دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

گراف متناظر رده‌های مزدوجی یک گروه متناهی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

هادی احمدی

استاد راهنما

دکتر بیژن طائری

۱۳۸۶

به نام خدا

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گراف متناظر رده‌های مزدوجی یک گروه متناهی

سخنران: هادی احمدی

زمان: یکشنبه ۸۶/۱۱/۲۸ ساعت ۱ بعد از ظهر

مکان: سالن کنفرانس دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر بیژن طائری

۲– دکتر غلامرضا امیدی

۳– دکتر علیرضا اشرفی (گروه ریاضی دانشگاه کاشان)

۴– دکتر بهناز عمومی

چکیده:

در این سخنرانی گراف متناظر رده‌های مزدوجی گروه متناهی G را معرفی می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود؛ رأسهای این گراف عبارت‌اند از رده‌های مزدوجی غیرمرکزی گروه G و دو رأس C و D توسط یالی به هم وصل می‌شوند، هر گاه $\gcd(|C|,|D|) > 1$. این گراف را با $\Gamma(G)$، تعداد مؤلّفه‌های آن را با $n(\Gamma(G))$ و قطر آن را با $\mathrm{d}(\Gamma(G))$ نمایش می‌دهیم. برای هر گروه متناهی G داریم $n(\Gamma(G)) \leq 2$. گروه متناهی G، شبه‌فروبنیوس با هسته‌ی آبلی و متمم آبلی است اگر و تنها اگر $n(\Gamma(G)) = 2$. نشان می‌دهیم که اگر این گراف همبند باشد $\mathrm{d}(\Gamma(G)) \leq 4$ و گراف گروه متناهی G فاقد مثلث است اگر و تنها اگر با یکی از گروه‌های S_3، گروه دووجهی D_5، سه گروه غیرآبلی از مرتبه‌ی ۱۲ و گروه غیرآبلی از مرتبه‌ی ۲۱، یک‌ریخت باشد.

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای هادی احمدی

تحت عنوان

گراف متناظر رده‌های مزدوجی یک گروه متناهی

در تاریخ ۸۶/۱۱/۲۸ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر بیژن طائری

۲– استاد مشاور پایان‌نامه دکتر غلامرضا امیدی

۳– استاد داور ۱ دکتر علیرضا اشرفی

(گروه ریاضی دانشگاه کاشان)

۴– استاد داور ۲ دکتر بهناز عمومی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر رسول نصراصفهانی

سپاس و ستایش پروردگار یکتا را سزد که آدمی را به نور اندیشه کرامت بخشید و چراغ ایمان و تفکر را فرا راه هدایتش قرار داد تا او را از ظلمت جهل و نادانی به سر منزل معرفت و دانایی رهنمون شود. درود بی‌پایان بر آخرین فرستاده‌ی او، بزرگترین معلم تاریخ بشریت، حضرت محمد(ص) باد. اکنون که در پرتو الطاف بیکران خداوندی مقطعی حساس از مقاطع زندگیم را پشت سر گذاشته‌ام، بر خود لازم می‌دانم که به وسیله‌ی این تقریظ از کسانی که بنده را در تدوین و گردآوری این پایان‌نامه یاری کرده‌اند تقدیر کنم.

در ابتدا از پدر و مادرم دو سرمایه‌ی اصلی زندگیم که در تمامی مراحل زندگی پشتیبان و یاورم بوده‌اند صمیمانه قدردانی و سپاسگزاری می‌کنم و برایشان از درگاه خداوند سلامتی و طول عمر با عزت مسئلت دارم. از جناب آقای دکتر بیژن طائری که نه فقط در طی تدوین این پایان‌نامه، بلکه در ظرف دو سال و نیم دوره‌ی کارشناسی ارشد همواره با حوصله و دقت نظر بالا پاسخگوی ایرادات و اشکالاتم بوده‌اند نهایت تقدیر و تشکر را می‌کنم. هم‌چنین از جناب آقای دکتر غلامرضا امیدی که بنده را از نظرات ارزشمندشان بهره‌مند ساختند تا این پایان‌نامه را هر چه بهتر گردآوری و ارائه کنم بسیار سپاسگزارم. کمال امتنان و سپاس خود را به جناب آقای دکتر علیرضا اشرفی و سرکار خانم دکتر بهناز عمومی که به رغم مشغله‌ی فراوان زحمت بازخوانی پایان‌نامه و داوری جلسه‌ی دفاع اینجانب را پذیرفتند، ابراز می‌کنم. در پایان از کلیه ی دوستانم که به هر وسیله اینجانب را در تهیه و تدوین این اندک بضاعت یاری کرده‌اند و در مدت این دوره لحظات فراموش نشدنی را در کنارشان سپری کرده‌ام، صمیمانه قدردانی می‌کنم و برایشان آرزوی کامیابی و پیروزی دارم.

فهرست مطالب

چکیده:

فرض کنیم G یک گروه متناهی و $[a]_G$ و $[b]_G$ دو رده‌ی مزدوجی آن باشند. حاصل‌ضرب این دو رده‌ی مزدوجی را به صورت $[a]_G[b]_G = \{xy \mid x \in [a]_G, y \in [b]_G\}$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم هرگاه G یک گروه متناهی دل‌خواه و $[a]_G$ و $[b]_G$ دو رده‌ی مزدوجی آن با خاصیت $C_G(a) = C_G(b)$ باشند، آن‌گاه $[a]_G[b]_G = [ab]_G$ اگر و تنها اگر $[a, G] = [b, G] = [ab, G]$ و $[a, G]$ زیرگروه نرمالی از گروه G باشد. هم‌چنین اگر $\gcd(|[a]_G|, |[b]_G|) = 1$ آن‌گاه داریم $[a]_G[b]_G = [ab]_G$.

گراف متناظر رده‌های مزدوجی گروه متناهی G به صورت زیر تعریف می‌شود؛ رأس‌های این گراف عبارت‌اند از رده‌های مزدوجی غیرمرکزی گروه G و دو رأس C و D توسط یالی به هم وصل می‌شوند، هرگاه $\gcd(|C|, |D|) > 1$. این گراف را با $\Gamma(G)$، تعداد مؤلّفه‌های آن را با $n(\Gamma(G))$ و قطر آن را با $\mathrm{d}(\Gamma(G))$ نمایش می‌دهیم. برای هر گروه متناهی G داریم $n(\Gamma(G)) \leq 2$. گروه متناهی G، شبه‌فروبنیوس با هسته‌ی آبلی و متمم آبلی است اگر و تنها اگر $n(\Gamma(G)) = 2$. نشان می‌دهیم که اگر این گراف همبند باشد $\mathrm{d}(\Gamma(G)) \leq 4$ و گراف گروه متناهی G فاقد مثلث است اگر و تنها اگر با یکی از گروه‌های S_3، گروه دووجهی D_5، سه گروه غیرآبلی از مرتبه‌ی ۱۲ و گروه غیرآبلی از مرتبه‌ی ۲۱، یک‌ریخت باشد.

فصل ۱

دیباچه

۱—۱ پیشینه‌ی تاریخی

در این پایان‌نامه، یکی از گراف‌های نسبت داده شده به رده‌های مزدوجی یک گروه متناهی G را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. این گراف که آن را با $\Gamma(G)$ نمایش می‌دهیم، اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط برترم[۱] ، هرزاگ [۲] و من [۳] [۴] به صورت زیر تعریف شده‌است
رأس‌های گراف عبارت‌اند از رده‌های مزدوجی غیرمرکزی گروه G و دو رأس C و D توسط یالی به هم وصل می‌شوند هر گاه $|C|$ و $|D|$ دارای شمارنده‌ی اوّل مشترک باشند.
این نویسندگان بسیاری از خواص حسابی اندازه رده‌های مزدوجی را که توسط چیلاگ [۴] و هرزاگ [۱۱] در سال ۱۹۹۰ و نیز توسط فیسمن [۵] و آراد [۶] [۳] در سال ۱۹۸۵ اثبات شده بود، به کار گرفتند و نتایج جالبی را اثبات کردند. از جمله نشان دادند که گروه متقارن S_3 تنها گروهی است که گراف متناظر آن دارای رأس‌هایی است و هیچ یالی ندارد.
هم‌چنین گراف p–گروه‌های غیرآبلی و گراف گروه‌های ساده‌ی غیرآبلی هر دو گراف‌هایی کامل‌اند. فرض

[۱] Bertram
[۲] Herzog
[۳] Mann
[۴] Chilag
[۵] Fisman
[۶] Arad

کنیم $n(\Gamma(G))$ نشان دهنده‌ی تعداد مؤلّفه‌های همبند گراف $\Gamma(G)$ باشد و $\mathrm{d}(\Gamma(G))$ نشان دهنده‌ی قطر این گراف باشد. دو قضیه‌ی اساسی در [۴] به اثبات رسید؛ اوّل این که اگر G یک گروه متناهی باشد آن‌گاه $n(\Gamma(G)) \leq ۲$ و دوّم آن که گروه متناهی G در خاصیت $n(\Gamma(G)) = ۲$ صدق می‌کند اگر و فقط اگر G یک گروه شبه‌فروبنیوس با هسته‌ی آبلی و متمم آبلی باشد.

هرگاه گراف $\Gamma(G)$ ناهمبند باشد، با توجه به روند اثبات قضیه‌ی دوّم [۴] به وضوح می‌توان دید که هر یک از دو مؤلّفه‌ی گراف، خود گراف‌هایی کامل هستند. در قضیه‌ی چهارم این مقاله ثابت شده است که اگر G یک گروه متناهی باشد و $n(\Gamma(G)) = ۱$، آن‌گاه $\mathrm{d}(\Gamma(G)) \leq ۴$. این نتایج به طور مفصل در فصل سوّم و چهارم این پایان نامه بررسی شده‌اند. با مطالعه‌ی خواص این گراف می توان به اطلاعات مفیدی در مورد گروه G و نیز بالعکس دست یافت.

در سال ۲۰۰۲ ژانگ[۷] و فانگ[۸] [۷] گروه‌های متناهی که گراف آن‌ها فاقد مثلث است را رده بندی کردند. آن‌ها ثابت کردند که اگر G با یکی از گروه‌های $S_۳$، گروه دو وجهی $D_۵$ ، سه گروه غیرآبلی مرتبه‌ی ۱۲ و گروه از مرتبه‌ی ۲۱ یک‌ریخت باشد؛ آن‌گاه گراف $\Gamma(G)$ اجتماع مجزای دو درخت است. این گروه‌ها، لیست کاملی از تمام گروه‌های متناهی غیرآبلی است که گراف آن‌ها فاقد مثلث است. این قضیه در فصل چهارم بررسی می‌شود.

در فصل دوّم این پایان نامه مفهوم زیرمجموعه‌ی $G-$پایای گروه G را مورد توجه قرار داده‌ایم. مثال بارزی از این نوع زیرمجموعه‌ها، حاصل‌ضرب دو رده‌ی مزدوجی گروه G است. در سال ۱۹۹۰ برترم، هرزاگ و من و هم‌چنین در سال ۲۰۰۶ ادیت بنت[۹] در صدد پاسخ‌گویی به این سؤال برآمدند که تحت چه شرایطی حاصل‌ضرب دو رده‌ی مزدوجی ازیک گروه متناهی، یک رده‌ی مزدوجی است؟ برترم ، هرزاگ و من در [۴] نشان دادند که هرگاه اندازه‌ی دو رده‌ی مزدوجی گروه G نسبت به هم اوّل باشند حاصل‌ضرب این دو رده‌ی مزدوجی، یک رده‌ی مزدوجی از گروه G است و از این نتیجه به وفور در دو قضیه‌ی بعدی اثبات شده در [۴] استفاده کردند. هم‌چنین بنت در دو مقاله‌ی متوالی، در سال‌های ۲۰۰۵ و ۲۰۰۶، [۸] و [۹] با در نظر گرفتن شرایطی روی یک $p-$گروه متناهی و بعدا روی یک گروه متناهی دل‌خواه، نتایج مشابهی را به اثبات رسانده است که اکثر این نتایج در فصل دوّم شرح داده می‌شود.

جز گراف مورد نظر ما در این پایان نامه، گراف‌های دیگری نیز به یک گروه متناهی نسبت داده شده‌اند. در این‌جا به ذکر دو نمونه از این نوع گراف‌ها که با دیدگاه غیرسرشت‌نمایی به رده‌های مزدوجی گروه متناهی G نسبت داده شده‌اند می‌پردازیم.

---

[۷] Zhang

[۸] Fang

[۹] Edith adan-bante

از جمله‌ی این نوع گراف‌ها می‌توان به گرافی که توسط دلفی[۱۰] در سال ۱۹۹۳ تعریف شده است، اشاره کرد. این گراف را با $\Gamma'(G)$ نمایش می‌دهند و با فرض این که p عددی اوّل باشد و $\rho' := \left\{p \mid \ p \,\middle|\, |[g]_G| \,,\ \exists g \in G\right\}$؛ گراف، به صورت زیر تعریف می‌شود
رأس‌های این گراف عبارت‌اند از اعداد اوّل مجموعه‌ی ρ' و دو رأس p و q در ρ' توسط یالی به هم وصل می‌شوند هر گاه $g \in G$ موجود باشد به طوری که $pq \,\big|\, |[g]_G|$. در این مقاله دلفی به رده‌بندی گروه‌های متناهی G پرداخته است که گراف $\Gamma'(G)$ ناهمبند است. به ویژه نشان داده است در این حالت تعداد مؤلّفه‌های همبند گراف دو مؤلّفه است و این مؤلّفه‌ها گراف‌هایی کامل‌اند. خواننده‌ی علاقمند می‌تواند مرجع [۱۴] را مطالعه کند.
هم‌چنین در سال ۲۰۰۵ یو[۱۱] ، کوان[۱۲] و شی[۱۳] گراف $\Delta(G)$ را این‌گونه به رده‌های مزدوجی گروه متناهی G نسبت داده‌اند
مجموعه‌ی رأس‌های این گراف عبارت‌اند از رده‌های مزدوجی غیرمرکزی گروه G و دو رأس $[x]_G$ و $[y]_G$ توسط یالی به هم وصل می‌شوند هر گاه $\gcd(o(x), o(y)) > ۱$ (منظوراز $o(x)$ مرتبه‌ی x است). این نویسندگان خاصیت $P_۴$ را برای گروه متناهی G این گونه تعریف کرده‌اند گروه G در خاصیت $P_۴$ صدق می‌کند هرگاه به ازای هر عدد اول p، حداکثر دارای سه رده‌ی مزدوجی غیرمرکزی باشد که مرتبه‌ی این رده‌ها مضربی از p است. آن‌ها در این مقاله به رده‌بندی گروه‌های متناهی که در خاصیت $P_۴$ صدق می‌کنند پرداخته‌اند. خواننده‌ی علاقمند می‌تواند مرجع [۶] را مطالعه کند.

۱—۲ تعاریف و قضایای مورد نیاز

در این پایان‌نامه گروه‌های مورد نظر ما متناهی هستند و فرض بر این است که خواننده با مفاهیم و تعاریف مقدماتی نظریه گروه‌ها و نظریه‌ی گراف آشنایی دارد. در این بخش به یادآوری تعریف‌ها، قضیه‌ها و لم‌های موردنیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم.

گزاره ۱.۱ فرض کنید G گروهی دل‌خواه باشد. در این صورت اگر $\frac{G}{Z(G)}$ دوری باشد آن‌گاه G آبلی است.

---
[۱۰] Dolfi
[۱۱] You
[۱۲] Qian
[۱۳] Shi

اثبات. قرار دهید $Z = Z(G)$. فرض کنید $\frac{G}{Z} =< gZ >$ و $a, b \in G$. در این صورت به ازای $m, n \in \mathbb{Z}$، $bZ = g^m Z$ و $aZ = g^n Z$. از این رو $a \in g^n Z$ و $b \in g^m Z$ و به ازای $d, h \in Z$ ای $a = g^n d$ و $b = g^m h$. داریم

$$\begin{aligned} ab &= (g^n d)(g^m h) \\ &= g^n g^m dh = g^{n+m} hd \\ &= g^m g^n hd = g^m h g^n d = ba. \end{aligned}$$

بنابراین G آبلی است. ■

تعریف **۲.۱** گوییم گروه G روی مجموعه‌ی غیرتهی X عمل می‌کند، (یا G روی X جایگشت می‌دهد) هرگاه برای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ عضو یکتای $xg \in X$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ و هر $g_۱, g_۲ \in G$ داشته باشیم

$$(xg_۱)g_۲ = x(g_۱ g_۲), \qquad x۱ = x.$$

مثال **۳.۱** فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی و $G \leq S_X$ باشد.(S_X گروه جایگشت‌های روی مجموعه‌ی X است). آن‌گاه G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند. در این مورد هر عضو $g \in G$ نگاشتی از X به X است و برای هر $x \in X$، xg تصویر x تحت نگاشت g است. شرط اوّل گفته شده در تعریف ۲.۱، با توجه به تعریف ترکیب توابع برقرار است و شرط دوّم با توجه به این که ۱_X نگاشت همانی روی X است، برقرار است. این عمل، عمل طبیعی G روی X نامیده می‌شود.

قضیه **۴.۱** فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند. آن‌گاه به هر عضو $g \in G$ یک نگاشت $\rho_g : X \longrightarrow X$ با ضابطه‌ی $\rho_g : x \mapsto xg$ متناظر می‌شود و این نگاشت یک جایگشت روی X است. هم‌چنین نگاشت $\rho : G \longrightarrow S_X$ با ضابطه‌ی $\rho : g \mapsto \rho_g$ یک هم‌ریختی گروهی است که نمایش جایگشت متناظر عمل گروه G نامیده می‌شود.

اثبات. قضیه‌ی ۳.۴ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

قضیه **۵.۱** فرض کنید σ یک هم‌ریختی از گروه G به توی گروه S_X باشد که X یک مجموعه‌ی غیرتهی است. آن‌گاه G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند، اگر برای هر $x \in X$ و هر $g \in G$ تعریف کنیم $xg = x(g\sigma)$. نمایش جایگشت متناظر عمل G، σ است.

اثبات. قضیه‌ی ۴.۴ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

تعریف ۶.۱ فرض کنید که گروه G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند. عمل را وفادار گوییم هرگاه نمایش متناظر عمل گروه G، یک‌به‌یک باشد. در مثال ۳.۱، نمایش جایگشت مورد نظر، نگاشت شمول $i : G \longrightarrow S_X$ است که به وضوح یک‌به‌یک است.

لم ۷.۱ فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند. رابطه‌ی $\sim$ را روی مجموعه‌ی X این گونه تعریف می‌کنیم $x_۱ \sim x_۲$ اگر و فقط اگر عضو $g \in G$ موجود باشد به طوری که $x_۱ g = x_۲$. آن‌گاه $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی X است.

اثبات. قضیه‌ی ۶.۴ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

تعریف ۸.۱ فرض کنید G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند آن‌گاه X نسبت به رابطه‌ی هم ارزی $\sim$، به رده‌های هم‌ارزی مجزا از هم افراز می‌شود. این رده‌های هم‌ارزی مدارها یا رده‌های ترایایی عمل نامیده می‌شود. برای هر $x \in X$ رده‌ی شامل عضو x مدار x نامیده می‌شود که آن را با $\mathrm{orb}(x)$ نمایش می‌دهیم و $\mathrm{orb}(x) := \{xg \mid g \in G\}$.

لم ۹.۱ فرض کنید G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند و $x \in X$. قرار دهید

$$\mathrm{stab}_G(x) := \{g \in G \mid xg = x\}.$$

آن‌گاه $\mathrm{stab}_G(x)$ یک زیرگروه G است که ثابت ساز x در G نامیده می‌شود.

اثبات. قضیه‌ی ۸.۴ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

لم ۱۰.۱ فرض کنید گروه G روی مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$ در این صورت داریم

$$|\mathrm{orb}(x)| = |G : \mathrm{stab}_G(x)|.$$

اثبات. قضیه‌ی ۱۱.۴ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند. این عمل را متعدی گوییم هرگاه فقط و فقط دارای یک مدار باشد. عمل را غیرمتعدی گوییم هرگاه متعدی نباشد.

گزاره ۱۲.۱ فرض کنید G روی مجموعه‌ی X عمل می‌کند و ρ نمایش جایگشت متناظر این عمل است. آن‌گاه $\mathrm{Ker}\rho = \bigcap_{x\in X} \mathrm{stab}_G(x)$.

اثبات. فرض کنیم $t \in \mathrm{Ker}\rho$ عضوی دل‌خواه باشد در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
\rho_t = ۱_X &\iff \rho_t(x) = x \ \ \forall x \in X \\
&\iff xt = x \ \ \forall x \in X \\
&\iff t \in \mathrm{stab}_G(x) \ \ \forall x \in X \\
&\iff t \in \bigcap_{x \in X} \mathrm{stab}_G(x).
\end{aligned}$$

پس به وضوح حکم مورد نظر برقرار است. ■

مثال **۱۳.۱** فرض کنید $H \leq G$ و X مجموعه‌ی هم‌مجموعه‌های راست H در G باشد. آن‌گاه G روی X از راست عمل می‌کند، یعنی به هر $g \in G$ و هر $Hx \in X$، هم‌مجموعه‌ی راست $Hxg \in X$ متناظر می‌شود. تحقیق شرایط این عمل ساده است. این عمل متعدی است زیرا برای هر $Hx_۱, Hx_۲ \in X$ داریم $(Hx_۱)(x_۱^{-۱}x_۲) = Hx_۲$. اکنون داریم

$$\mathrm{stab}_G(Hx) = \{g \in G \mid Hxg = Hx\} = \{g \in G \mid g \in x^{-۱}Hx\} = x^{-۱}Hx.$$

بنا بر لم ۱۰.۱ داریم $|G : H| = |G : x^{-۱}Hx| = |X|$. نمایش جایگشت این عمل را با ρ^H نمایش می‌دهیم. هسته‌ی این هم‌ریختی به صورت زیر است

$$\mathrm{Ker}\rho^H = \bigcap_{x \in G} x^{-۱}Hx = \bigcap_{x \in G} H^x = H_G.$$

زیرگروه H_G را هسته‌ی H در G نامیم. با فرض این که $|G : H| < \infty$ و با توجه این که $S_X \cong S_{|G:H|}$، می‌توان گفت که ρ^H یک هم‌ریختی گروهی از G به توی $S_{|G:H|}$ است. در نتیجه با توجه به قضیه‌ی اوّل یک‌ریختی $\frac{G}{H_G}$ را می توان در $S_{|G:H|}$ نشاند، بنابراین $|\frac{G}{H_G}| \Bigm| |S_{|G:H|}| = |G : H|!$.

نتیجه **۱۴.۱** فرض کنید G یک گروه متناهی و p کوچکترین شمارنده‌ی اول $|G|$ باشد. اگر $H \leq G$ و $|G : H| = p$، آن‌گاه $H \trianglelefteq G$.

اثبات. ابتدا با توجه به این که $H_G \leq H \leq G$ داریم

$$|G : H_G| = |G : H||H : H_G| = p\ |H_G : H|.$$

حال فرض کنید $|H : H_G| > ۱$ و q شمارنده ی اول $|H : H_G|$ باشد. از این‌رو $q \Bigm| |G|$ و $q \Bigm| |G : H_G|$ و بنا به فرض قضیه داریم $q \geq p$. از طرفی با توجه به مثال ۱۳.۱، $|\frac{G}{H_G}| \Bigm| p!$، پس $pq \Bigm| p!$ و از این

رو داریم $q \,\Big|\, (p-1)!$. چون q عددی است اول، پس بایستی یکی از اعداد ۱ یا ۲ یا ... یا $p-1$ را بشمارد، بنابراین $q < p$ که تناقض است. فرض خلف باطل است و داریم $|H : H_G| = 1$ و در نتیجه $H = H_G \trianglelefteq G$. ■

گزاره **۱۵.۱** فرض کنید $H \leq G$ و $|G : H| = 2$، در این صورت H زیرگروه نرمال G است.

اثبات. با توجه به نتیجه‌ی ۱۴.۱، برهان واضح است. ■

تذکر **۱۶.۱** گروه G روی خودش با رابطه‌ی تزویج عمل می‌کند. یعنی برای هر $g \in G$ و هر $x \in G$ عمل مورد نظر این گونه تعریف می‌شود $x^g = g^{-1}xg$. هر گاه $x, g_1, g_2 \in G$ خواهیم داشت

$$(x^{g_1})^{g_2} = g_2^{-1}(g_1^{-1}xg_1)g_2 = (g_1g_2)^{-1}x(g_1g_2) = x^{g_1g_2}, \quad x^1 = 1^{-1}x1 = x.$$

اکنون مدار x عبارت است از مجموعه‌ی

$$\mathrm{orb}(x) = \{g^{-1}xg \mid g \in G\} = [x]_G.$$

یعنی رده‌ی مزدوجی x در G، و ثابت‌ساز x در G به صورت زیر است

$$\mathrm{stab}_G(x) = \{g \in G \mid g^{-1}xg = x\} = \{g \in G \mid xg = gx\} = C_G(x).$$

که همان مرکزی‌ساز x در G است. فرض کنیم نمایش جایگشت عمل گروه، هم‌ریختی گروهی $\tau : G \to S_G$ باشد با ضابطه‌ی $g \mapsto \tau_g$ که τ_g یک جایگشت روی G است و $\tau(x) = x^g$. با توجه به لم ۱۰.۱ داریم $|[x]_G| = |G : C_G(x)|$ و بنا به گزاره‌ی ۱۲.۱، داریم $\mathrm{Ker}\tau = \bigcap_{x\in G} C_G(x) = Z(G)$. $Z(G)$ را مرکز گروه G می‌نامیم.

نتیجه **۱۷.۱** اگر G یک گروه متناهی با k رده‌ی مزدوجی از عناصر باشد و x_1، x_2، ... و x_k نماینده‌های این رده‌های مزدوجی باشند، آن‌گاه

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(x_i)|.$$

اثبات. با توجه به عمل گروه G روی خودش در تذکر ۱۶.۱، داریم

$$\begin{aligned} |G| &= |[x_1]_G| + |[x_2]_G| + \cdots + |[x_k]_G| \\ &= |G : C_G(x_1)| + |G : C_G(x_2)| + \cdots + |G : C_G(x_k)| \\ &= \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(x_i)| \end{aligned}$$

و حکم ثابت می‌شود. ■

تعریف **۱۸.۱** فرض کنید H و K دو گروه باشند. گوییم H روی K (به عنوان گروه) عمل می‌کند هرگاه به هر $h \in H$ و هر $k \in K$ عضو یکتای $k^h \in K$ متناظر شود به طوری که برای هر $k, k_1, k_2 \in K$ و هر $h, h_1, h_2 \in H$ داشته باشیم

$$(k^{h_1})^{h_2} = k^{h_1 h_2}, \qquad (k_1 k_2)^h = k_1^h k_2^h, \qquad k^1 = k.$$

مثال **۱۹.۱** فرض کنید $H \leq \mathrm{Aut}(K)$، در این صورت H روی K عمل می‌کند. هر عضو $h \in H$ یک خودریختی از گروه K است و به ازای هر $k \in K$ ، k^h تصویر k تحت h است. شرایط تعریف فوق به سادگی قابل تحقیق است. این عمل، عمل طبیعی H روی K است.

قضیه **۲۰.۱** فرض کنید H روی K عمل می‌کند. آن‌گاه به هر عضو $h \in H$ یک نگاشت $\phi_h : K \to K$ با ضابطه‌ی $\phi_h : k \mapsto k^h$ نسبت داده می‌شود. این نگاشت یک خودریختی از K است. علاوه بر این نگاشت $\phi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ با ضابطه‌ی $\phi : h \mapsto \phi_h$ یک هم‌ریختی گروهی است. ϕ را نمایش خودریختی H، متناظر با این عمل نامیم.

اثبات. فرض کنید $h \in H$. چون عمل H روی K به ویژه عمل H روی یک مجموعه است بنا به قضیه‌ی ۱۶.۱، $\phi_h \in S_K$. اکنون به ازای $k_1, k_2 \in K$ داریم

$$(k_1 k_2)\phi = (k_1 k_2)^h = k_1^h k_2^h = (k_1 \phi_h)(k_2 \phi_h).$$

بنابراین $\phi_h \in \mathrm{Aut}(K)$ و نگاشت $\phi : h \mapsto \phi_h$ یک نگاشت از H به توی $\mathrm{Aut}(K)$ است و بنا به قضیه‌ی ۴.۱ یک هم‌ریختی گروهی است. ■

قضیه **۲۱.۱** فرض کنید ϕ یک هم‌ریختی از H به توی $\mathrm{Aut}(K)$ باشد. آن‌گاه H روی K عمل می‌کند هرگاه به ازای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ تعریف کنیم $k^h = k(h\phi)$ و عمل متناظر ϕ است.

اثبات. چون $\mathrm{Aut}(K) \leq S_K$ بنابراین ϕ یک هم‌ریختی از H به‌توی S_K نیز محسوب می‌شود و بنا به قضیه‌ی ۵.۱ معادله‌ی فوق یک عمل از H روی K، به عنوان مجموعه تعریف می‌کند. نشان می‌دهیم که H روی K به عنوان گروه نیز عمل می‌کند. فرض کنید $h \in H$ و $k_1, k_2 \in K$ داریم

$$(k_1 k_2)^h = (k_1 k_2)(h\phi) = (k_1(h\phi))(k_2(h\phi)) = k_1^h k_2^h.$$

به سادگی و با توجه به قضیه‌های ۴.۱ و ۵.۱ و ۲۰.۱ نتیجه می‌شود که نمایش خودریختی H متناظر با این عمل، ϕ است. ■

تعریف ۲۲.۱ فرض کنید H و K دو گروه دل‌خواه باشند. با فرض این که $h, h' \in H$ و $k, k' \in K$ عمل زیر را بین دو زوج (h,k) و (h',k') این گونه تعریف می‌کنیم

$$(h,k)(h',k') = (hh', kk').$$

مجموعه‌ی $H \times K = \{(h,k) \mid h \in H \ , \ k \in K\}$ به همراه عمل دوتایی فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. خواص گروه به سادگی قابل تحقیق است. این گروه را حاصل‌ضرب مستقیم H و K می‌نامیم.

قضیه ۲۳.۱ گروه $H \times K$ دارای دو زیرگروه

$$H \times ۱ = \{(h, ۱) \mid h \in H\} \cong H, \qquad ۱ \times K = \{(۱, k) \mid k \in K\} \cong K$$

است. هر عضو گروه $H \times K$ به صورت حاصل‌ضرب عضوی از $H \times ۱$ و عضوی از $۱ \times K$ قابل نمایش است. هم‌چنین هر عضو $H \times ۱$ با هر عضو $۱ \times K$ جابجا می‌شود و $(H \times ۱) \cap (۱ \times K) = ۱$.

اثبات. قضیه‌ی ۳۳.۲ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

قضیه ۲۴.۱ فرض کنید گروه G دارای زیرگروه‌های H و K باشد به طوری که هر عضو G به صورت حاصل‌ضرب hk که $h \in H$ و $k \in K$ قابل نمایش است. هر عضو H با هر عضو K جابجا می‌شود و $H \cap K = ۱$. آن‌گاه $G \cong H \times K$.

اثبات. قضیه‌ی ۳۴.۲ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

لم ۲۵.۱ برای هر دو گروه H و K داریم $H \times K \cong K \times H$.

اثبات. نگاشت $(h,k) \mapsto (k,h)$ که برای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ تعریف می‌شود یک یک‌ریختی از $H \times K$ به روی $K \times H$ است. ■

لم ۲۶.۱ برای هر سه گروه دلخواه G ، H و K داریم

$$(G \times H) \times K \cong G \times H \times K \cong G \times (H \times K).$$

اثبات. مشابه اثبات لم ۲۵.۱ و با در نظر گرفتن نگاشت $((g,h),k) \mapsto (g,(h,k))$ واضح است. ■

گزاره ۲۷.۱ فرض کنید گروه G حاصل‌ضرب مستقیم دو زیرگروه خود مانند H و K است. در این صورت هر G−رده‌ی مزدوجی نیز به صورت حاصل‌ضرب یک H−رده‌ی مزدوجی در یک K−رده‌ی مزدوجی است.

اثبات. داریم $G = H \times K$ بنابراین هر عضو $h \in H$ با هر عضو $k \in K$ جابجا می‌شود و $H \cap K = 1$. به سادگی می‌توان دید که $H, K \trianglelefteq G$ و هر عضو $g \in G$ به صورت یکتای hk نمایش داده می‌شود که در آن $h \in H$ و $k \in K$. اکنون داریم

$$\begin{aligned} [g]_G &= \{g^x \mid x \in G\} \\ &= \{(hk)^{h_1 k_1} \mid h, h_1 \in H \ , \ k, k_1 \in K\} \\ &= \{h^{h_1} k^{k_1} \mid h, h_1 \in H \ , \ k, k_1 \in K\} \\ &= \{h^{h_1} \mid h_1 \in H\}\{k^{k_1} \mid k_1 \in K\} = [h]_H [k]_K. \end{aligned}$$

و حکم مورد نظر ثابت می‌شود. ■

تعریف ۲۸.۱ فرض کنید $N \trianglelefteq G$ و زیرگروه H از گروه G موجود باشد به طوری که $G = HN$ و $H \cap N = 1$. در این صورت G را حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم داخلی N و H گوییم و با یکی از دو نماد $G = N \rtimes H$ یا $G = H \ltimes N$ نمایش می‌دهیم. هر عضو G به صورت یکتای hn، که در آن $h \in H$ و $n \in N$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۲۹.۱ گروه دووجهی D_{2n} حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم یک گروه دوری از مرتبه‌ی n و یک گروه دوری از مرتبه‌ی ۲ است. زیرا با توجه به تعریف این گروه داریم

$$D_{2n} = < a, b \mid a^n = b^2 = 1 \ , \ ba = a^{-1}b > .$$

از این رو خواهیم داشت $D_{2n} = < a > \rtimes < b >$ که $< a > \cong \mathbb{Z}_n$ و $< b > \cong \mathbb{Z}_2$. با توجه به این‌که $|D_{2n} : < a >| = 2$ نتیجه می‌شود که $< a > \trianglelefteq G$ اما $< b >$ لزوما در G نرمال نیست.

قضیه ۳۰.۱ هرگاه G به صورت حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم دو زیرگروه N و H خود باشد که $N \trianglelefteq G$، آن‌گاه رابطه‌ی تزویج در N توسط هر عضو $h \in H$ یک خودریختی هم‌چون h^α به ما می‌دهد. یعنی نگاشت $h^\alpha : N \longrightarrow N$ با ضابطه‌ی $n \mapsto hnh^{-1}$ یک خودریختی از N است ونگاشت $\alpha : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ با ضابطه‌ی $\alpha : h \longrightarrow h^\alpha$ یک هم‌ریختی گروهی است.

اثبات. با توجه به تعریف حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم، برهان واضح است. ■

تذکر ۳۱.۱ در قضیه‌ی فوق G حاصل‌ضرب مستقیم H و N است اگر و فقط اگر α هم‌ریختی بدیهی باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنیم همریختی $\alpha : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ بدیهی است. یعنی به ازای هر $h \in H$ داریم $h^\alpha = id_N$. کافی است نشان دهیم $H \trianglelefteq G$. به ازای هر $n \in N$ و هر $h \in H$ داریم $n = h^\alpha(n) = n^h$. از این رو $hn = nh$. حال با توجه به این که هر عضو $g \in G$ دارای نمایش یکتایی به صورت $g = h_۱n_۱$ است، داریم

$$h^g = (h_۱n_۱)^{-۱}h(h_۱n_۱) = (n_۱^{-۱}h_۱^{-۱})h(h_۱n_۱) = h_۱^{-۱}hh_۱$$

و در نتیجه حکم برقرار است.

در جهت عکس فرض کنیم $G = H \times N$. در این صورت به ازای هر $h \in H$ و هر $n \in N$ داریم $hn = nh$ و در نتیجه به ازای هر $h \in H$ خواهیم داشت

$$h^\alpha(n) = n^h = hnh^{-۱} = n$$

بنابراین $h^\alpha = id_N$ و α همریختی بدیهی است. ■

قضیه ۳۲.۱ دو گروه H و N و یک همریختی $\alpha : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ مفروض‌اند. حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم خارجی $G = H \ltimes N$، مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب (h, n) است که $h \in H$ و $n \in N$. این مجموعه با عمل دوتایی زیر تشکیل گروه می‌دهد

$$(h_۱, n_۱)(h_۲, n_۲) = (h_۱h_۲, n_۱^{h_۲^\alpha}n_۲).$$

اثبات. بسته بودن مجموعه‌ی فوق نسبت به عمل فوق واضح است. عضو همانی این عمل $(۱_H, ۱_N)$ است. وارون عضو (h, n) به صورت $(h^{-۱}, (n^{-۱})^{(h^\alpha)^{-۱}})$ است زیرا

$$\begin{aligned}
(h, n)(h^{-۱}, (n^{-۱})^{(h^\alpha)^{-۱}}) &= (hh^{-۱}, n^{(h^{-۱})^\alpha}(n^{-۱})^{(h^\alpha)^{-۱}}) \\
&= (hh^{-۱}, n^{(h^\alpha)^{-۱}}(n^{-۱})^{(h^\alpha)^{-۱}}) \\
&= (۱, (nn^{-۱})^{(h^\alpha)^{-۱}}) = (۱_H, ۱_N).
\end{aligned}$$

شرکت پذیری این عمل به صورت زیر قابل تحقیق است

$$\begin{aligned}
(h_۱, n_۱)((h_۲, n_۲)(h_۳, n_۳)) &= (h_۱, n_۱)(h_۲h_۳, n_۲^{h_۳^\alpha}n_۳) \\
&= (h_۱(h_۲h_۳), n_۱^{(h_۲h_۳)^\alpha}n_۲^{h_۳^\alpha}n_۳) \\
&= ((h_۱h_۲)h_۳, n_۱^{h_۲^\alpha h_۳^\alpha}n_۲^{h_۳^\alpha}n_۳) \\
&= (h_۱h_۲, n_۱^{h_۲^\alpha}n_۲)(h_۳, n_۳) \\
&= ((h_۱, n_۱)(h_۲, n_۲))(h_۳, n_۳).
\end{aligned}$$

بنابراین، این مجموعه تشکیل گروه می‌دهد. ■

تذکر ۳۳.۱ نگاشت‌های $h \mapsto (h, 1_N)$ و $n \mapsto (1_H, n)$ به ترتیب درون‌ریختی‌هایی از H به G و از N به G هستند. از دو نماد H^* و N^* برای نمایش تصویر این درون‌ریختی‌ها استفاده می‌کنیم. به وضوح $H \cong H^*$ و $N \cong N^*$. داریم $(h, 1_N)(1_H, n) = (h, n)$، در نتیجه $G = H^*N^*$ و نیز $H^* \cap N^* = 1$. هم‌چنین $N^* \trianglelefteq G$؛ زیرا برای هر $(h, n) \in G$ و هر $(1_H, n) \in N^*$ داریم

$$\begin{aligned}((h_1, n_1)(1_H, n))(h_1, n_1)^{-1} &= (h_1 1_H, n_1^{(1_H)^\alpha} n)(h_1^{-1}, (n_1^{-1})^{(h_1^\alpha)^{-1}}) \\ &= (1_H, (n_1 n)^{(h_1^{-1})^\alpha} (n_1^{-1})^{(h_1^\alpha)^{-1}}) \in N^*.\end{aligned}$$

بنابراین G حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم داخلی N^* و H^* است. در حالت کلی تمایزی بین N و N^* و H و H^* قائل نمی‌شویم.

تعریف ۳۴.۱ فرض کنیم $K \trianglelefteq G$. گوییم G روی K می‌شکافد هرگاه زیرگروهی مانند H از گروه G موجود باشد به طوری که $G = HK$ و $H \cap K = 1$. چنین زیرگروه H ای را متمم K در G نامیم. به عبارت دیگر داریم $G = K \rtimes H$.

تذکر ۳۵.۱ الف) توجه کنید که یک زیرگروه H از G یک متمم K در G است اگر و فقط اگر هر عضو G به صورت یکتای hk که $h \in H$ و $k \in K$.

ب) طبق قضیه‌ی دوّم یک‌ریختی داریم

$$\frac{G}{K} = \frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K} \cong H.$$

ج) به ازای هر $g \in G$، زیرگروه H^g یک متمم K در G است زیرا

$$G = G^g = (HK)^g = H^g K^g = H^g K.$$

هم‌چنین داریم

$$H^g \cap K = H^g \cap K^g = (H \cap K)^g = 1.$$

قضیه ۳۶.۱ الف) فرض کنید H روی K توسط ϕ عمل می‌کند و $G = K \rtimes_\phi H$. آن‌گاه G روی K می‌شکافد و H یک متمم K در G است.

ب) فرض کنید $K \trianglelefteq G$ و G روی K بشکافد، هم‌چنین H یک متمم K در G باشد و ϕ عمل H روی K باشد که با تحدید عمل تزویج G روی K قابل تعریف است. در این صورت $G = K \rtimes_\phi H$.

اثبات. الف) با توجه به تعریف ۳۴.۱ نتیجه می‌شود.

ب) فرض کنید $K \trianglelefteq G$ و H یک متمم K در گروه G باشد. فرض کنید $\phi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(K)$ عمل H روی K باشد که با تحدید عمل تزویج G روی K قابل تعریف است. یعنی برای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ داریم $\phi_h : k \mapsto k^h = h^{-1}kh$. هر عضو گروه G به صورت یکتایی به فرم hk قابل نمایش است. علاوه بر این ضرب در G به ازای هر $h_1, h_2 \in H$ و هر $k_1, k_2 \in K$ تعریف می‌شود. بنابراین عناصر گروه G همان عناصر $K \rtimes_\phi H$ و عمل گروه G نیز همان ϕ است. ■

لم ۳۷.۱ فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی متناهی باشد و G^X نشان دهنده‌ی تمامی توابع از X به توی G باشد. به ازای هر $f_1, f_2 \in G^X$ فرض کنید $f_1f_2 \in G^X$ و برای هر $x \in X$ این گونه تعریف شود $(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$. نسبت به این عمل ضرب G^X دارای ساختار یک گروه است که با $\mathrm{Dr}G^X$ نمایش داده می‌شود. به ازای هر $x \in X$ فرض کنید $G_x = \{f \in G^X \mid \forall y \in X,\ y \neq x,\ f(y) = 1\}$. در این صورت $G \cong G_x \trianglelefteq \mathrm{Dr}G^X$ و $\mathrm{Dr}G^X = \mathrm{Dr}\prod_{x\in X} G_x$. بنابراین $\mathrm{Dr}G^X$ حاصل‌ضرب مستقیم $|X|$ کپی از G است.

اثبات. قضیه‌ی ۲۱.۸ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

لم ۳۸.۱ فرض کنید H روی مجموعه‌ی متناهی X عمل می‌کند و G یک گروه دل‌خواه باشد و $G^* = \mathrm{Dr}G^X$. آن‌گاه H روی G^* (به عنوان گروه) عمل می‌کند هرگاه برای هر $h \in H$ و هر $f \in G^*$، تابع $f^h \in G^*$ را به ازای هر $x \in X$ به صورت $f^h(x) = f(xh^{-1})$ تعریف کنیم.

اثبات. قضیه‌ی ۱۸.۹ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

تعریف ۳۹.۱ فرض کنید H، X، G و G^* همانند دو لم فوق باشند. فرض کنید ϕ نشان دهنده‌ی عمل H روی G^*، تعریف شده در لم ۳۸.۱ باشد. در این صورت حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم $G^* \rtimes_\phi H$ را حاصل‌ضرب پیچشی G توسط H می‌نامیم و با $G \wr H$ نمایش می‌دهیم. زیرگروه نرمال G^* گاهی اوقات گروه پایه‌ی حاصل‌ضرب پیچشی فوق نامیده می‌شود.

مثال ۴۰.۱ در این مثال نشان می‌دهیم که $C_2 \wr C_2$ با گروه دووجهی D_4 یک‌ریخت است. فرض کنیم $C_2^* = \mathrm{Dr}C_2^{C_2}$. در این جا $C_2 =< \sigma >$، که در آن $\sigma = (12)$. اکنون C_2 روی C_2^* به صورت زیر عمل می‌کند

$$\begin{aligned} \phi : C_2^* \times C_2 &\longrightarrow C_2^* \\ (f, x) &\mapsto f^x \end{aligned}$$