دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

نقاط ثابت نگاشت های لیپشیتسی یکنواخت

اساتید راهنما

دکتر.امیر خسروی   دکترعلیرضا مدقالچی

تدوین

سیده سمانه جوادی سیاهکله

شهریور ماه ۱۳۸۷

فهرست مندرجات

۱.۰ چکیده

بحث اصلی این پایان نامه در مورد نقاط ثابت نگاشت های k− لیپشیتسی [۱] یکنواخت در فضاهای متریک کامل کراندار است. فضاهای موسوم به فضاهای $CAT(k)$ را معرفی می کنیم. سپس به بررسی ضریب ساختار نرمال، مشخصه لیفسیک [۲] و ویژگی (p) در این فضا می پردازیم. با استفاده از این خواص قضیه لیفسیک و قضیه منسوب به لیم و زو [۳] را بیان می کنیم. همچنین به بررسی دو قضیه فوق در فضاهای R− درخت [۴] و فضاهای ابر محدب می پردازیم.

واژه های کلیدی: نگاشت های لیپشیتسی یکنواخت، نقاط ثابت، فضاهای $CAT(k)$، فضاهای ابر محدب.

[۱] Lipschitzian
[۲] Lifšic
[۳] T.C.Lim , H.K.Xu
[۴] R-Tree

۲.۰ مقدمه:

این پایان نامه شامل چهار فصل است و بحث اصلی آن در مورد نقاط ثابت نگاشت های $k-$ لیپشیتسی در فضاهای $CAT(k)$ و فضاهای ابر محدب است.

اگر (X,d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $T:M\to M$ که $M\subset X$ را نگاشت لیپشیتسی یکنواخت نامیم اگر $k>0$ ای موجود باشد که برای هر $x,y\in M$، $n\in N$،

$$d(T^n x,T^n y)\leq kd(x,y).$$

فصل اول این پایان نامه به مقدماتی از آنالیز حقیقی وآنالیز تابعی اختصاص دارد. در این فصل فضاهای دوگان و فضاهای انعکاسی معرفی شده است. همچنین پس از تعریف نگاشت های $k-$ لیپشیتسی انقباض و انقباضی به بیان اصل انقباض باناخ می پردازیم.

در فصل دوم نگاشت های $k-$ لیپشیتسی یکنواخت را تعریف می کنیم. سپس فضاهای به طور یکنواخت محدب ، پیمانه تحدب وساختار نرمال را تعریف می کنیم. همچنین قضیه زیر را برای نگاشت های $k-$ لیپشیتسی یکنواخت در فضاهای به طور یکنواخت محدب ثابت می کنیم.

قضیه. فرض کنید X یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشد.$\gamma>1$ وجود دارد کهاگر M زیر مجموعه‌ای ناتهی، بسته، محدب وکرانداراز X باشد و $T:M\to M$ نگاشتی $k-$ لیپشیتسی یکنواخت باشد که $k<\gamma$ آنگاه T در M نقطهٔ ثابت دارد.

$\kappa(X)$ مشخصه لیفسیک و ویژگی (p) ، ضریب ساختار نرمال و ساختارنرمال یکنواخت را برای فضاهای متریک تعریف می کنیم و دو قضیهٔ اساسی زیر را بیان و ثابت می کنیم.

قضیه لیفسیک: اگر (X,ρ) یک فضای متریک کامل کراندار باشد، هر نگاشت $k-$ لیپشیتسی یکنواخت $T:X\to X$ به ازای هر $k<\kappa(X)$ یک نقطه ثابت دارد.

قضیه. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل کراندار با هر دو ویژگی (p) و ساختار

نرمال یکنواخت و $T: X \to X$ نگاشت لیپشیتسی یکنواخت با $k < \tilde{N}(X)^{\frac{-1}{2}}$ باشد. آن گاه T دارای نقطهٔ ثابتی در X است.

در فصل سوم به معرفی فضاهای $CAT(k)$ می پردازیم. مفاهیمی مثل ژئودزی ، مثلث ژئودزی را تعریف می کنیم. سپس به معرفی مدل فضاهای $M_k{}^n$ می پردازیم.

(۱) اگر $k = 0$، آنگاه $M_0{}^n$ فضای اقلیدسی $\mathbb{E}^n$ است .

(۲) اگر $k < 0$. $M_k{}^n$ فضای هذلولوی H^n است.

(۳) اگر $k > 0$. $M_k{}^n$ فضای بیضوی است و از کرهٔ به شعاع $\frac{1}{\sqrt{k}}$ به دست می آید.

با این مقدمات فضاهای $CAT(k)$ را تعریف می کنیم و نشان می دهیم که اگر X یک فضای $CAT(k)$ باشد، برای هر $k' \geq k$، X یک فضای $CAT(k')$ است. پس مطالبی که در مورد فضاهای $CAT(k)$ با $k = 0$ ثابت می شود،در مورد فضاهای با $k < 0$ برقرار است. پس از آن به تعریف فضاهای ابر محدب و فضاهای $R-$ درخت و ارتباط بین این فضاها می پردازیم. و در پایان نشان می دهیم که ضریب ساختار نرمال در فضاهای ابر محدب $\frac{1}{2}$ است.

در فصل چهارم قضایای اصلی را در فضاهای $CAT(0)$ بررسی می کنیم. برای این منظور نشان می دهیم که در یک فضای $CAT(0)$ کامل $\kappa(X) \geq \sqrt{2}$ است و اگر X فضای $R-$ درخت باشد،$\kappa(X) = 2$ است. پس قضیه لیفسیک در فضای $CAT(0)$ به صورت زیر است.

قضیه. فرض کنید (X, d) یک فضای $CAT(0)$ کامل کراندار باشد . هر نگاشت $k-$ لیپشیستی یکنواخت $T: X \to X$ با $k < \sqrt{2}$ یک نقطهٔ ثابت دارد.

نکتهٔ جالب اینجاست که در فضاهای $R-$ درخت کامل هر نگاشت پیوسته یک نقطهٔ ثابت دارد.اما برای بررسی قضیهٔ دوم در فضاهای $CAT(0)$ با استناد به قضیهٔ ژانگ [5] ضریب ساختار

[5] Jung

نرمال در فضای $CAT(0)$ را محاسبه می کنیم. و نشان می دهیم که هر فضای $CAT(0)$ ویژگی (p) را داراست.

دربخش آخر به بررسی فضاهای ابر محدب می پردازیم، نشان می دهیم که هر فضای متریک ابر محدب کامل است.پس در فضای ابر محدب کراندار داریم:

اگر X یک فضای متریک ابر محدب کراندار با ویژگی (p) باشد، هر نگاشت $k-$ لیپشیستی یکنواخت $T : X \to X$ با $k < \sqrt{2}$ یک نقطه ثابت دارد.

اما با نشاندن فضای ابر محدب X در یک فضای بزرگتر نشان می دهیم که هر نگاشت $k-$ لیپشیستی یکنواخت تحت فرض ضعیفتر از ویژگی (p) نقطه ثابت دارد.

مرجع اصلی در این پایان نامه مقاله زیر است.

[10] S.Dhompongsa , W.A.Kirk ,Brailey Sims.Fixed points of uniformly Lipschitzian mappings

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل که شامل سه بخش است مفاهیمی چون غلاف محدب، فضای دوگان، فضای انعکاسی واصل انقباض باناخ و قضایای مربوط را که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرد به اختصار می آوریم.

۱.۱ پیش نیاز ها

فضای متری کامل : فضای متری (M,d) را کامل گوییم در صورتی که هر دنبالهٔ کوشی در M دراین فضا همگرا باشد.

فضای متریک کراندار: در فضای متریک (M,d)، مجموعه E را کراندار گوییم اگر عدد $K<\infty$ باشد که برای هر x,y در E، $d(x,y)\leq K$ باشد.

اگر A زیر مجموعه‌ای ناتهی از فضای متریک (M,d) باشد، و اگر $x\in M$، در این صورت نماد های $diamA$ و $dist(x,A)$ را به ترتیب برای نشان دادن قطر A ، فاصله x از A به کار می بریم. و چنین تعریف می کنیم:

$$diamA=sup\{d(x,y):x,y\in A\}$$

و
$$dist(x,A)=inf\{d(x,y):y\in A\}$$

همچنین گوی بستهٔ به مرکز x و شعاع $r>0$ را با $B(x;r)$ نشان می دهیم. یعنی:

$$B(x;r)=\{y\in M:d(x,y)\leq r\}$$

B_M و S_M به ترتیب گوی واحد و کرهٔ واحد را نشان می دهند ، در واقع S_M مرز B_M است.

فضای نرمدار: فضای برداری X روی میدان ϕ فضای نرم دار نام دارد اگر به هر $x\in X$ عدد حقیقی $\|x\|$ منسوب شود که در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) به‌ازای هر x,y در X $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

(۲)به‌ازای هر $x\in X$، $\alpha\in\phi$، $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

(۳)به‌ازای هر $x\neq 0$ ، در X $\|x\|>0$

اگر X یک فضای نرم دار با نرم $\|.\|$ باشد. همه تعاریف بالا برای متریک روی فضای $(X,\|.\|)$ با متر $d(x,y)=\|x-y\|$ برقرار است.

تعریف فضای باناخ : فضای باناخ فضای نرمداری است که با متر تعریف شده با نرم $d(x,y)=\|x-y\|$ کامل باشد. به این معنی که هر دنبالهٔ کوشی در آن همگرا باشد.

فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای از فضای باناخ X است. کوچک ترین زیر مجموعهٔ محدب از X شامل A را با $convA$ نشان می دهیم که غلاف محدب نامیده می شود یعنی

$$convA=\bigcap\{K\subseteq X:A\subseteq K,\ \text{محدب است}\ K\}$$

به علاوه $x\in convA$ اگروتنها اگر x به صورت $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ که $x_i\in A$، $\lambda_i\geq 0$، $n\in\mathbb{N}$، $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$

بستار $convA$، یعنی $\overline{convA}$ غلاف بسته محدب A نامیده می شود.

$$\overline{conv}A = \bigcap\{K \subseteq X : A \subseteq K, \text{ بسته و محدب است } K\}$$

$cov(A)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$cov(A) = \cap\{B : \text{ گوی بسته است } B, A \subseteq B\}$$

۲.۱ فضاهای دوگان و انعکاسی

برای دو فضای باناخ Y, X فضای همه عملگرهای خطی کراندار(پیوسته)از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می دهیم.

نرم عملگر $T \in L(X,Y)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\|T\| = sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq ۰\} = sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = ۱\}$$

با این نرم $L(X,Y)$ یک فضای نرم دار است. اگر Y فضای باناخ باشد.آنگاه $(L(X,Y), \|.\|)$ نیز فضای باناخ است [۱۳].

فضای دوگان یا فضای مزدوج X را با X^* نشان می دهیم ، فضای $X^* = L(X, \mathbb{R})$ را فضای دوگان X می نامیم.اعضای X^* تابعک های خطی پیوسته روی X نامیده می شوند. برای $x^* \in X^*$ و $x \in X$ نماد زیر را به کار می بریم.

$$x^*(x) =< x, x^* >$$

فضای $X^{**} = L(X^*, \mathbb{R})$ فضای دوگان دوم فضای باناخ X نامیده می شود.اگر $x \in X$ ثابت باشد،آنگاه $x^* \longmapsto < x, x^* >$ یک تابعک خطی پیوسته روی X^* تعریف می کند،بنا براین x با یک عضو از X^{**} متناظراست. نگاشت $x \longmapsto x^{**}$ نشاندن طبیعی از X در X^{**} نامیده می شود.

قضیهٔ زیر به عنوان نتیجه ای از قضیه هان باناخ [۱] است.

[۱] Hhan banach

قضیه ۱.۲.۱. اگر x یک بردار از فضای نرم دار X باشد، آنگاه تابعک خطی پیوسته x^* بر X وجود دارد به طوری که $\|x^*\| = 1$ و $x^*(x) = \|x\|$.

با توجه به قضیهٔ بالا نشاندن طبیعی همیشه یک طولپایی خطی است. اگراین نگاشت پوشا باشد آنگاه X انعکاسی نامیده می شود ومی نویسیم $X \cong X^{**}$.

قضیه ۲.۲.۱.(اسمولین[۲] ۱۹۳۹) [۷] فضای باناخ X انعکاسی است اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌نزولی $\{K_n\}$ از زیر مجموعه های نا تهی، بسته، محدب وکراندار از X، $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

۳.۱ اصل انقباض باناخ

اگر (M,d) یک فضای متریک باشد، نگاشت $T : M \to M$ **لیپشیتسی** است اگر $k \geq 0$ ای وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in M$ ،

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y).$$

کوچکترین k ای که در نامساوی بالا صدق می کند ثابت لیپشیتس برای T نامیده می‌شود که با $k(T)$ یا به اختصار با k نشان می دهند. برای دو نگاشت لیپشیتسی $T, S : M \to M$ واضح است که،

$$k(ToS) \leq k(T)k(S)$$

و به ویژه $k(T^n) \leq k(T)^n$ و برای هر عدد حقیقی $\alpha \geq 0$، $k(\alpha T) = \alpha k(T)$.اگر $k(T) < 1$،نگاشت $T : M \to M$ را یک **انقباض** نامیم.

قضیه.(اصل انقباض باناخ).اگر (M,ρ) یک فضای متریک کامل و $T:M\to M$ یک انقباض باشد، آنگاه T نقطهٔ ثابت (یعنی $Tx = x$) منحصربه فردی در M دارد و برای هر $x_0 \in M$ دنباله $\{T^n x_0\}$ به‌این نقطه ثابت همگراست.

[۲] smulian

برهان. ابتدا منحصربه فردی چنین نقطه‌ای را ثابت می کنیم. فرض کنیم y,x دو نقطه ثابت متمایز T باشند،آنگاه

$$\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)\leq k\rho(x,y)<\rho(x,y)$$

که تناقض دارد. حال وجود چنین نقطه ای راثابت می کنیم.

نقطهٔ $x_{\circ}$ را دلخواه و ثابت در نظر می گیریم و دنباله $\{x_n\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$x_{۱}=Tx_{\circ}, x_{n+۱}=Tx_n \qquad n=۱,۲,....$$

بنا براین

$$x_n=T^n x_{\circ} \qquad n=۱,۲,....$$

پس برای هر n و برای هر p از $\mathbb{N}$ داریم:

$$\rho(x_n,x_{n+p})=\rho(T^n x_{\circ},T^{n+p}x_{\circ})$$

$$=\rho(T^n x_{\circ},T^n\circ T^p x_{\circ})$$

$$\leq k(T^n)\rho(x_{\circ},T^p x_{\circ})$$

$$\leq k^n[\rho(x_{\circ},Tx_{\circ})+\rho(Tx_{\circ},T^{۲}x_{\circ})+...+\rho(T^{p-۱}x_{\circ},T^p x_{\circ})]$$

$$\leq k^n(۱+k+...+k^{p-۱})\rho(x_{\circ},Tx_{\circ})$$

$$=k^n(\frac{۱-k^p}{۱-k})\rho(x_{\circ},Tx_{\circ})$$

$$<k^n(\frac{\rho(x_{\circ},Tx_{\circ})}{۱-k}).$$

چون $k<۱$ و $\frac{\rho(x_{\circ},Tx_{\circ})}{۱-k}$ ثابت است، $\{x_n\}$ دنبالهٔ کوشی است وچون M یک فضای متریک کامل است بنا براین $x\in M$ ای وجود دارد که $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. با توجه به این که T پیوسته

است نتیجه می شود که

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$$

به عبارت دیگر x نقطهٔ ثابت T است و

$$\rho(x_n, x) = \rho(T^n x_0, x) \to 0.$$

اگر T نگاشتی باشد که به ازای n ای $k(T^n) < 1$، پس T^n یک نگاشت انقباض است و بنابر قضیه بالا، $x \in M$ ی وجود دارد که $T^n x = x$ و بنا براین

$$Tx = T^{n+1}x = T^n(Tx)$$

که بنا به منحصربه فردی نقطهٔ ثابت نگاشت T^n، نتیجه می شود $Tx = x$، به عبارت دیگر نتیجه می شود که T نیز نقطهٔ ثابت دارد.□

یک نگاشت $T : M \longmapsto M$ **انقباضی** نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in M$ و $x \neq y$ نامساوی زیر برقرارباشد:

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y)$$

بدیهی است که چنین نگاشت هایی حد اکثر یک نقطهٔ ثابت دارند.

مثال نگاشت $T : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ با ضابطه $Tx = 1 + ln(1 + e^x)$، مثال ساده ای است که انقباضی است ولی نقطهٔ ثابت ندارد. زیرا برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$ln(1 + e^x) > lne^x$$

بنابراین

$$1 + ln(1 + e^x) > 1 + x$$

به عبارت دیگر برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$Tx - x > ۱$$

که نتیجه می شود

$$|x - Tx| > ۱$$

بنابر این T نمی تواند دارای نقطهٔ ثابت باشد. حال ثابت می کنیم که T یک نگاشت انقباضی است.

فرض کنیم $x, y \in \mathbb{R}$ دلخواه و $x > y$ پس، $e^x > e^y$، بنابراین

$$e^{-x} + ۱ < e^{-y} + ۱$$

طرفین را در e^x ضرب و لگاریتم می گیریم که نتیجه می شود

$$\frac{۱ + e^x}{۱ + e^y} < e^{x-y}$$

و

$$ln(\frac{۱ + e^x}{۱ + e^y}) < x - y,$$

به عبارت دیگر

$$Tx - Ty < x - y$$

با توجه به این که فرض کردیم $x > y$ ، می توان نتیجه گرفت که

$$|Tx - Ty| < |x - y|.\square$$

فصل ۲

نگاشت های $k-$ لیپشیتسی یکنواخت

۱.۲ معرفی نگاشت های $k-$ لیپشیتسی یکنواخت

اگر (X, d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $T : M \to M$ را که $M \subset X$ ، نگاشت $k-$ **لیپشیتسی یکنواخت** نامیم اگر $k > 0$ ای موجود باشد که برای هر $x, y \in M$، $n \in \mathbb{N}$ ،

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y).$$

بدیهی است که نگاشت های انقباض و انقباضی نوعی از نگاشت های لیپشیتسی یکنواخت اند. جالب است بدانیم که اگر در تعریف بالا $k = 1$ باشد،T را نگاشت **ناگسترده** نامیم. اگر X فضای نرم دار با نرم $\|.\|$ باشد، تعریف بالا به صورت زیر است: اگر $M \subset X$ باشد، نگاشت $T : M \longmapsto M$ را نگاشت $k-$ لیپشیتسی یکنواخت نامیم اگر $k > 0$ ای موجود باشد که برای هر $x, y \in M$ ، $n \in \mathbb{N}$،

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k\|x - y\|.$$

اما تعریف نگاشت های ناگسترده در فضای باناخ با نرم $\|.\|$ به صورت زیر است:

فرض کنید X یک فضای باناخ با نرم $\|.\|$ وM زیر مجموعه‌ای ناتهی، بسته، محدب و

کرانداراز X باشد. نگاشت $T : M \to M$ ناگسترده نامیده می شود اگر برای هر $x, y \in M$

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

پس همه نگاشت های نا گسترده، نگاشت های $k-$ لیپشیتسی یکنواخت به ازای $k = ۱$ اند.

۲.۲ تحدب گوی واحد

تعریف ۱.۲.۲. فضای باناخ X به طور یکنواخت محدب نامیده می شود اگر برای هر $\epsilon \in (۰, ۲]$ ، $۰ < \delta < ۱$ موجود باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ اگر $\|x\| \leq ۱$ ، $\|y\| \leq ۱$ ، $\|x - y\| \geq \epsilon$ ، آنگاه $\|\frac{x+y}{۲}\| \leq \delta$.

تعریف ۲.۲.۲. پیمانهٔ تحدب یک فضای باناخ X تابع δ_X از $[۰, ۲]$ به $[۰, ۱]$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta(\epsilon) = \delta_X(\epsilon) = inf\{۱ - \|\frac{x + y}{۲}\| : \|x\| \leq ۱, \|y\| \leq ۱, \|x - y\| \geq \epsilon\}$$

واضح است که برای هر $\epsilon > ۰$ عدد $\delta_X(\epsilon)$ بزرگترین عددی است که برای $x, y \in X$ اگر $\|x\| \leq ۱$ ، $\|y\| \leq ۱$ ، $\|x - y\| \geq \epsilon$،

آنگاه $$(*) \quad \|\tfrac{x+y}{۲}\| \leq ۱ - \delta_X(\epsilon)$$

نشان می دهیم فضای باناخ X ، به طور یکنواخت محدب است اگر وتنها اگر برای هر $\epsilon > ۰$ ، پیمانه تحدب X در $\delta(\epsilon) > ۰$ صدق کند.

فرض کنیم برای هر $\epsilon > ۰$ پیمانه تحدب X در $\delta(\epsilon) > ۰$ صدق کند. $\epsilon \in (۰, ۲]$ دلخواه در نظر می گیریم. پس برای هر x, y اگر $\|x\| \leq ۱$ ، $\|y\| \leq ۱$، $\|x - y\| \geq \epsilon$،

داریم $$\|\tfrac{x+y}{۲}\| \leq ۱ - \delta(\epsilon) < ۱$$

با قرار دادن $\delta = ۱ - \delta(\epsilon)$ نتیجه می شود که X به طور یکنواخت محدب است.

حال فرض می کنیم X به طور یکنواخت محدب باشد. پس برای هر $\epsilon \in (۰, ۲]$، $۰ < \delta < ۱$ ای وجود دارد که برای هر $x, y \in X$، اگر $\|x\| \leq ۱$ ، $\|y\| \leq ۱$ ، $\|x-y\| \geq \epsilon$، نتیجه می شود که $\|\frac{x+y}{۲}\| \leq \delta = ۱ - (۱ - \delta)$.

از آن جا که $\delta_X(\epsilon)$ بزرگ ترین عددی است که در شرط $(*)$ صدق می کند لذا $\delta(\epsilon) \geq ۱ - \delta > ۰$ پس $\|\frac{x+y}{۲}\| \leq ۱ - \delta(\epsilon)$ که نتیجه می دهد برای هر $\epsilon > ۰$، $\delta(\epsilon) > ۰$.

تعریف ۳.۲.۲. مشخصه یا ضریب تحدب یک فضای باناخ X عبارت از عدد زیر است.

$$\epsilon_۰ = \epsilon_۰(X) = sup\{\epsilon \geq ۰ : \delta(\epsilon) = ۰\}$$

لم ۴.۲.۲. [۷.۵.۱] فرض کنید X یک فضای باناخ با پیمانهٔ تحدب δ و مشخصهٔ تحدب $\epsilon_۰$ باشد. آنگاه δ بر بازهٔ $[۰, ۲)$ پیوسته است وبر بازهٔ $[\epsilon_۰, ۲]$ اکیدا صعودی است.

برای هر $x, y \in X$ ، $R > ۰$ و $r \in [۰, ۲R]$، اگر $\|x\| \leq R$ ، $\|y\| \leq R$ ، $\|x-y\| \geq r$، آنگاه

$$\|\frac{x+y}{۲}\| \leq (۱ - \delta_X(\frac{r}{R}))R.$$

زیرا $\|\frac{x}{R}\| \leq ۱$ ، $\|\frac{y}{R}\| \leq ۱$، $\|\frac{x-y}{R}\| \geq \frac{r}{R}$، بنابراین:

$$\|\frac{x+y}{۲R}\| \leq ۱ - \delta_X(\frac{r}{R}).\square$$

فرض می کنیم X یک فضای باناخ وDوH زیر مجموعه‌هایی از X باشند و $u \in X$. قرار می دهیم:

$$r_u(D) = sup\{\|u - v\| : v \in D\}$$

$$r_H(D) = inf\{r_u(D) : u \in H\}$$

$$C_H(D) = \{u \in H : r_u(D) = r_H(D)\}$$

عدد $r_u(D)$ شعاع D نسبت به u نامیده می شود و $r_H(D)$ و $C_H(D)$ به ترتیب **شعاع چیبشف**[۱] **و مرکزچیبشف** D نسبت به H نامیده می شود. وقتی $H = D$ نماد $r(D)$ و $C(D)$ را به ترتیب به جای $r_H(D)$ و $C_H(D)$ به کار می بریم. واضح است که اگر $u \in C_H(D)$ آنگاه $B(u; r_u(D))$ شامل D است و هیچ گویی به مرکزنقطه‌ای از H با شعاع کوچکتر چنین ویژگی ندارد و بد یهی است که برای هر $u \in D$ داریم:

$$r(D) \leq r_u(D) \leq diamD$$

به علاوه تابع $r_u : D \to R$ به عنوان تابعی از u روی زیر مجموعه محدب ، بسته و کراندار D از X تابعی پیوسته و محدب است. توجه کنید که تابع $f(u) = r_u(D)$، $u \in D$، حقیقی مقدار است و $|f(u) - f(v)| \leq \|u - v\|$. زیرا به ازای هر $z \in D$

$$\|z - u\| \leq \|z - v\| + \|v - u\| \leq r_v(D) + \|v - u\|.$$

لذا $$r_u(D) \leq r_v(D) + \|v - u\|$$

به طریق مشابه $r_v(D) \leq r_u(D) + \|v - u\|$.

پس $|f(u) - f(v)| = |r_u(D) - r_v(D)| \leq \|v - u\|$، لذا f پیوسته است.

اگر $u, u' \in D, \circ < t < ۱$ ، $f(tu + (۱ - t)u') \leq tf(u) + (۱ - t)f(u')$. زیرا

$$\|tu + (۱ - t)u' - z\| \leq t\|u - z\| + (۱ - t)\|u' - z\|$$

$$r_{tu+(۱-t)u'}(D) \leq tr_u(D) + (۱ - t)r_{u'}(D)$$

[۱] Chebyshev