ^{0}_{11} را به دست‌آورد

$$g_{0\delta}\Gamma^{\delta}_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^{1}} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^{1}} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^{0}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2a\dot{a}}{1-kr^{2}}\right) = -\frac{a\dot{a}}{1-kr^{2}}$$

حال باید جمع روی همه‌ی مقادیر δ را به دست آوریم

$$g_{00}\Gamma^{0}_{11} + g_{01}\Gamma^{1}_{11} + g_{02}\Gamma^{2}_{11} + g_{03}\Gamma^{3}_{11} = \frac{-a\dot{a}}{1-kr^{2}}$$

به دلیل صفر بودن عناصر غیر قطری ماتریس $g_{\mu\nu}$ داریم

$$g_{00}\Gamma^{0}_{11} = \frac{-a\dot{a}}{1-kr^{2}} \Rightarrow (-1)\Gamma^{0}_{11} = \frac{-a\dot{a}}{1-kr^{2}} \Rightarrow \Gamma^{0}_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^{2}} \qquad (۱۲.۲)$$

برای محاسبه‌ی Γ^{0}_{22} نیز به طور مشابه داریم

$$g_{0\delta}\Gamma^{\delta}_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^{0}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}r^{2}a^{2}(t)\right) = -r^{2}a\dot{a}$$

و دوباره روی همه‌ی مقادیر δ جمع می‌بندیم

$$g_{00}\Gamma^{0}_{22}+g_{01}\Gamma^{1}_{22}+g_{02}\Gamma^{2}_{22}+g_{03}\Gamma^{3}_{22}=-r^{2}a\dot{a}\quad g_{00}\Gamma^{0}_{22}=-r^{2}a\dot{a}\Rightarrow\Gamma^{0}_{22}=r^{2}a\dot{a}$$

با همین روش می‌توان دیگر مقادیر غیر صفر کریستوفل را محاسبه کرد که عبارتند از

$$\begin{aligned}
&\Gamma^{0}_{33}=r^{2}a\dot{a}\sin^{2}\theta\\
&\Gamma^{1}_{10}=\Gamma^{1}_{01}=\frac{\dot{a}}{a}\\
&\Gamma^{1}_{11}=\frac{kr}{1-kr^{2}}\\
&\Gamma^{1}_{22}=r(kr^{2}-1)\\
&\Gamma^{1}_{33}=r(kr^{2}-1)\sin^{2}\theta\\
&\Gamma^{2}_{21}=\Gamma^{2}_{12}=\frac{1}{r}\\
&\Gamma^{3}_{30}=\Gamma^{3}_{03}=\frac{\dot{a}}{a}\\
&\Gamma^{3}_{31}=\Gamma^{3}_{13}=\frac{1}{r}\\
&\Gamma^{3}_{32}=\Gamma^{3}_{23}=\cot\theta\\
&\Gamma^{2}_{33}=-\cos\theta\sin\theta
\end{aligned}\tag{۱۳.۲}$$

اکنون همه‌ی مقادیر غیر صفر کریستوفل را داریم با استفاده از (۷.۲) و (۸.۲) می‌توان عناصر تانسور ریمان و سپس عناصر تانسور ریچی را به دست آوریم

$$R^{1}_{010}=\Gamma^{1}_{00,1}+\Gamma^{1}_{01,0}+\Gamma^{1}_{\beta 1}\Gamma^{\beta}_{00}-\Gamma^{1}_{\beta 0}\Gamma^{\beta}_{01}=0+\frac{\ddot{a}}{a}+0+0+=\frac{\ddot{a}}{a}\tag{۱۴.۲}$$

دیگر عناصر غیر صفر ماتریس ریمان را می‌توان به همین ترتیب به دست آورد

$$
\begin{aligned}
R^{۰}_{۱۱۰} &= \frac{\ddot{a}}{kr^{۲-۱}} \\
R^{۰}_{۲۲۰} &= -r^{۲} a\ddot{a} \\
R^{۰}_{۳۳۰} &= -r^{۲} a\ddot{a}\sin^{۲}\theta \\
R^{۱}_{۰۱۰} &= -\frac{\ddot{a}}{a} \\
R^{۱}_{۲۲۱} &= -r^{۲}(k+\dot{a}^{۲}) \\
R^{۱}_{۳۳۱} &= -r^{۲}\sin^{۲}\theta(k+\dot{a}^{۲}) \\
R^{۲}_{۰۲۰} &= -\frac{\ddot{a}}{a} \\
R^{۲}_{۱۲۱} &= \frac{k+\dot{a}^{۲}}{۱-kr^{۲}} \\
R^{۲}_{۳۳۲} &= -r^{۲}\sin^{۲}\theta(k+\dot{a}^{۲}) \\
R^{۳}_{۰۳۰} &= -\frac{\ddot{a}}{a} \\
R^{۳}_{۱۳۱} &= \frac{k+\dot{a}^{۲}}{۱-kr^{۲}} \\
R^{۳}_{۲۳۲} &= r^{۲}(k+\dot{a}^{۲})
\end{aligned}
\qquad (۱۵.۲)
$$

چون متریک FRWقطری است پس تانسور ریچی برای این متریک قطری خواهد بود که مولفه‌های غیر صفر آن با استفاده از رابطه (۹.۲) عبارتند از

$$
\begin{aligned}
R_{۰۰} &= R^{۰}_{۰۰۰} + R^{۱}_{۰۱۰} + R^{۲}_{۰۲۰} + R^{۳}_{۰۳۰} = -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{۳\ddot{a}}{a} \\
R_{۱۱} &= R^{۰}_{۱۰۱} + R^{۱}_{۱۱۱} + R^{۲}_{۱۲۱} + R^{۳}_{۱۳۱} = -\frac{a\ddot{a}}{kr^{۲}-۱} + \frac{k+\dot{a}^{۲}}{۱-kr^{۲}} + \frac{k+\dot{a}^{۲}}{۱-kr^{۲}} = \frac{۲k+۲\dot{a}^{۲}+a\ddot{a}}{۱-kr^{۲}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{۲۲} &= R^{۰}_{۲۰۲} + R^{۱}_{۲۱۲} + R^{۲}_{۲۲۲} + R^{۳}_{۲۳۲} = r^{۲}a\ddot{a} + r^{۲}(k+\dot{a}^{۲}) + (k+\dot{a}^{۲}) = r^{۲}(۲(k+\dot{a}^{۲}) + a\ddot{a}) \\
R_{۳۳} &= R^{۰}_{۳۰۳} + R^{۱}_{۳۱۳} + R^{۲}_{۳۲۳} + R^{۳}_{۳۳۳} \\
&= r^{۲}a\ddot{a}\sin^{۲}\theta + r^{۲}\sin^{۲}\theta(k+\dot{a}^{۲}) + r^{۲}\sin^{۲}\theta(k+\dot{a}^{۲}) = r^{۲}\sin^{۲}\theta(۲(k+\dot{a}^{۲}) + a\ddot{a})
\end{aligned}
\qquad (۱۶.۲)
$$

اکنون مقدار اسکالر ریچی را محاسبه می‌کنیم. ما باید از قاعده‌ی جمع انیشتین استفاده کنیم ولی چون تانسور ریچی

قطری است تمام مولفه‌های صفر از بین می‌روند بنابراین داریم

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{۰۰}R_{۰۰} + g^{۱۱}R_{۱۱} + g^{۲۲}R_{۲۲}g^{۳۳}R_{۳۳} = \frac{۶(k + \dot{a}^{۲} + a\ddot{a})}{a^{۲}} \qquad (۱۷.۲)$$

اکنون همه‌ی مولفه‌های لازم برای محاسبه‌ی تانسور انیشتین را داریم و با استفاده از رابطه‌ی (۳.۲) داریم

$$\frac{۱}{۲}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{a^{۲}(t)}{۲(۱-kr^{۲})} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r^{۲}a^{۲}(t) & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & r^{۲}a^{۲}(t)\sin^{۲}\theta) \end{bmatrix} \frac{۶(ka\dot{a}^{۲} + a\ddot{a})}{a^{۲}}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{۳(k+\dot{a}^{۲}+a\ddot{a})}{a^{۲}} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳(k+\dot{a}^{۲}+a\ddot{a})}{۱-kr^{۲}} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳r^{۲}(k + \dot{a}^{۲} + a\ddot{a}) & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۳r^{۲}\sin^{۲}\theta(k + \dot{a}^{۲} + a\ddot{a}) \end{bmatrix} \qquad (۱۸.۲)$$

از جمع این تانسور با تانسور $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ می‌توانیم تانسور انیشتن را به دست آوریم

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{۳(k+\dot{a}^{۲})}{a^{۲}}a & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{k+\dot{a}^{۲}+a\ddot{a}}{kr^{۲}-۱} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r^{۲}(k + \dot{a}^{۲} + ۲a\ddot{a}) & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & r^{۲}\sin^{۲}(\theta)(k + \dot{a}^{۲} + ۲a\ddot{a}) \end{bmatrix} \qquad (۱۹.۲)$$

حال با استفاده از پایه‌های متعامد [۴]

$$\begin{aligned} (\hat{e}_t) &= (۱, ۰, ۰, ۰) \\ (\hat{e}_r) &= (۰, \sqrt{۱ - kr^{۲}}, ۰, ۰) \\ (\hat{e}_\theta) &= (۰, ۰, \frac{۱}{r}, ۰) \\ (\hat{e}_\varphi) &= (۰, ۰, ۰, \frac{۱}{r\sin\theta}) \end{aligned} \qquad (۲۰.۲)$$

عناصر تانسور خمش انیشتین عبارتند از

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{3(k+\dot{a}^2)}{a^2}$$
$$G_{\hat{r}\hat{r}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -\frac{k+\dot{a}^2+2a\ddot{a}}{a^2} \tag{۲۱.۲}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۳.۲) که در آن G ثابت گرانش نیوتون و $T_{\mu\nu}$ تانسور فشار- انرژی است [۵]

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} \tag{۲۲.۲}$$

به معادلات فریدمن می‌رسیم [۲]

$$\frac{3(k+\dot{a}^2)}{a^2} = 8\pi G\rho \tag{۲۳.۲}$$

$$-\frac{k+\dot{a}^2+2a\ddot{a}}{a^2} = 8\pi G p \tag{۲۴.۲}$$

و سپس با قرار دادن معادله اول در معادله دوم خواهیم داشت

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p+\rho) \tag{۲۵.۲}$$

۲.۲ ژئودزیک

بررسی حرکت یک ذره به جرم m در منحنی فضا-زمان، (کوتاهترین مسیر بین دو نقطه از فضا-زمان) به شکل زیر بیان می‌شود [۶]

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0 \tag{۲۶.۲}$$

که در آن $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ چهار بردار سرعت است

$$\frac{du^\mu}{ds} = \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{du^\mu}{dx^\alpha} = u^\alpha \frac{du^\mu}{dx^\alpha} \qquad (۲۷.۲)$$

معادله‌ی حرکت ژئودزیک را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$u^\alpha\left(\frac{du^\mu}{dx^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\beta\right) = ۰ \qquad (۲۸.۲)$$

قسمت پرانتز را مشتق هموردا تعریف می‌کنند که به صورت زیر بیان می‌شود

$$\nabla_\alpha u^\mu \equiv \partial_\alpha u^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\beta \qquad (۲۹.۲)$$

معادله‌ی حرکت ژئودیزیک را اکنون به شکل زیر داریم

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = ۰ \qquad (۳۰.۲)$$

با استفاده از تعریف چهار بردار اندازه حرکت برای ذره

$$p^\mu = m u^\mu \qquad (۳۱.۲)$$

می‌توان معادله‌ی (۲۸.۲) را به صورت زیر نوشت

$$p^\alpha \frac{dp^\mu}{dx^\alpha} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \qquad (۳۲.۲)$$