بسم الله الرحمن الرحيم

ن والقلم وما يسطرون

٢٥٥٢٦

دانشکده علوم
دانشگاه فردوسی مشهد

پایان نامه :

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

موضوع :

حل مسائل کمترین مربعات توسط روشهای مستقیم و تکراری

استاد راهنما :

سرکار خانم دکتر توتونیان

استاد مشاور :

جناب آقای دکتر کرایه چیان

استاد داور :

جناب آقای دکتر فراهی

نگارش :

رحیم بیگله

بهمن ماه ۱۳۷۵

حروفچینی کامپیوتری ـ تایپ دانشجو

بسمه تعالی

No: شماره:

Date: تاریخ:

پیوست:

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم - گروه ریاضی

Department of Mathematics

Ferdowsi University of Mashhad

P.O.Box 1159-91775,Mashhad

Islamic Republic of Iran

جلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ آقای رحیم بیگـلـه دانشجوی کـارشناسی ارشـد ریـاضـی محض /کاربردی درساعت ۱۱ صبح روز ۷۵/۱۱/۲۵ دراتاق شمارهٔ ۲۹ سـاختمان خوارزمی دانشکدهٔ علوم ۲ باحضور امضأ کنندگان ذیل تشکیل گردید . پس از بـررسی ونـظر هـیأت داوران ، پایان نامهٔ نامبرده بانمرهٔ هجده ونیم (۱۸/۵) مورد تأیید قرارگرفت .

عنوان رساله : " حل مساله کمترین مربعات بوسیله روشهای مستقیم و تکـراری "

تعداد واحد : ۶ واحـــد

داور رساله : آقای دکتر محمدهادی فراهی
استادیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

داور رساله : آقای دکتر اصغر کرایه چیان
استادیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

استاد راهنما: خانم دکتر فائزه توتونیان
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

مدیرگروه ریاضی : آقـــای دکتر محمدعلی پورعبداله نژاد
دانشیار گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد

بلواروکیل آباد - سه راه کوکا - خیابان شهیدباهنر - دانشکده علوم ۲ - صندوق پستی ۱۱۵۹-کد ۹۱۷۷۵ تلفن : ۰۵۱-۸۱۷۷۴۹
فاکس ۰۵۱-۸۱۷۷۴۹ ، پست الکترونیکی e-mail:math.sci@toos.um.ac.ir
Fax : 051-817749 , Tel : 0098-51-817749

تقدیم به :

پیشگاه با برکت امام هشتم علی‌ابن موسی الرضا (علیه‌السلام) که زندگی در جوارش سعادتی است.

تقدیم به :

همسرم

که در طول زندگی و تحصیل، صمیمی‌ترین قرین را هم در تحمل غم‌ها و شادی‌هایم بود و شریک زندگی من است.

تقدیم به :

روان پاک پدر و مادرم

که اولین معلمان من در زندگی بودند.

و

تقدیم به :

گلهای زندگی‌ام ،

زینب

محمّد

مُطّهره

و علی.

فهرست مطالب

عنـــوان صفحـــه

فصل چهارم

فصل پنجم

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

حمد و سپاس خداوند متعال را که عمر و سعادتی عطا فرمود تا در سایهٔ الطاف او و در جوار با برکت امام هشتم علی‌بن موسی‌الرضا (علیه‌السلام)، مسیر بس پر نشیب و فراز فراگیری علم را در جهت ارتقاء علمی خود و جامعه‌ام به انجام برسانم و از سعادت جوار این امام معصوم بهره‌مند شوم. راهی که جز در سایهٔ ایمان و عشق به خداوند و لطف و رحمت او، توان پیمودنش نبود وجز با تمسک به حربهٔ علم و دانش فتح قله‌های کمال و معرفت ممکن نباشد و این جز از طریق کسب فیض و تجربه از محضر اساتید و کوشش و تلاش در جهت بالا بردن سطح آگاهی از طریق مطالعه و تحقیق به بار نمی‌نشیند.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که برجسته‌ترین سپاس و تشکر خود را از **سرکارخانم دکتر توتونیان، استاد راهنمایم** داشته باشم که در تمام

مراحل تحصیل و تدوین پایان‌نامه با کمال صبر و صمیمیت پیشنهادات سازندهٔ خود را ارائه نمود و در این راه از هیچ کوششی دریغ ننمودند. همچنین تشکر و قدردانی از **جناب آقای دکتر کرایه‌چیان، استاد مشاورم** داشته باشم که راهنمایی‌های ایشان بسیار مفید بودند. از **جناب آقای دکتر فراهی** که قبول زحمت فرمودند و داوری این رساله را به عهده گرفتند و در این راه تذکرات بسیار سودمند و سازنده‌ای دادند تشکر و سپاسگزاری می‌شود.

از **آقای اتحاد** مسئول کتابخانه دانشکدهٔ علوم (۲) و همکاران به خاطر همکاری صمیمانهٔ آنها، از **سرکارخانم تهرانی** و **سرکارخانم صابری** منشیان گروه ریاضی به خاطر همکاری و برخورد خوبشان، از مسئولین آزمایشگاه کامپیوتر **برادران وطن‌دوست** و **سهرابی**، صمیمانه تشکر می‌کنم. از برادران دوران تحصیل، **آقایان مرتضی گچ‌پزان، سیدابوالفضل علوی، جواد وحیدی** و **سیدعباس موسوی** به خاطر همراهی آنها در طول مدت تحصیل صمیمانه تشکر می‌شود. لازم است که از مدیریت و پرسنل **مؤسسه تایپ دانشجو** به خاطر حوصله‌ای که در تایپ این رساله به خرج دادند تشکر و قدردانی شود.

باتشکر - رحیم بیگله

بهمن ماه ۱۳۷۵

«مقدمه»

در سالهای اخیر مسائل کمترین مربعات مورد توجه زیادی قرار گرفته است به طوری که این گونه مسائل در بخش‌های تحقیقی و علمی مهمی مانند نقشه‌برداری کروی(۱)، مطالعات زلزله‌شناسی(۲)، ساختمانهای مولکولی(۳)، توموگرافی(۴)، و محاسبات PDE(۵) (معادلات با مشتقات جزیی) مورد استفاده قرارگرفته‌اند. [10] و [12] عمل ذخیره‌سازی اطلاعات و روش اطلاعات قابل دسترس برای ذخیره کردن آنها، به مقدار زیادی بر انتخاب روشهای عددی حل چنین مسائلی تأثیر می‌گذارد. بنابراین روشهای‌تکراری‌جانشین‌مفیدوسودمندی برروشهای مستقیم هستند. گواینکه روشهای مستقیم را برای حل دستگاه با ابعاد کوچکتر و فوق معین جزیی نیز بکار می‌بریم.

اخیراً نتایج همگرایی روی روشهای تکراری و تشکیل برقراری طرحهای تکراری برون‌یابی سریع، روی دسته‌ای ازمسائل خاص، گرایش قابل ملاحظه‌ای در بررسی

---

(1)- *Geodetic surveying*
(2)- *Earthquake studies*
(3)- *Molecular structures*
(4)- *Tomography*
(5)- *Partial Differential Equation*

همگرایی این قبیل روشها ایجاد کرده است.

رسالهٔ حاضر مروری بر این روشها و تعیین پارامترهای بهینهٔ آنها ومشخص کردن بازه‌های همگرایی برای این روشها می‌باشد.

در فصل اول، ابتدا به معرفی مسأله کمترین مربعات جهت حل دستگاه فوق معین از طریق معادلات نرمال پرداخته و سپس طرحهای تکراری SOR دو و سه قطعه‌ای، معرفی گردیده و در پی آن روش فوق تخفیف شتابدار (AOR) برای مسائل کمترین مربعات برای حالت دو و سه قطعه‌ای معرفی گردیده است.

در فصل دوم، به بررسی یک روش مستقیم برای حل مسأله کمترین مربعات به نام روش حذفی و ارائه الگوریتمی مفید و کارا دراین مورد پرداخته‌ایم.

در فصل سوم، همگرایی روشهای تکراری SOR دو و سه قطعه‌ای برای حل مسألهٔ کمترین مربعات و پارامتر بهینه آنها و بازه‌های همگرایی این روشها تعیین گردیده است.

در فصل چهارم، طرحهای تکراری AOR قطعه‌ای برای حل مسأله کمترین مربعات با مقیاس بزرگ مورد بررسی قرار گرفته و در ادامهٔ آن به وسیلهٔ برون‌یابی، روش AGS سه قطعه‌ای که از خانواده AOR می‌باشد بررسی شده و بازه‌های همگرایی و پارامتر بهینهٔ آن و سپس عامل برون‌یابی آن محاسبه گردیده است.

در فصل پنجم، الگوریتم‌روش مزدوج گرادیان برای‌حل مسائل‌کمترین‌مربعات‌ارائه شده که‌درمقایسه‌باطرحهای تکراری SOR_2 و SOR_3 از سرعت عمل بیشتری برخورداراست.

تعاریف و قضایایی را که در طول این رساله به طریقی مورد استفاده قرار گرفته‌اند در بخش ضمیمه A در پایان آمده است. همچنین ضمیمه B به برنامه‌ها و مثالهای عددی جهت بکارگیری این روشها اختصاص یافته است. امید است که مورد استفاده قرار گیرد.

فصل اول

« معرفی مسأله کمترین مربعات »

« معرفی مسألهٔ کمترین مربعات[۱] »

دستگاه فوق معین خطی[۲] زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\hat{A}\,\hat{X} \cong \hat{b} \qquad (1\text{-}1)$$

که در آن $\hat{A} \in \Re^{m\times n}$ $(m \geq n)$ و رتبهٔ ستونی آن n می‌باشد. و $\hat{x} \in \Re^{n}$ و $\hat{b} \in \Re^{m}$ است.

منظور از جواب کمترین مربعات دستگاه (۱-۱)، یافتن بردار منحصر بفرد $y \in \Re^{n}$ است به طوری که:

$$\| \hat{b} - \hat{A}\,y \|_2 = \min_{\hat{x} \in \Re^{n}} \| \hat{b} - \hat{A}\,\hat{X} \|_2$$

یا به طور معادل، مجموعهٔ معادلات نرمال[۳]

$$\hat{A}^T\hat{A}\,y = \hat{A}^T b \qquad (1\text{-}2)$$

را در نظر می‌گیریم . جواب این دستگاه نرمال، بردار

$$y = (\hat{A}^T\hat{A})^{-1}\,\hat{A}^T b \qquad (1\text{-}3)$$

می‌باشد که جواب کمترین مربعات نامیده میشود. یک راه بسیار متداول برای تعیین y ، حل دستگاه (۲-۱) به روشهای مستقیم است. یعنی ماتریس $\hat{A}^T\hat{A}$ و بردار $\hat{A}^T b$ را محاسبه کرده و بااستفاده از روش حذفی گاوس و یا تجزیه چولسکی آن را حل می‌کنیم. (چون ماتریس فوق، ماتریسی متقارن است

---

(1)- Least squares problem
(2)- Linear over determined sy.
(3)- Normal equations

و می‌توان تجزیه چولسکی را به کار برد.) لیکن این راه حل، برای دستگاههای بزرگ و تنک(۱) ، راه حل ضعیفی است. زیرا عدد شرطی(۲) ماتریس $\hat{A}^T\hat{A}$ مربع عدد شرطی ماتریس $\hat{A}$ است و بنابراین ممکن است این روش از دقت لازم برخوردار نباشد. درایـنصورت ایـن گـونه روشـها قـابل اسـتفاده نمی‌باشند.

از این روی، در این رساله به بررسی روشهای کاراتری برای حل دستگاه (۲-۱) پرداخته شده است.

یک راه حل دیگر برای دستگاه (۲-۱) این است که بتوان ماتریس آنرا به صورت ساختار قطعه‌ای درآورد و از روشهای تکراری قطعه‌ای(۳) استفاده نمود. برای این منظور دستگاه (۲-۱) را می‌توان به صورت زیر بنویسیم :

$$\begin{cases} \hat{A}\,y + \hat{r} = \hat{b} \\ \hat{A}^T r = 0 \end{cases} \qquad (1\text{-}4)$$

که در آن $\hat{r} \in \Re^m$ را بردار باقی‌مانده(۴) گوئیم.

اکنون فرض کنیم که ماتریس $\hat{A}$ را به توانیم به صورت زیر تجزیه کنیم(۵) :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}5)$$

که در آن $A_1 \in \Re^{n \times n}$ ماتریسی نامنفرد است. مشابهاً برای بردارهای r و b افرازهای زیر را در نظر می‌گیریم :

---

(1)- Sparse
(2)- Condition number
(3)- Block iterative methods
(4)- Residual vector

(۵)- شیوه‌های تجزیه آن و تحلیل مسأله در منبع *[2]* آمده است.

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad و \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}6)$$

بنابراین دستگاه (۴-۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A\,X = b \qquad (1\text{-}7)$$

که در آن :

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & I \\ A_2 & I & 0 \\ 0 & A^T{}_2 & A^T{}_1 \end{bmatrix} \in \Re^{(m+n)(m+n)} \text{ و } b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re^{m+n} \text{ و } X=\begin{bmatrix} y \\ r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} \in \Re^{m+n}$$

$$(1\text{-}8)$$

چون A_1 نامنفرد است، می‌توان نشان داد که A با ساختار قطعه‌ای در (۸-۱) نیز نامنفرد است. یعنی $\det(A)\neq 0$[۱]

حال به معرفی روشهای تکراری قطعه‌ای که بررسی همگرایی روی این روشها بنا شده است می‌پردازیم.

طرح تکراری SOR دو قطعه‌ای[۲] :

ماتریس A در (۸-۱) را به صورت زیر افراز می‌کنیم :

---

(۱)ـ اثبات آن در (۴ـA) بخش ضمیمهٔ Aآمده است.

(2)- Successive over relaction

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & I \\ A_2 & I & 0 \\ \hline 0 & A^T_2 & A^T_1 \end{array}\right] \qquad (۱-۹)$$

باشکافی که روی ماتریس A به صورت زیر می‌دهیم :

$$A = D_2 (I - L_2 - U_2) \qquad (۱-۱۰)$$

که در آن ماتریسهای D_2 و L_2 و U_2 به صورت زیر هستند :

$$D_2 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & I & 0 \\ 0 & 0 & A^T_1 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(A_2A_1^{-1})^T & 0 \end{bmatrix} \text{ و } U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A_1^{-1} \\ 0 & 0 & A_2A_1^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(۱-۱۱)

ماتریس ژاکوبی تکراری[۱] دو قطعه‌ای آن چنین می‌شود :

$$J_2 = I - D_2^{-1}A = L_2 + U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A_1^{-1} \\ 0 & 0 & A_2A_1^{-1} \\ 0 & -(A_2A_1^{-1})^T & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱-۱۲)$$

واضح است که طیف J_2 موهومی محض[۲] می‌باشد.

---

(1)- Jacobi iteration matrix
(2)- Pure imaginary