بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضیات کاربردی- گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل عددی یک کلاس از معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا با هسته منفرد ضعیف

استاد راهنما

دکتر یداله اردوخانی

استاد مشاور

دکتر مرضیه اسکندری

دانشجو

نساء قربانیان گزافرودی

اسفند ۱۳۹۱

چکیده

هدف اصلی در این پایان نامه تقریب جواب معادلات انتگرال- دیفرانسیل ولترا ی خطی و غیرخطی با هسته منفرد ضعیف به شکل زیر می باشد:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) + \int_a^x k(t,x) y^m(t) dt \quad , \quad a \le x \le b \, .$$

که در آن $m \ge 1$ و $y(x)$ تابع مجهول است و $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال می باشد.

ابتدا جواب تقریبی معادلات انتگرال- دیفرانسیل ولترای خطی و غیر خطی مرتبه اول با هسته منفرد ضعیف $(n=1, m \ge 1)$ را به دست می آوریم وسپس معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای خطی مرتبه دوم با هسته منفرد ضعیف $(n=2, m=1)$ را حل می کنیم .

برای حل این معادلات ابتدا با استفاده از تقریب تیلور مشکل منفرد بودن هسته معادله انتگرال را از بین می بریم ، سپس معادله انتگرال دیفرانسیل را به معادله دیفرانسیل معمولی خطی یا غیرخطی تبدیل می کنیم . از روش تجزیه آدومیان برای حل این معادلات دیفرانسیل می توان استفاده کرد که از دقت خوبی برخوردار است . همچنین ما از روشی مبتنی بر بسط لژاندر با استفاده از نقاط هم محلی گاوس لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده می کنیم که در حل مثال های خطی کارساز است.

کلمات کلیدی : معادلات انتگرال- دیفرانسیل ولترا، هسته منفرد ضعیف، تقریب تیلور، معادلات دیفرانسیل ، تجزیه آدومیان، بسط لژاندر، نقاط هم محلی گاوس لژاندر

فهرست مندرجات

مقدمه

معادلات انتگرال کاربردهای فراوانی در مسائل مهندسی ، شیمی و بیولوژی دارد . نوعی ازمعادلات انتگرال، معادلات انتگرال منفرد ضعیف می باشد که در مسائل فراوانی از جمله انتقال گرما،رشد کریستالها و مکانیک سیالات ظاهر می شوند . با توجه به اینکه حل بسیاری از این معادلات با روشهای تحلیلی امکان پذیر نیست، روشهای عددی برای حل آنها بیان شده است. از جمله در [1] روشهایی برای تقریب معادلات انتگرال آبل بیان شده است و در [2] حل با روش بسط تیلور ارائه گردیده است.

پروفسور جیانگ [1] از جمله کسانی است که معادلات انتگرال با هسته منفرد ضعیف را مورد بررسی قرار داده است [3]. در [5-4] روش هم محلی برای معادلات انتگر ال ولترا و فردهلم با هسته منفرد ضعیف بیان شده است . در سالهای اخیر استفاده از روشهای مختلف نظیر روش تاو[2] در [6] ،روش تیلور[3] در [7]، روش اسپلاین در [8] و روش تجزیه آدومیان[4] بهبودیافته در [9] برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل ، توجه خاصی را در بین محققین جلب نموده است و شاهد گسترش بعضی از این روشها در حل معادلات انتگرال دیفرانسیل با هسته منفرد ضعیف در [11-10] می باشیم. همچنین تحلیل پایداری و همگرایی این روشها در [13-12] مورد بررسی قرار گرفته است.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل می باشد . در فصل اول مقدماتی از آنالیزحقیقی، آنالیز عددی و آنالیز تابعی ارائه می گردد که مورد نیاز فصل های بعدی می باشد . در فصل دوم معادلات انتگرال و انواع آن را بررسی می کنیم . در فصل سوم روش تقریب تیلور را به عنوان یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال منفرد ضعیف بیان می کنیم.

---

[1] Jiang
[2] Tau
[3] Taylor
[4] Adomian

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز از آنالیز حقیقی می پردازیم [15-14] که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند.

۱.۱ مفاهیم اولیه در آنالیز حقیقی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید V یک فضای برداری (خطی) روی R باشد. به تابع $\|.\|$ از V به R یک نرم گوییم هرگاه :

۱) به ازای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$ و $x = 0$ اگر و تنها $\|x\| = 0$.

۲) به ازای هر $\alpha \in R$ و $x \in V$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

۳) به ازای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

تعریف ۲.۱.۱ به فضای خطی X که دارای یک نرم است ، فضای خطی نرم دار گوییم .

اگر X یک فضای خطی نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x,y) = \|x - y\|$، به d یک متر روی X گوییم (d متر تولید شده به وسیله نرم است).

بنابراین هر فضای نرم دار ، یک فضای متریک است.

تعریف ۳.۱.۱ دنباله ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$را در فضای خطی نرم دار X همگرا به $x \in X$ گوییم هرگاه

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0 \ .$$

تعریف ۴.۱.۱ دنباله ی $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$را در فضای خطی نرم دار X کشی[۵] گوییم هر گاه

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \quad \forall m,n(m,n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon).$$

تعریف ۵.۱.۱ تابع f در x_0 پیوسته است اگر $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ؛ بطور معادل،

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

تعریف ۶.۱.۱ گوییم تابع f در x_0 پیوسته ی راست (یا از راست پیوسته) است اگر $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ؛ بطور معادل،

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \quad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

تعریف ۷.۱.۱ تابع f را که روی فاصله $[a,b]$ تعریف شده است روی این فاصله پیوسته مطلق گویند ، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوری که برای هر دسته با پایان $\{(x_i, x_i')\}$ از فاصله هایی که نقطه مشترک با هم ندارند و در نامساوی $\sum_{i=1}^{n}|x_i - x_i'| < \delta$ صدق می کنند ، داشته باشیم :

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_i')| < \varepsilon \quad .$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم f بر $[a,b]$ پیوسته باشد. نرم $\|\cdot\|_c$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\|f\|_c = \sup_{a\le x\le b}|f(x)| = \max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

---

[۵] Cauchy

تعریف ۹.۱.۱ هرگاه هر دنباله کشی در فضای متریک X به نقطه ای در X همگرا باشد، X را فضای کامل گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱ فضای خطی نرم دار X رایک فضای باناخ [۶] گوییم،هرگاه X نسبت به متریک تولید شده کامل باشد؛ یعنی هر دنباله کشی در X همگرا باشد .

مثال ۱.۱.۱ ساده ترین فضای باناخ،فضای اعداد مختلط روی $\mathbb{C}$ با متریک $d(x,y)=|x-y|$ می باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ برای $1\le p\le\infty$، فضای متشکل از تمام توابع اندازه پذیر $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ که $\int_a^b |f(t)|^p\,dt<\infty$ باشد ، فضای $L^p(a,b)$ گوییم. پس

$$L^p[a,b]=\{f \mid f:[a,b]\to\mathbb{C},\ \text{اندازه پذیر}\ f,\ \int_a^b |f(x)|^p\,dx<\infty\}.$$

قضیه ۱.۱.۱ فضای $L^p(a,b);1\le p\le\infty$ یک فضای کامل است.

$L^p(a,b)$ فضای برداری است و با نرم زیر یک فضای باناخ است،

$$\|f\|_p=\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

در حالت خاص $L^2(a,b)$ یعنی

$$L^2[a,b]=\{f \mid f:[a,b]\to\mathbb{C},\ \text{اندازه پذیر}\ f,\ \int_a^b |f(x)|^2\,dx<\infty\},$$

با نرم $\|f\|_2=\left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ است.

---

[۶] Banach

تعریف ۱۲.۱.۱ اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله ای در فضای نرم دار X باشد، گوییم سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ در X همگرا به x است هرگاه دنباله $s_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$ به x همگرا باشد و در این صورت می نویسیم ، $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$.

سری $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ را همگرای مطلق گوییم هرگاه $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

قضیه ۲.۱.۱ فضای نرم دار X باناخ است اگر وتنها اگر هر سری همگرای مطلق، همگرا باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ فضای خطی مختلط (یا حقیقی) X را یک فضای ضرب داخلی گوییم، هرگاه یک تابع مختلط (یا حقیقی) روی $X \times X$ که آن را با نماد $(,)$ نشان می دهیم وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x, y, z \in X$ وهر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

۱) جمع پذیری : $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$،

۲) تقارن مزدوج : $(x, y) = \overline{(y, x)}$،

۳) همگنی : $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$،

۴)مثبت بودن : $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, (x, x) \geq 0$

(x, y) ضرب داخلی x, y نامیده می شود.

این ضرب داخلی یک نرم به صورت $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ تعریف می کند.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد،آنگاه به ازای هر $x, y \in X$ داریم :

۱) نامساوی کشی-شوارتز[۷] : $|(x, y)| \le \|x\| \|y\|$،

۲) نامساوی مثلث: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$،

۳) اتحاد متوازی الاضلاع: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

مثال ۲.۱.۱ فضای $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای ضرب داخلی است :

$$\forall f, g \in L^2(a,b), \quad (f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt \ .$$

همچنین فضای $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر نسبت به تابع وزن ω روی $[a,b]$ یک فضای ضرب داخلی است :

$$\forall f, g \in L^2(a,b) \qquad (f, g)_\omega = \int_a^b \omega(t) f(t)\overline{g(t)}\,dt \ .$$

تعریف ۱۴.۱.۱ فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت[۸] گوییم هرگاه H نسبت به نرم تولید شده از ضرب داخلی $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ یک فضای باناخ باشد.

مثال ۳.۱.۱ $L^2(a,b)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است :

$$\forall f, g \in L^2(a,b), \quad (f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt \ .$$

تعریف ۱۵.۱.۱ تابع f را دارای محمل فشرده گوییم هرگاه تابع f در بازه های با اندازه متناهی، دارای مقدار متناهی باشد و در خارج بازه ی مذکور دارای مقدار صفر باشد.

---

۷ Cauchy-Schowarz
۸ Hilbert

تعریف ۱۶.۱.۱ تابع گاما[۹] را با Γ نشان داده و به صورت زیر تعریف می شود :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

که دارای ویژگیهای زیر است :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad ,$$
$$\Gamma(1) = 1 \quad , \Gamma(n+1) = n!, (n \in N) \ ,$$
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \ ,$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad ,$$
$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad ,$$
$$\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{-1}{2}) = -2\pi \quad ,$$

تعریف ۱۷.۱.۱ تابع خطا $Erf(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad .$$

تعریف ۱۸.۱.۱ تابع خطای مکمل یعنی $Erfc(x)$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$Erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \quad ,$$

که دارای خواص زیر است :

$$Erf(x) + Erfc(x) = 1$$
$$Erfc(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \ldots) \ ,$$
$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\times 2!} - \frac{x^7}{7\times 3!} + \ldots) \ ,$$
$$Erf(-x) = -Erf(x) \ ,$$
$$Erf(0) = 0 \ ,$$
$$Erf(\infty) = 1 \ .$$

---

[۹] Gamma

تعریف ۱۹.۱.۱ تبدیل لاپلاس f را با $L[f(t)]$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$L[f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt.$$

اینک به مفهوم دیگری که به وسیله ضرب داخلی تعریف می شود، می پردازیم.

۲.۱ تعامد

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای ضرب د اخلی بوده و $x,y\in X$ متمایز باشند، x را بر y عمود گوییم هرگاه برای $x\neq y$ داشته باشیم $(x,y)=0$ و آن را با نماد $x\perp y$ نمایش می دهیم. [16] اگر به ازای هر $x,y\in A$ داشته باشیم:

$$(x,y)=\begin{cases}0\ ; & x\neq y,\\ \alpha>0\ ; & x=y,\end{cases}$$

آنگاه زیر مجموعه ی $A\subset X$ را متعامد گوییم. اگر برای هر $x\in A$ داشته باشیم $\|x\|=1$، مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم.

قضیه ۱.۲.۱ اگر A زیرمجموعه ی متعامد یکه از فضای ضرب داخلی X باشد و $y\in X$، آنگاه

۱) $\{x\in A|(y,x)\neq 0\}$ شمارش پذیر است،

۲) $\sum_{x\in A}|(y,x)|^2\leq\|y\|^2$ (نامساوی بسل[۱۰]).

قضیه ۲.۲.۱ اگر A یک زیرمجموعه ی متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه سری فوریه $\sum_{x\in A}(y,x)x$ مستقل از ترتیب جملات همگراست.

---

[۱۰] Bessel

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید A یک زیرفضای ضرب داخلی X باشد. متمم متعامد A که با $A^{\perp}$ نشان داده می شود، مجموعه ی همه ی بردارهایی از X می باشد که بر A عمود هستند .

تعریف ۳.۲.۱ اگر X یک فضای ضرب داخلی و A زیرمجموعه ای از X باشد، A را کامل گوییم هرگاه $A^{\perp}=\{0\}$.

تعریف ۴.۲.۱ اگر X یک فضای ضرب داخلی و A یک زیرمجموعه ی متعامد یکه از X باشد، آنگاه A را یک پایه متعامد یکه برای X گوییم هرگاه به ازای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$y \doteq \sum_{x \in A} (y,x)x \ .$$

که در آن $\doteq$ به مفهوم تقریباً همه جا می باشد.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید A یک زیرفضا با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی X باشد .

برای هر بردار $y \in X$ ، تصویر متعامد y بر روی A، بردار یکتای $x \in A$ است که نزدیکترین بردار به y می باشد.

یعنی :

$$\|y-x\| = \min_{z \in A} \|y-z\| \ .$$

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید A زیرفضایی با بعد متناهی از یک فضای ضرب داخلی X باشد و فرض کنید $y \in X$ و x تصویر متعامد y روی A باشد،در این صورت بردار $y-x$ بر هر بردار در A عمود است.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید A زیرفضایی با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی X باشد. هر بردار $y \in X$ را می توان به طور یکتا به صورت $y=x+z$ ، که $x \in A$ و $z \in A^{\perp}$ می باشد، نوشت ؛ یعنی :

$$X = A \oplus A^{\perp}.$$

اثبات . فرض کنید y متعلق به X و x تصویر قائم آن روی A باشد، فرض کنید $z = y - x$؛ آنگاه

$$y = x + (y - x) = x + z$$

طبق قضیه قبل ، z بر هر بردار A عمود است. بنابراین z متعلق به $A^{\perp}$ است. ■

قضیه ۵.۲.۱ اگر A یک مجموعه ی متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد آنگاه شرایط زیر معادل هستند :

۱)برای هر $y \in H$ داریم $\|y\|^2 = \sum_{x \in A} |(y, x)|^2$ (اتحاد پارسوال[۱۱])،

۲) A کامل است،

۳) A یک پایه متعامد یکه است.

با توجه به این قضیه ، اگر A یک زیرمجموعه متعامد یکه کامل از فضای هیلبرت H باشد، آنگاه هر عضو $y \in H$ را می توان به صورت سری فوریه $\sum_{x \in A} (y, x)x$ بسط داد که سری فوریه مذکور بدون ترتیب جملات به y همگراست.

لم ۱.۲.۱ دنباله ی توابع متعامد ، مستقل خطی هستند.[17]

تعریف ۶.۲.۱ دستگاه متعامد نرمال $\{f_i\}$ را یک دستگاه متعامد نرمال کامل گوییم هرگاه هیچ دستگاه متعامد نرمال وسیعتر از آن وجود نداشته باشد.

به عبارت دیگر، اگر

$$\exists f \ , \forall i \, , \ (f \, , f_i) = 0 \Rightarrow f \doteq 0 \ .$$

---

[۱۱] Parseval

در بحث تقریب توابع، تقریب کمترین مربعات نقش اساسی دارد. بدین منظور داریم:

قضیه ۶.۲.۱ اگر $f_1, f_2, \dots, f_n$ دنباله ای از توابع متعامد نرمال (یکه) در $L^2(a,b)$ وهمچنین $f \in L^2(a,b)$ باشند آنگاه $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ی هست که $\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|$ مینیمم است و به $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ تقریب کمترین مربعات گوییم.

اثبات .

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|^2 = (f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i , f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i)$$
$$= (f, f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i, f) - \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} (f, f_j)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} (f_i, f_j).$$

فرض می کنیم $\eta_i = (f, f_i)$.پس داریم :

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\eta_i} - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \eta_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_i}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \eta_i \overline{\eta_i} - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \overline{\eta_i}$$
$$= \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \eta_i)(\overline{\alpha_i} - \overline{\eta_i}) - \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 .$$

در نتیجه

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \eta_i|^2$$

این عبارت وقتی مینیمم است که برای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $\alpha_i = \eta_i$.

در این صورت

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2$$

پس اگر $f \in L^2(a,b)$ و $\{f_i\}_{i=1}^n$ دستگاه متعامد نرمال در $L^2(a,b)$ باشد آنگاه $\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|$ حداقل است . به عبارت دیگر اگر $f \simeq \sum_{i=1}^{n} (f, f_i) f_i$ آنگاه $\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|$ حداقل است. ■

اگر دستگاه متعامد ، نرمال نباشد داریم:

$$f \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{(f, f_i)}{\|f_i\|^2} f_i \ .$$

در این قسمت توضیح مختصری راجع به چندجمله ایهای متعامد لژاندر و تقریب توابع می دهیم که در فصل ۳ مورد نیاز می باشد.

۱.۲.۱ چندجمله ایهای متعامد لژاندر و لژاندر انتقال یافته :

تعریف ۷.۲.۱ چندجمله ایهای لژاندر $\{L_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ روی بازه $[-1,1]$ یک مجموعه متعامد کامل برای فضای $L^2[-1,1]$ است. در واقع جواب مسأله اشتورم لیوویل

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)L_n'(x)) + n(n+1)L_n(x) = 0$$

می باشد که بصورت زیر معرفی می شود :

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x \\ L_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1}\, x\, L_n(x) - \dfrac{n}{n+1}\, L_{n-1} \quad , n \geq 1 \end{cases}$$

و دارای خواص زیر است :

$$1)(L_n, L_m) = \int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & , n = m \end{cases}$$

$$2)|L_n(x)| \leq 1$$

$$3)|L_n'(x)| \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

$$4)L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$$

$$5)L_n'(\pm 1) = (\pm 1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

تعریف ۸.۲.۱ چندجمله ایهای لژاندر انتقال یافته روی $[0,1]$ بصورت زیر تعریف می شوند و یک مجموعه متعامد کامل برای $L^2[0,1]$ است.

$$\begin{cases} p_0(x)=1 \\ p_1(x)=2x-1 \\ p_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}(2x-1)p_n(x)-\dfrac{n}{n+1}p_{n-1} \quad ,n\ge 1 \end{cases}.$$

در این صورت داریم :

$$(p_n,p_m)=\int_0^1 p_n(x)p_m(x)\,dx=\begin{cases} 0 & ,n\ne m \\ \dfrac{1}{2n+1} & ,n=m \end{cases}.$$

فرض کنیم $f\in L^2[0,1]$ پس می توان نوشت :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n p_n(x)$$

که

$$c_n=\frac{(f,p_n)}{\|p_n\|^2}=(2n+1)\int_0^1 f(x)p_n(x)dx$$

و p_n ها چندجمله ایهای مرتبه n لژاندر انتقال یافته می باشند .

اگر سری را تا m جمله اول قطع کنیم داریم:

$$f(t)\simeq\sum_{n=0}^{m-1} c_n p_n(x)=C^T P(x)$$

که

$$C^T=\left[c_0,c_1,\ldots,c_{m-1}\right]^T \quad , \quad P(x)=\left[p_0(x),p_1(x),\ldots,p_{m-1}(x)\right]^T$$

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنیم $\phi(t)$ یک بردار متعامد در $L^2(a,b)$ باشد. به ماتریس H در رابطه زیر ماتریس عملیاتی انتگرال گوییم :

$$\int_a^t \phi(t')dt' \simeq H\,\phi(t).$$

اگر $\phi(t)$ یک بردار m مؤلفه ای باشد واضح است که H یک ماتریس $m\times m$ است.

ماتریس عملیاتی انتگرال چندجمله ای متعامد لژاندر انتقال یافته به صورت زیر است :

$$H=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{-1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \frac{-1}{2m-3} & & 0 & \frac{1}{2m-3} \\ 0 & & & 0 & & \frac{-1}{2m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

فرض کنیم $f(t)=F^T\phi(t)$ در این صورت داریم :

$$\int_0^t f(t')\,dt' \simeq \int_0^t F^T\phi(t')\,dt' = F^T\int_0^t \phi(t')\,dt'.$$

آنگاه

$$\int_0^t f(t')dt' \simeq F^T \mathrm{H}\,\phi(t).$$

همچنین می توان نوشت :

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t f(t)dt\,dt\ldots dt}_{K\ \text{بار}} \\ &= \underbrace{\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F^T H\,\phi(t)dt\,dt\cdots dt}_{k-1\ \text{بار}} \\ &= \underbrace{\int_0^t\cdots\int_0^t F^T H^2\phi(t)dt\ldots dt}_{k-2\ \text{بار}} = \cdots = F^T H^k\phi(t). \end{aligned}$$

فرض کنیم $f(t)=g^{(k)}(t)$ با انتگرالگیری از طرفین داریم :

$$\int_0^t f(t')dt' = g^{(k-1)}(t)-g^{(k-1)}(0)$$

با k بار انتگرال گیری داریم:

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t f\,(t')dt'\cdots dt'}_{k \text{ بار}} = g(t) - g^{(0)}(0) - g^{(1)}(0)\int_0^t dt' - \cdots - g^{(k-1)}(0)\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t dt'\cdots dt'}_{k-1 \text{ بار}}$$

اگر $f(t) = g^{(k)}(t) = F^T \phi(t)$ آنگاه از رابطه فوق بدست می آید :

$$g(t) = F^T H^k \phi(t) + g^{(0)}(0) + g^{(1)}(0)\int_0^t dt' + \cdots + g^{(k-1)}(0)\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t dt'\cdots dt'}_{k-1 \text{ بار}}\ .$$