چکیده

پایه و بنیاد کیهان شناسی مدرن، تئوری خطی اختلالات کیهان شناسی است که برای تشکیل و تحول ساختار جهان و هم چنین ناهمسانی های تابش میکرو موج زمینه به کار میرود. بر اساس این تئوری منشا این ناهمگنیها، در طول دوره تورمی ایجاد شده و با انبساط سریع در طول دوره (شبه) دوسیتر رشد کرده و تا مقیاس ها ی نجومی کشیده شده است.

بهترین حدس برای اصل و منشا این اختلالات، ارتعاشات کوانتومی ایجاد شده در جهان اولیه (دوره تورمی) است تا جایی که مفیدترین خاصیت تورم طیفی است که توسط اختلالات چگالی و امواج گرانشی ایجاد شده است. در فصل اول این پایان نامه، مروری مختصر بر چگونگی شکل گیری ارتعاشات کوانتومی در طول دوره تورمی و مفاهیم اساسی کیهان شناسی خواهیم داشت.

در فصل دوم، ارتعاشات کوانتومی میدان های اسکالر جرمدار و بدون جرم را مطالعه می کنیم و توان طیف حاصل از این ارتعاشات محاسبه می شود. در فصل سوم اختلالات انحنا به دو روش، یکی با استفاده از پیمانه طولی و دیگری به روش ناوردایی پیمانه ایی بدست می آید. در فصل چهارم به بررسی محاسبه ناهمسانی های موجوددر تابش میکرو موج زمینه کیهانی در مقیاس بزرگ می پردازیم و نتایج را به صورت مختصر مورد مطالعه قرار می دهیم.

1-1مقدمه

یکی از ایده های اساسی کیهان شناسی وجود دوره ایی قدیمی در تاریخ جهان می باشد که در آن پتانسیل یا انرژی خلا بر شکل های دیگر انرژی مانند ماده و تابش مسلط است. در طول تسلط خلا، عامل مقیاس به صورت نمایی (یا تقریبا نمایی) نسبت به زمان افزایش می یابد. دراین دوره که آن را به عنوان دوره تورمی می شناسیم، ناحیه ایی که از لحاظ فضایی کوچک است و در آن زمان، اندازه اش از شعاع هابل کوچکتر است می تواند بی-اندازه افزایش یافته به گونه ایی که تمام جهان قابل مشاهده امروزی را در بر گیرد. اگر جهان قدیم، این دوره از انبساط سریع را طی کند، می توان دریافت که چرا جهان قابل مشاهده تا این اندازه همگن و همسانگرد (با دقت نسبت بالایی) است.

همه خصوصیات مربوط به دوره تورمی ابتدا توسط گوس[1] در سال۱۹۸۱ ارائه شد. چندی بعد نتایج مهم مربوط به دوره تورمی مورد توجه قرار داده شد.

در ابتدا با جهانی آغاز می کنیم که در ترازهای کلاسیکی کاملا همگن و همسانگرد است و انبساط تورمی جهان، ارتعاشات خلا میدان تورمی را متوقف می کند. به گونه ایی که می توان آن را به صورت کمیتی کلاسیکی برآورد کرد. در هر مقیاس خودهمراه (مقیاسی که با انبساط جهان حرکت می کند) این موضوع بلافاصله بعد از خروج از افق ایجاد می شود.

ارتعاشات خلا به عنوان اختلالات چگالی انرژی اولیه، بعد از دوره تورمی باقی می مانند و می توانند سر منشا همه ساختار در جهان امروزباشند. به خصوص عاملی است برای ناهمسانگردی های تابش میکرو موج زمینه [2]و هم چنین برای تورمی در مقیاس بزرگ کهکشان ها. به علاوه تورم امواج گرانشی ابتدایی را تولید می کندکه می تواند سهمی در ناهمسانگردی های تابش میکرو موج زمینه داشته باشد. در نتیجه، پیش بینی تورم این است که همه ساختاری که امروزه در جهان دیده می شود، به عنوان نتیجه ایی از ارتعاشات مکانیک کوانتومی در طول دوره تورمی باشد.

---

[1] Guth
[2] CMB

۲-۱ مقدمه

در این فصل می خواهیم به بررسی میدان اسکالر χ که متفاوت از میدان تورمی می باشد، در طول دوره تورمی بپردازیم. برای این کار دوره دوسیتر را در نظر می گیریم که نرخ هابل در طول آن ثابت باقی میماند.

۲-۲ ارتعاشات کوانتومی میدان اسکالر بدون جرم در دوره دوسیتر[1]

در این جا فرض می شود که این میدان بدون جرم باشد. می توان میدان اسکالر χ را بر حسب مد های فوریه بسط داد[2]:

$$\delta\chi\ (x,t)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ e^{i\vec{k}.\vec{x}}\ \delta\chi_k(t)\quad . \tag{۲-۲-۱}$$

با توجه به معادله میدان اسکالر و هم چنین ذکر این نکته که $V(\varphi)$ تابعی از جرم خواهد بود و ما در این جا حالت بدون جرم را در نظر گرفته ایم، می توان معادله ارتعاشات را به صورت زیر نوشت:

$$\delta\ddot{\chi}_k+3H\delta\dot{\chi}_k+\frac{k^2}{a^2}\delta\chi_k=0\quad . \tag{۲-۲-۲}$$

$\delta\chi_k$ تابعی از $e^{i\vec{k}.\vec{x}}$ است با دو بار مشتق گیری مکانی داریم: $(i\vec{k})(i\vec{k})=-\vec{k}^2$. دو حالت را بررسی می کنیم:

الف: برای طول موج هایی که در داخل افق قرار می گیرند $\lambda \langle\langle\ H^{-1}$ عدد موج متناظربا آنها $\lambda=\frac{2\pi\ a}{k}$ از رابطه $k\ \rangle\rangle\ aH$ تبعیت می کند. به دلیل کوچکی H از جمله دوم در رابطه (۲-۲-۲) صرفه نظر نموده و خواهیم داشت:

$$\delta\ddot{\chi}_k+\frac{k^2}{a^2}\delta\chi_k=0\quad , \tag{۲-۲-۳}$$

---

[1] De sitter

۱-2 معادلات فریدمن

براساس کیهان شناسی استاندارد متریک فریدمن- رابرستون- والکر(FRW) به صورت زیر نوشته می- شود:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \ d\varphi^2\right)\right] \quad ; \tag{۱-2-۱}$$

تحول عامل مقیاس[1] یعنی $a(t)$ با شروع از معادله انشتین بدست می آید[۱]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi \ GT_{\mu\nu} \tag{۲-۲-۱}$$

که در آن $R_{\mu\nu}$ تانسور ریچی و R اسکالر ریچی می باشد که بر طبق متریک (FRW) نوشته شده است و تانسور انرژی-ممنتوم $T_{\mu\nu}$ به صورت زیر تعریف می شود[۱]:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) \ u^{\mu}u^{\nu} + g^{\mu\nu} p \quad ; \tag{3-2-1}$$

که u^{μ} چارسرعت، ρ چگالی انرژی و p فشار می باشد. با این فرض که همگنی و همسانگردی داریم می توانیم همیشه تانسور انرژی – ممنتوم را به صورت زیر بنویسیم $T_{\mu\nu} = diag(\rho, p, p, p)$ که ρ و p هر دو تابعی از زمان هستند و به دلیل همگنی و همسانگردی تابع مکان نمی باشند. تحول فاکتور مقیاس کیهانی برای شاره کامل به وسیله معادله فریدمن داده می شود :

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi \ G\rho}{3} - \frac{K}{a^2} \quad . \tag{۴-۲-1}$$

ρ چگالی انرژی کل جهان وماده وتابش و انرژی خلاوغیره می باشد. در این حالت با استفاده از معادله بقای انرژی داریم[پیوست۱]:

[1] Scale factor

$$\dot{\rho}+3H(\rho+p)=0\ . \qquad (۱-۲-۵)$$

با استفاده از معادله فریدمن ورابطه فوق می توان معادله شتاب برای فاکتور مقیاس را به صورت زیر بدست آورد:

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p)\ , \qquad (۱-۲-۶)$$

با ترکیب معادلات (۱-۲-۴) و(۱-۲-۶) و با این فرض که جهان تخت است داریم(در اینجه ابتدا فرض می شود که از یک جهان همگن و همسانگردآغاز کرده ایم و سپس اختلالات را به آن اعمال می کنیم):

$$\dot{H}=-4\pi G(\rho+p)\ , \qquad (۱-۲-۷)$$

با استفاده از معادله فریدمن می توانیم انحنای جهان و چگالی انرژی ونرخ انبساط یعنی a را توسط رابطه زیربه یکدیگر مربوط کنیم:

$$\Omega-1=\frac{k}{a^2H^2}\ , \qquad (۱-۲-۸)$$

$$\Omega=\frac{\rho}{\rho_{crit}}\ .$$

مقدارکنونی ρ_{crit} با استفاده از رابطه زیر بدست می آید:

$$\rho_{crit}=\frac{3H^2}{8\pi G}=1.88h^2 gcm^{-3}\approx 1.05\times 10^4 evcm^{-3}\ .$$

شعاع جهان توسط رابطه زیر داده می شود (با توجه به تعریف $R_{curv}=\frac{a(t)}{\sqrt{k}}$):

$$R_{curv}=\frac{H^{-1}}{(\Omega-1)^{\frac{1}{2}}}\ . \qquad (۱-۲-۹)$$

هم چنین اندازه گیری های ناهمسانگردی های میکرو موج زمینه کیهانی تحت زوایای متفاوت این احتمال را برای یک انبساط با شتاب مثبت در جهان اولیه (حالت تورمی) و هم چنین در عصر حاضر (تسلط انرژی تاریک) افزایش می دهد.

۱-۳ تورم و اختلالات کیهانی

جهان قدیم در مراحل تورمی ابتدایی تقریبا یکنواخت بوده است. در این جا از واژه تقریبااستفاده شده یعنی کاملا یکنواخت نیز نمی باشد. در ک کنونی ما از ساختار جهان آن است که یک سری اختلالات کوچک اولیه ایی ایجاد شده و این اختلالات رشد کرده اندتا به صورت ساختار امروزی در آمده اند. به محض اینکه جهان به صورت تسلط ماده در آمد ناهمگنی های چگالی اولیه به وسیله گرانش تقویت می شود. اما اینکه چگونه گرانش باعث تقویت ناهمگنی های اولیه می شود نیاز به توضیحی دارد که در زیر آورده شده است:

اگر ماده جمع شود تا بتواند تشکیل ساختاری را بدهد مطمئنا نیاز به نیرویی داریم و تنها نیروی شناخته شده گرانش است. فرض می کنیم در زمان خیلی ابتدایی هستیم، و یک سری بی نظمی های کوچک در توزیع ماده وجود دارد. این نواحی با ماده بیشتر، نیروی گرانشی بیشتری را به نواحی همسایه اعمال می کند. از این رو مواد اطراف را به سوی خود می کشد. این مواد اضافی ساختار قبلی را چگالتر از قبل می کند و جاذبه گرانشی آن افزایش می یابد. بنابراین فشار بیشتری به نواحی اطراف خود وارد می کند. پس توزیع بی نظمی ماده تحت اثر گرانش ناپایدار می شود و هر چه زمان پیش می رود بی نظم تر میشود.

این ناپایداری همان چیزی است که ما برای توضیح مشاهدات جهان کنونی نیاز داریم که چرا جهان امروز تا این حد نسبت به زمان بی نظم است[1]. بر طبق ناپایداری جینز [۲] ذرات موجود در شاره کیهانی به دلیل داشتن جرم یکدیگر را جذب کرده (چون در این ربایش نیازی به وجود بارهای مخالف مانند نیروهای الکترومغناطیسی نیست بلکه ذرات خود یکدیگر را با وجود جرم جذب می کنند). به علاوه وجود این ناهمگنی ها توسط آشکار- سازهایی نیز تایید شده است. ناهمسانگردی های دمایی آشکار شده به دلیل وجود همین ناهمگنی های چگالی اولیه می باشد. چون بخش هایی در جهان وجود دارند که به علت اثر علیتی هیچ گونه ارتباطی بایکدیگر ندارند ولی دمای یکسانی دارند پس این ناهمگنیها باید از یک سری شرایط اولیه پدید آمده باشد. در اثر افزایش ناهمگنی های ماده در مورد طول موج هایی کوچکتر از شعاع هابل طبق معادله نیوتنی داریم[2]:

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + V_S{}^2 \frac{k^2}{a^2}\delta_k = 4\pi G \rho_M \delta_k \quad ,$$

[2] Jeans

(۱-۳-۱)

که درآن $V_S{}^2=\frac{\partial p}{\partial \rho_M}$ است که مربع سرعت صوت و δ_kهمان اختلالات چگالی می باشد. در ناحیه ایی که فضا سه بعدی تخت است می توان تبدیل فوریه تعریف کرد و در نتیجه می توان اختلال چگالی ماده را بر حسب امواج تخت به صورت زیربسط داد:

$$\frac{\delta\ \rho_M(x,t)}{\rho_M}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\delta_k(t)\ e^{-i\vec{k}\vec{x}}\ . \qquad (۱-۳-۲)$$

مقایسه میان جمله فشار و جمله گرانشی در رابطه (1-3-1) مشخص می کند که آیا می توان از فشار در مقابل گرانش صرفه نظر کرد یا نه؟ در مورد اختلالاتی که عدد موج آنها بزرگتر از عدد موج جینزباشد یعنی $k_J{}^2=\frac{4\pi Ga^2\rho_M}{V_S{}^2}$ حالت پایدار جینزرا داریم و می تواند نوسان داشته باشد. در این حالت جمله فشار بر گرانش مسلط خواهد بود. در صورتی که اختلالاتی که عدد موج آنها کوچکتر از عدد موج جینزباشد، حالت ناپایدار جینز است و می توانند رشد داشته باشند. در این جا $P\rightarrow 0$ و گرانش غالب است. به بیان دیگر کلیه مقیاس های طولی λ که بزرگتر از طول جینزباشند، حالت ناپایدار ومقیاس های کوچکتر از طول جینزحالت پایدار را تشکیل می دهند.

در واقع ناپایداری جینز وقتی اتفاق می افتد که فشار شاره خیلی قوی نباشد در این صورت دیگر نمی تواند مانع از رمبش گرانشی شده و این رمبش اتفاق می افتد. این ناپایداری در دو حالت روی می دهد. یکی زمانی که در ناحیه ایی جرم زیادی (در دمای مشخصی) داشته باشیم و دیگری اینکه جرم مشخصی داشته باشیم که خیلی سرد باشد. در این صورت است که گرانش بر فشار غالب می شود. حال می خواهیم به بررسی جواب های این معادله تحت شرایط متفاوت بپردازیم. در ابتدا مساله جینزرا درنظر می گیریم که همان تحول اختلالات در شاره پایا میباشد. در این حالت چون a دیگر تغییر ندارد پس $H=0$. در حالت ناپایدار جینزاختلال به صورت نمایی افزایش می یابد. چون عدد موج کوچکتر از k_J است ازآن صرفه نظر می کنیم. بنابراین معادله (1-3-1) به صورت زیر در می آید:

$$\ddot{\delta}_k=4\pi\ G\rho_M\delta_k\ . \qquad (۱-3-۳)$$

جواب آن به صورت $\delta_k\ \alpha\ \exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$ خواهد بود که $\tau=\frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho_M}}$است.

در قدم بعدی افزایش اختلالات ناپایدار جینزرا در جهان تسلط ماده در نظر می گیریم. در این حالت چون $k = 0$ و w در رابطه $p = w\rho$ مساوی با صفر است، داریم: $a \ \alpha \ t^{\frac{2}{3}}$. در این قسمت انبساط باعث می شود که ذرات از یکدیگر جداشوند. بنابراین قانون حاکم بر رشد اختلالات مانند عامل مقیاس می باشد. پس: $\delta_k \alpha \ t^{\frac{2}{3}}$.
یعنی به همان میزان که a افزایش می یابد اختلال نیز تغییر می کند.
نهایتا جهان تسلط تابش را در نظر می گیریم. در این جا انبساط بسیار سریع است. اما چون در این دوره فشاربسیار بالاست و اصلا ناهمگنی ها اجازه رشد نخواهند داشت وعمده افزایش اختلال در دوره تسلط ماده می باشد. به محض این که اختلال به حدی از چگالی واحد یا بیشتر از آن برسد، در این صورت از انبساط جدا می شود و به صورت یک سیستم خود گرانش در می آید و از منبسط شدن باز می ایستد.
هنگامی که مقیاس های طولی فیزیکی در طول تسلط ماده و تسلط تابش شعاع هابل را قطع می کنند (یعنی هنگامی که دوباره وارد افق می شوند) باید یک سری ارتعاشاتی از قبل در آنها وجود داشته باشد تا بتوان براساس ناپایداری گرانشی، ساختار را تشکیل داد. در مدل استاندارد انفجار بزرگ، این اختلالات کوچک باید به صورت دستی وارد شوند، چون نمی توان ارتعاشات را بر روی مقیاس هایی اعمال کرد که زمانی بزرگتر از افق بوده اند(در طول دوره تورمی H تقریبا ثابت است در حالی که مقیاس های طولی فیزیکی به صورت نمایی افزایش می یابند بنابراین در طول این دوره این مقیاس ها شعاع هابل را رد می کنند. ولی بعد از دوره تورمی که دیگر انبساط به کندی صورت می گیرد دیگر مقیاس های طولی افزایش نمی یابند، ولی H^{-1} زیاد میشود و باعث می شود که دوباره این مقیاس ها وارد افق شوند).
چالشی که در این جا وجود دارد این است که باید توضیحی ارائه داد که چگونه این اختلالات کوچک اولیه منجر به رشد گرانشی اختلالات ماده می شود. بهترین حدس ما در مورد سر منشا این اختلالات همان ارتعاشات کوانتومی دوره تورمی در جهان اولیه می باشد. علاوه بر این که تورم بسیاری از مشکلات و نواقص مربوط به کیهان شناسی انفجار بزرگ را حل می کند، می توان گفت که بهترین خاصیت تورم این است که طیفی از اختلالات چگالی و امواج گرانشی را تولید می کند. این اختلالات از مقیاس های خیلی کوچک تا مقیاس هایی به بزرگی جهان قابل مشاهده امروزی را شامل می شود.
هنگامی ارتعاشات کوانتومی بر روی مقیاس های فیزیکی اتفاق می افتد که این مقیاس ها اندازه شان از افق کوچکتر باشد. وقتی این مقیاس ها افق را ترک کردند، دامنه این ارتعاشات از لحاظ کلاسیکی متوقف می شود به صورت اختلالات متریک در می آیند و نهایتا به اختلالات چگالی تبدیل شده (که این مطالب همگی در فصل های بعدی اثبات خواهند شد) و وارد افق می شوند. به این دلیل که بزرگ شدن بیش از حد افق ذره در

مورد این مقیاس های طولی باعث می شود دیگر در گستره مورد نظر قرار نگرفته و اصل علیت نقض می شود و در محدوده مکانیک کوانتومی نیست.

بر طبق تئوری میدان کوانتومی، خلاکاملا خالی نمی باشد. بلکه متشکل است از ارتعاشات کوانتومی که همه نوع میدان های فیزیکی را در بر می گیرد. این ارتعاشات می توانند به عنوان میدان های فیزیکی در نظر گرفته شوند که همه نوع طول موج ممکن را دارد. این طول موجها می توانند در همه جهات حرکت کنند. در صورتی که بر روی مقادیر این میدان ها بر روی بازه زمانی نسبتا طولانی میانگین گیری شود نتیجه صفر بدست می آید و به این دلیل ما آن را خلا می نامیم. اما مفهوم خلا در یک جهان رو به انبساط به مراتب پیچیده تر است. طول موج مربوط به ارتعاشات خلا میدان تورمی [3] یعنی φ به صورت نمایی افزایش می یابد. هنگامی که طول موج این ارتعاشات از H^{-1} بزرگترمیشود، این ارتعاشات از منتشر شدن باز می ایستند. چون در این مقیاسها جمله اصطکاکی $3H\dot{\varphi}$ در معادله حرکت میدان بزرگ شده و در نتیجه از حرکت ذره ممانعت می کند (با توجه به این که در این مقیاسها $k \langle\langle aH$) به طوری که دامنه این ارتعاشات برای یک مدت زمان طولانی ثابت باقی می- ماند. در صورتی که طول موج آنها به صورت نمایی افزایش می یابد. بنابراین ظهور یک چنین ارتعاشات ایستاده معادل است با ظهور میدان کلاسیکی $\delta\varphi$ که با میانگین گیری دیگر قابل حذف نخواهد بود. چون خلا شامل طول موج های گوناگونی از ارتعاشات می باشد، تورم منجر به خلق اختلالات جدید و جدیدتر میدان کلاسیکی می شود، با طول موج هایی که از مقیاس افق بزرگتر است .

ارتعاشات کوانتومی در طول دوره تورمی ایجاد می شود. از آن جایی که گرانش با تمام مولفه های جهان در ارتباط می باشد، ارتعاشات میدان تورمی نهایتا به ارتعاشات متریک فضا-زمان مربوط می شود و منجر به اختلالات انحنای R می شود (چون اسکالر انحنا از متریک بدست می آید). اختلالات انحنای فضا- زمان مطابق معادله پواسون [4] منجر به اختلالات ماده می شود:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad . \tag{۴-۳-۱}$$

به طور خلاصه، دو مطلب مهم برای فهم ساختار قابل مشاهده جهان در مدل تورمی وجود دارد :

الف : ارتعاشات کوانتومی میدان تورمی که در طول دوره تورمی برانگیخته می شود و تا مقیاس های کیهان- شناسی کشیده می شود. در آن زمان، ارتعاشات میدان تورمی به اختلالات متریک مطابق معادله انشتین مربوط است (از آن جایی که هندسه و ماده با یکدیگر در ارتباط هستند)، باعث موج دار شدن متریک می شود و اختلال را در آن به وجود می آورد.

[3] Inflaton
[4] poisson

ب : گرانش مانند یک واسطه و با ایجاد اختلالات کوچک با باریون ها و فوتون ها ارتباط برقرار می کند . البته درست زمانی که یک طول موج بعد از تورم کوچکتر از مقیاس افق میشود.
در بخش های بعدی نیاز به یک سری محاسبات ریاضی است که در این جا کمی از موضوع اصلی خارج شده و به بررسی آنها می پردازیم.

۱- ۴ زمان کنفورمال

قبل از این که به توصیف جهان اولیه بپردازیم مایلیم که به معرفی مفهوم زمان کنفورم[5] که در بخش بعدی مفید است بپردازیم. زمان کنفورم طبق رابطه زیر تعریف می شود:

$$d\tau = \frac{dt}{a} \quad . \qquad (۱-۴-۱)$$

با توجه به این تعریف، متریک (FRW) به صورت زیر نوشته می شود :

$$ds^2 = -a^2(\tau)\left[d\tau^2 - \frac{dr^2}{1-kr^2} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d^2\varphi\right)\right] \quad . \qquad (2-4-1)$$

با استفاده از رابطه (1-2-1) می توان فهمید که چرا τ را زمان کنفورم نامیدند . در این جا المان طول FRW (متناظر با زمان کنفورم) با المان طول مینکوفسکی که یک ابرسطح چهاربعدی استاتیک را توصیف می کند، هم شکل است.

هر تابع مانند f(t) از قوانین زیر تبعیت می کند:

$$\dot{f}(t) = \frac{f'(\tau)}{a(\tau)} \quad , \qquad (3-4-1)$$

$$\ddot{f} = \frac{f''}{a^2(\tau)} - \frac{\mathrm{H}\ f'(\tau)}{a^2(\tau)} \qquad (4-4-1)$$

در رابطه فوق باید توجه داشت که تعریف H و H با یکدیگر متفاوت است.

[5] Conformal

$$\mathrm{H}=\frac{a'}{a} \quad , \quad H=\frac{\dot{a}}{a} \quad .$$

که در رابطه فوق علامت پریم مشخص کننده زمان کنفورم می باشد که مشتق نسبت به τ است. در این حالت می توانیم روابط زیر را داشته باشیم [ضمیمه ۲]:

$$H=\frac{\dot{a}}{a}=\frac{a'}{a^2}=\frac{\mathrm{H}}{a} \quad , \tag{۵-4-۱}$$

$$\ddot{a}=\frac{a''}{a^2}-\frac{\mathrm{H}^2}{a} \quad , \tag{6-4-1}$$

$$\dot{H}=\frac{\mathrm{H}'}{a^2}-\frac{\mathrm{H}^2}{a^2} \quad , \tag{7-4-1}$$

$$\mathrm{H}^2=\frac{8\pi G\rho a^2}{3}-K \quad , \tag{۸-4-۱}$$

$$\mathrm{H}'=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p)a^2 \quad , \tag{۹-4-۱}$$

$$\rho'+3\mathrm{H}(\rho+p)=0 \quad , \tag{۱۰-4-۱}$$

نهایتا، اگر عامل مقیاس به صورت $a(t)\approx t^n$ باشد، با استفاده از رابطه (1-2-3) داریم:

$$a\approx\tau^{\frac{n}{1-n}} \quad . \tag{۱۱-4-۱}$$

5-1 تورم و میدان تورمی

برای بدست آوردن تورم، نیاز به ماده ایی داریم که خواص غیر عادی داشته باشد مانند فشار منفی. چون در دوره تورمی نرخ هابل ثابت باقی می ماند یک چنین ماده ایی یک میدان اسکالر است که ذرات اسکالر را توصیف می کند (اسپین صفر). اگرچه هنوز مشاهده مستقیمی از این ذرات وجود ندارد اما در تئوریهای ذرات بنیادی توسعه یافته و در واقع نقش مهمی در ایجاد شکستن تقارن میان نیروهای بنیادی را ایفا می کند. کیها ن شناسی تورمی یکی از حوزه هایی است که درآن، این ذرات نقش مهمی را ایفا می کنند. این ذرات ویژگی غیر معمولی از انرژی پتانسیل دارند که همان گونه که جهان انبساط می یابد ممکن است به آهستگی انتقال به سرخ [6]داشته باشند (در توضیح انتقال به سرخ گفته می شود که طول موج نور ستارگان و کهکشان هایی که از ما دور می شوند به سمت انتهای سرخ جابه جا می شود که این پدیده را با نام انتقال به سرخ می شناسند).
در واقع این مواد متناظر هستند با معادله موثر با یک فشار منفی و این همان چیزی است که ما بدان نیاز داریم. عامل میدان اسکالر برای تورم غالبا میدان تورمی نامیده میشود [3].

کنش میدان تورمی به صورت زیر می باشد:

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\ L=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\ \partial^\mu\varphi+V(\varphi)\right]\ . \tag{1-5-1}$$

با توجه به معادله اویلر لاگرانژ داریم:

$$\partial^\mu\frac{\delta\left(\sqrt{-g}L\right)}{\delta\ \partial^\mu\varphi}-\frac{\delta\left(\sqrt{-g}L\right)}{\delta\varphi}=0\ . \tag{۲-5-۱}$$

معادله میدان با توجه به متریک FRW به صورت زیر بدست می آید [ضمیمه ۳]:

$$\ddot{\varphi}+3H\dot{\varphi}-\frac{\nabla^2\varphi}{a^2}+V'(\varphi)=0\quad , \tag{۳-5-۱}$$

این معادله، معادله حرکت میدان اسکالر می باشد که در آن $V'(\varphi)=\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}$خواهد بود. جمله $3H\dot{\varphi}$جمله غلتشی نامیده می شود و با استفاده از آن می توان دریافت که هنگامی که میدان اسکالر به سمت انتهای پتانسیل

[6] Redshift

خود می رود متحمل اصطکاکی می شود که البته ناشی از انبساط جهان است.

تانسور انرژی- ممنتوم میدان اسکالر به صورت زیر تعریف می شود :

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \ \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} L \quad . \tag{۴-5-۱}$$

در آن صورت چگالی انرژی ρ_φ و چگالی فشار p_φ به صورت زیر بدست می آید:

$$T_{00} = \rho_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2a^2} \quad , \tag{۵-5-۱}$$

$$T_{ii} = p_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) - \frac{(\nabla \varphi)^2}{6a^2} \quad , \tag{۶-5-۱}$$

در صورتی که جمله گرادیان غالب باشد می توان بدست آورد که $p_\varphi = -\frac{\rho_\varphi}{3}$. اما از آن جایی که تغییرات میدان تورمی کوچک است این شرایط برای بدست آوردن تورم کافی نیست . حال می توان میدان تورمی را تجزیه کرد:

$$\varphi\ (t) = \varphi_0(t) + \delta\ \varphi\ (x,t) \quad . \tag{۷-5-۱}$$

که در آن φ_0 میدان کلاسیکی است یعنی مقدار چشم داشتی میدان تورمی بر روی حالت همگن و همسانگرد ابتدایی است . در حالی که $\delta\varphi\ (x,t)$ نوسانات کوانتومی در اطراف φ_0 را نمایش می دهد. در بخش های بعدی ثابت خواهیم کرد که نوسانات کوانتومی خیلی کوچکتر از مقدار کلاسیکی است ، به گونه ایی که میتوان از آن چشم پوشی کرد. بنابراین فعلا می پذیریم که از گرادیان میدان اسکالر صرفه نظر کنیم و تانسور انرژی–ممنتوم به صورت زیربدست می آید:

$$T_{00} = \rho_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi) \quad , \tag{۸-5-۱}$$

$$T_{ii} = p_\varphi = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) \quad ,$$ (۹-5-۱)

تحت شرایط غلتش آهسته ($V(\varphi) \rangle\rangle \dot{\varphi}^2$) که در قسمت های بعدی گفته خواهد شد، می توانیم بدست آوریم:

$$p_\varphi \cong -\rho_\varphi \quad .$$ (۱۰-5-۱)

این همان چیزی بود که می خواستیم. می توان نتیجه گرفت که تورم میدان اسکالری است که انرژی پتانسیل آن بر همه جملات جنبشی دیگر که موجب تورم می شود برتری دارد.

۱-6 شرایط غلتش آهسته [7]

پتانسیل های خیلی کمی وجود دارند که با استفاده از آنها بتوان معادله حرکت میدان را به طور دقیق حل کرد. ولی در این جا ما از تقریب شرط غلتش آهسته استفاده می کنیم تا تحول میدان اسکالر را بررسی کنیم . معادله حرکت میدان (با توجه به این که از گرادیان میدان صرفه نظر کرده ایم) به صورت زیر می باشد:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad ,$$ (۱-6-۱)

در صورتی که $V(\varphi) \rangle\rangle \dot{\varphi}^2$ در این حال میدان اسکالر به طور آهسته به سمت انتهای پتانسیل خود می غلتد و به این دلیل این شرط را شرط غلتش آهسته می نامند. در این حالت انتظار خواهیم داشت که با وجود این پتانسیل تخت $\ddot{\varphi}$ نیز قابل صرفه نظر کردن باشد. هم چنین معادله فریدمن نیز به صورت زیر نوشته می شود:

$$H^2 \cong \frac{8\pi G}{3} V(\varphi) \quad ,$$ (۲-6-۱)

که درآن از فرض اینکه چگالی انرژی میدان تورمی بر انرژی های دیگر غالب میباشد کمک گرفته ایم. معادله میدان نیز با استفاده از این تقریب برابر است با :

$$3H\dot{\varphi} = -V'(\varphi) \quad .$$

[7] Slow roll condition

(۳-6-۱)

با استفاده از معادله (1-6-3) برای شرط غلتش آهسته داریم [ضمیمه۴]:

$$\dot{\varphi}^2 \langle\langle\ V(\varphi) \Rightarrow \frac{(V')^2}{V} \langle\langle\ H^2 \quad ,$$ (۴-6-۱)

$$\ddot{\varphi}\ \langle\langle\ 3H\dot{\varphi} \Rightarrow V'' \langle\langle H^2 \quad .$$ (۵-6-۱)

حال به معرفی پارامترهای غلتش آهسته می پردازیم یعنی ηو ε. با توجه به:

$$\dot{H} = -4\pi\ G\ (\rho + p)\ \ .$$

با ترکیب معادلات (۱-5-۸)و(۱-5-۹)و(۱-6-۳) بدست می آوریم:

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = 4\pi\ G\frac{\dot{\varphi}^2}{H^2} = \frac{1}{16\pi\ G}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 \quad ,$$ (۶-6-۱)

هم چنین با استفاده از معادله (۱-6-۲) :

$$\eta = \frac{1}{8\pi G}\left(\frac{V''}{V}\right) = \frac{1}{3}\frac{V''}{H^2} \quad ,$$ (۷-6-۱)

با ترکیب معادلات فوق :

$$\delta = \eta - \varepsilon = -\frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} \quad .$$ (۸-۵-۱)

هم چنین می توان پارامترهای فوق را بر حسب زمان کنفورم نوشت:

(9-6-1)

$$\varepsilon = 1 - \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}^2} = 4\pi G\frac{\varphi'^2}{\mathrm{H}^2} \quad ,$$

$$\delta = 1 - \frac{\varphi''}{\mathrm{H}\varphi'} \quad . \qquad (10\text{-}6\text{-}1)$$

در حقیقت با استفاده از پارامتر ε می توان نشان داد که چه قدر پارا متر هابل با زمان در طول دوره تورمی تغییر میکند:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = (1-\varepsilon)H^2 \quad , \qquad (۱۱\text{–}6\text{–}۱)$$

پس تورم تا زمانی می تواند ادامه داشته باشد که $\varepsilon \rangle 1$، چون در این حالت است که شتاب مثبت خواهیم داشت:

$$[INFLATION \Rightarrow \varepsilon \langle 1]$$

در صورتی که این شرایط نقض شده و دیگر برقرار نباشد تورم نیز پایان می پذیرد. در حالت کلی تورم درشرایط غلتش آهسته در صورتی بدست می آید:

$$\varepsilon \langle\langle 1 \quad , \quad |\eta| \langle\langle 1 \ .$$

به محض اینکه این شرایط از بین بروند تورم نیز پایان می پذیرد. در طول دوره تورمی پارامترهای ε و η را می– توان تقریبا ثابت در نظر گرفت. چون پتانسیل $V(\varphi)$ خیلی تخت است، پس به همان نسبت تغییرات آن نیز کم می باشد. باید توجه داشت که تغییرات εو ηاز مرتبه توان دوم این پارامترهاست . چون ما اختلالات مرتبه اول را بررسی میکنیم، بدون در نظر گرفتن توان دوم می توان تقریبا آنان را ثابت در نظر گرفت.
با در نظر گرفتن این تقریب به محاسبه تعداد لایه های اضافه شده از زمان شروع تا انتهای تورم می پردازیم (لازم به توضیح است که برای حل مشکل افق در مدل استاندارد انفجار بزرگ تورم باید برای مدت زمان مشخصی ادامه داشته باشد تا بتوان همگنی و همسانگردی میان نواحی غیر علیتی را توضیح داد . به همین منظور کمیت N را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$N = H(\ t_f - t_i) \ ,$$

که t_i و t_f به ترتیب ابتدا و انتها ی دوره تورمی است).در صورتی که φ_iو φ_fمیدان تورمی در شروع و انتهای تورم باشند در این حالت تعداد کل لایه های اضافه شده برابر خواهد بود [۶]:

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt \cong H \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \cong -3H^2 \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} \frac{d\varphi}{V'} \cong -8\pi G \int_{\varphi_i}^{\varphi_i} \frac{V}{V'} d\varphi \quad , \tag{۱۲-۶-۱}$$

هم چنین می توان تعداد لایه های اضافه شده ، ΔNرا که در انتهای تورم باقی می مانند را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta N = 8\pi G \int_{\varphi_f}^{\varphi_{\Delta N}} \frac{V}{V'} d\varphi \quad , \tag{۱۳-۶-۱}$$

که در آن $\varphi_{\Delta N}$مقدار میدان تورمی در ΔN لایه است .

تذکر: مقیاس طولی مشخص $\lambda = \frac{a}{k}$زمانی افق را ترک می کند که $k = aH_k$باشد که درآن H_kمیزان نرخ هابل در آن زمان است. به راحتی می توان تغییرات $H_k{}^2$را نسبت به k محاسبه کرد:

$$\frac{d\ln H_k{}^2}{d\ln k} = \left(\frac{d\ln H_k{}^2}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\ln a}\right)\left(\frac{d\ln a}{d\ln k}\right) \quad ,$$

$$= 2\frac{\dot{H}}{H} \times \frac{1}{H} \times 1 = 2\frac{\dot{H}}{H^2} = -2\varepsilon \quad . \tag{۱۴-۶-۱}$$

در واقع محاسبات انجام شده در این فصل می تواند کاربردی برای مفاهیم فصول بعدی باشد

3-۱ مقدمه

تئوری خطی اختلالات کیهان شناسی، صورتی از کیهان شناسی مدرن را نشان می دهد که از آن برای توصیف تشکیل و تحول ساختار جهان و هم چنین توصیف ناهمسانگردی های تابش میکروموج زمینه استفاده می شود. عامل اصلی این اختلالات در طول دوره تورمی ایجاد شده است و در اثر انبساط بسیار سریع جهان در دوره دوسیتر تا انداره های نجومی گسترش یافته است.

هم چنین گفته شد که اختلالات میدان اسکالر χ در طول انبساط دوسیتر ایجاد شده است. میدان تورمی یک میدان اسکالر می باشد و می توان نتیجه گرفت که ارتعاشات تورمی نیز در این حالت ایجاد شده است. هرچند که میدان تورمی شکل خاصی از دیدگاه اختلالات می باشد. به این دلیل که این میدان، چگالی انرژی غالب جهان در طول دوره تورمی می باشد. هرگونه اختلال در میدان تورمی به معنی اختلال در تانسور انرژی- ممنتوم میباشد. یعنی :

$$\delta\varphi \Rightarrow \delta T_{\mu\nu} \quad ,$$

چون طبق معادله پواسون، φ با ρ در ارتباط است:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi \; G\rho \quad ,$$

و طبق معادله انشتین نیز ρ با $T_{\mu\nu}$ در ارتباط می باشد و در نتیجه منجر به اختلال متریک می شود:

$$\delta \; T_{\mu\nu} \Rightarrow \left[\delta \; R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta \; \left(g_{\mu\nu}R\right)\right] = 8\pi G T_{\mu\nu} \Rightarrow \delta g_{\mu\nu} \quad .$$

از طرف دیگر، اختلال در متریک باعث اختلال در تحول اختلالات میدان تورمی بر طبق معادله کلاین- گوردن میشود:

$$\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta\left(\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) = 0 \Rightarrow \delta\varphi \quad .$$

این مطالب ما را به این نتیجه رهنمون می کنند که اختلالات میدان تورمی در ارتباط تنگاتنگی با اختلالات

که در اصل، معادله حرکت نوسانگر هارمونیک می باشد. البته جمله فرکانسی k^2/a^2 به زمان بستگی دارد چون عامل مقیاس به صورت نمایی افزایش می یابد. بنا براین انتظار می رود هنگامی که این طول موج ها در داخل افق قرار می گیرند، ارتعاشات حرکت نوسانی داشته باشند.

ب: برای طول موج های بیشتر از افق $H^{-1} \gg \lambda$ و $k \ll aH$ می توان از جمله $\frac{k^2}{a^2}$ چشم پوشی کرد و معادله (۲-۲-۲) به صورت زیر در می آید:

$$\delta\ddot{\chi}_k + 3H\delta\dot{\chi}_k = 0 \quad , \qquad (۲-۲-۴)$$

حل این معادله به صورت $\delta\chi_k = \frac{C_+}{3H}e^{-3Ht} + C_-$ است و چون در مقیاس ها ی بالاتر از افق داریم: $\frac{k}{a} \ll H$، می توان از جمله اول صرفه نظر کرده و $\delta\chi_k$ را ثابت در نظر گرفت. در نتیجه تصویر زیر را خواهیم داشت: ارتعاشاتی که طول موج آنها در داخل افق قرار می گیرد حرکت نوسانی دارند تا زمانی که طول موجشان از مرتبه افق می شود. وقتی طول موج آنها از افق رد شد این ارتعاشات از نوسان کردن باز می ایستند و ثابت باقی می مانند.

در صورتی که تحول ارتعاشات را به روش کوانتومی بررسی کنیم طبق تعریف زیر داریم:

$$\delta\chi_k = \frac{\delta\sigma_k}{a} \quad , \qquad (۲-۲-۵)$$

محاسبات را در زمان کنفورم و برای انبساط دوسیتر خالص انجام می دهیم، که در آن $a \approx e^{Ht}$. در این حالت با استفاده از تعریف $d\tau = \frac{dt}{a}$ می توان عامل مقیاس را به صورت زیر نوشت:

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau} \qquad (\tau < 0) \ , \qquad (۲-۲-۶)$$

که شروع دوره تورمی بر زمان ابتدایی $\tau_i \ll 0$ منطبق می باشد که $\tau \to -\infty$ اشاره به گذشته دور دارد. با استفاده از روابط مربوط به کنفورم معادله (۲-2-۲) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\delta\sigma_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\delta\sigma_k = 0 \quad . \qquad (۲-۲-۷)$$

معادله‌ایی که بدست آمد شبیه به معادله کلاین- گوردن میدان اسکالر در فضا- زمان تخت می باشد. تنها تفاوت آن در جمله جرمی وابسته به زمان منفی می باشد یعنی : $-\frac{a''}{a}=-\frac{2}{\tau^2}$.

$$\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu+m^2+\xi\ R\right)\varphi=0\quad ,$$

$$g^{\mu\nu}=\left(a^{-2},-a^{-2},-a^{-2},-a^{-2}\right)\quad ,$$

$$\Rightarrow\left(g^{00}\partial_0\partial_0+g^{ii}\partial_i\partial_i-2H^2\right)\varphi=0\quad ,\qquad a=-\frac{1}{H\tau}\quad ,$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d^2}{dt^2}+k^2-\frac{2}{\tau^2}\right)\varphi=0\quad . \tag{۲-۲-۸}$$

معادله (۲-۲-۸) را نیز می توان از رابطه کنش زیر و معادله اویلر لاگرانژ بدست آورد:

$$\delta\ S_k=\int d\tau\left[\frac{1}{2}\delta\sigma_k{}'^2-\frac{1}{2}\left(k^2-\frac{a''}{a}\right)\delta\sigma_k{}^2\right]\quad . \tag{۲-۲-۹}$$

حال رفتار معادله (۲-۲-۷) را در مقیاس های بالاتر از افق وزیر افق بررسی می کنیم. با توجه به تغییرات زمان کنفورم :

$$\frac{k}{aH}=-k\tau\quad , \tag{۲-۲-۱۰}$$

در مقیاس های زیر افق داریم:

$$k\ \rangle\rangle\ aH\Rightarrow-k\tau\ \rangle\rangle\ 1\Rightarrow k^2\tau^2\rangle\rangle\ 1\quad ,$$

$$\tau^2=\frac{1}{a^2H^2}\qquad ,\qquad H=\frac{a'}{a^2}\Rightarrow k^2\rangle\rangle\ \frac{a''}{a}\quad .$$

با این نتیجه معادله (۲-۲-۷) به صورت زیر در می آید:

$$\delta\sigma_k{}''+k^2\delta\sigma_k=0\quad , \tag{۲-۲-۱۱}$$