بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

پایداری و ابر پایداری همریختی های سه تایی ژوردان روی جبرهای باناخ سه تایی

توسط:

وحید کشاورز

استاد راهنما:

دکتر مجید اسحاقی

استاد مشاور:

دکتر علی غفاری

دی ۱۳۹۳

تقدیم به:

مقدس ترین واژه ها در لغت نامه دلم

مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت آن می دانم

پدر، مهربانی مشفق، بردبار و حامی

خواهر و برادرهایم همراهان همیشگی و پشتوانه های زندگیم

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست، سپاس خدایی را که توفیق عنایت فرمود تا برگی دیگر بر دفتر علم و معرفتم افزون گردد. اینک که به یاری او دوره ای دیگر از تحصیلاتم به پایان می رسد، بر خود واجب می دانم از استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر مجید اسحاقی گرجی و استاد مشاور گرانقدرم، جناب آقای دکتر علی غفاری تشکر و قدردانی نمایم. آنان که رهنمود ها، حمایت ها و امیدها به من بخشیدند، آنان که درس معلمی به من آموختند. شاگردی این دو بزرگوار، که ارائه این پایان نامه را به حق مرهون هدایت ایشان می دانم، افتخار بزرگی است که با من خواهد ماند.

هم چنین مراتب امتنان و تشکر خود را خدمت تمامی اعضای خانواده ام خصوصاً پدر و مادر عزیزم، که در تمام مراحل زندگی دوست، مشوق و راهنمای من بوده اند تقدیم می دارم.

از مسئولین و اساتید دانشگاه سمنان خصوصاً دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر و تمامی دوستانی که در انجام این مجموعه یاریم کردند کمال تشکر و قدردانی را دارم. در خاتمه از داوران گرامی جناب آقای دکتر فریدون حبیبیان دهکردی و جناب آقای دکتر محمد باقر قائمی که با مطالعه این پایان نامه و تقبل داوری جلسه دفاعیه، مرا مدیون خویش ساخته اند، کمال امتنان را دارم.

بار الها سلامتی، سعادت، شادی، پیروزی و پایداری همگی این عزیزان را از درگاهت خواستارم.

وحید کشاورز
دی ۱۳۹۳

چکیده

هدف در این پژوهش، ارائه یک تعریف جدید و کاربردهایی از آن است. در این پژوهش به ابر پایداری و پایداری هایرز[۱]-اولام[۲]-راسیاس[۳] برای همریختی های سه تایی ژوردان و مشتق های سه تایی ژودان روی جبر های باناخ[۴]سه تایی و C^*-جبرهای سه تایی می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: معادلات تابعی، جبرهای باناخ سه تایی، C^*-جبر سه تایی، پایداری، ابر پایداری.

---
[۱] Hyers
[۲] Ulam
[۳] Rassias
[۴] Banach

فهرست مطالب

مقدمه **الف**

۱ تعاریف و قضیه های مقدماتی **۱**

۱.۱ تعاریف اولیه ۱

۲.۱ پایداری معادلات تابعی ۷

۲ محاسبه تقریبی همریختی های سه تایی ژوردان و مشتق های سه تایی ژوردان روی C^*-جبرهای باناخ سه تایی **۱۴**

۱.۲ مقدمات ۱۴

۲.۲ ابر پایداری ۱۴

۳.۲ پایداری ۲۵

۳ همریختی های سه تایی ژوردان بین C^*-جبر سه تایی یکدار **۳۲**

۱.۳ مقدمات ۳۲

۲.۳ همریختی های سه تایی ژوردان روی C^*-جبر سه تایی یکدار ۳۳

۴ همریختی های حلقه ای سه تایی ژوردان روی جبرهای باناخ سه تایی **۴۹**

۱.۴ مقدمات ۴۹

۲.۴ پایداری همریختی های سه تایی ژوردان روی جبرهای باناخ سه تایی ۵۱

۳.۴ ابر پایداری همریختی های سه تایی ژوردان ۵۸

کتاب‌نامه **۶۲**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۶۵**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۶۷**

پیشگفتار

اولین بار مسئله پایداری [1] معادلات تابعی در سال ۱۹۴۰ میلادی، توسط اولام [2] به صورت زیر مطرح شد [۳۹].

فرض کنیم $(G_۱, o)$ یک گروه و $(G_۲, *)$ یک گروه متریک با متریک $d(.,.)$ بوده و $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. اگر نگاشت $h : G_۱ \to G_۲$ در رابطه

$$d\big(h(xoy), h(x) * h(y)\big) \leq \epsilon \qquad\qquad (x, y \in G_۱)$$

صدق کند. آیا می توان همریختی $H : G_۱ \to G_۲$ را چنان یافت به قسمی برای هر $x \in G_۱$،

$$d\big(h(x), H(x)\big) \leq \epsilon?$$

به عبارت دیگر تحت چه شرایطی می توان یک نگاشت تقریبا همریختی را به یک نگاشت همریختی نزدیک کرد؟ یک سال بعد هایرز [3][۲۲] این مسئله را برای فضاهای باناخ به صورت زیر مطرح کرد.

اگر X و Y فضاهای باناخ، $\delta > ۰$ و تابع $f : X \to Y$ در نامعادله

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \qquad\qquad (x, y \in X)$$

صدق کند، آن گاه برای هر $x \in X$ حد $T(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} f(۲^n x)$ وجود دارد و $T : X \to Y$ یک تابع جمعی منحصر بفرد است به طوری که برای هر $x \in X$،

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \delta.$$

---

[1] stabilty

[2] Ulam

[3] Hyers

در سال ۱۹۷۸ میلادی، تمستکلیس راسیاس[۱][۴۱] به جای تابع کنترل در قضیه هایرز، تابع کنترل $\epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$ قرار داد و اثبات کرد که این مفهوم جدید به پایداری هایرز-اولام-راسیاس معروف است.

گاوروتا[۲][۱۸] این نتایج را تعمیم داد و بجای تابع کنترل قضیه هایرز-اولام-راسیاس، تابع کنترل $\varphi(x, y)$ جایگزین کرد. (برای جزئیات بیشتر [۱۹]، [۲۰]، [۲۳]، [۲۶]، [۳۸] را ببینید). کاداریو [۳] و رادو [۴] قضیه هایرز را با قضیه نقطه ثابت تعمیم یافته اثبات کردند[۱۲] با توجه به اینکه این روش اثبات پایداری را ساده کرد. و تقریب دقیق تری از تابع مطلوب در پایداری را به ما می دهد که مورد استقبال و توجه بسیاری از محققان در این زمینه قرار گرفته است. بیشتر ساختارهای جبری n-تایی و به ویژه جبرهای سه تایی در گرایش هایی از فیزیک نظری و ریاضی فیزیک و پردازش داده ها پدیدار شده اند. فیزیک نظری با مکانیک کوانتوم و کشف مکانیک نامبیو[۵](۱۹۷۳) (مرجع [۳۵] را ببینید) پیشرفت کرده است. همچنین مقاله ای از آکابو[۶](مرجع[۳۶] را ببینید) روی معادله ی یانگ-بکسر[۷]به یک پیشرفت مهم روی جبرهای n-تایی انگیزه داد.

اولین تعمیم مفهومی از جبرهای دوتایی، جبرهای سه تایی معرفی شده توسط ژاکوبسن[۸][۲۴] بودند. ساختارهای جبرهای سه تایی در قرن ۱۹ جهت بررسی بعضی از مسائل مکانیک کوانتوم مطرح شده و سپس در ریاضی و فیزیک به کار گرفته شده است (مراجع [۱۴]، [۱]، [۳]، [۲]، [۴]، [۸]،[۱۰]، [۲۱]، [۳۰]، [۳۱]، [۳۴]، [۴۰]، [۱۱]، [۲۷]، [۳۲]، [۵]را ببینید).

این پایان نامه شامل ۴ فصل است:

در فصل اول، خواننده با تعاریف و قضیه های مقدماتی که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می گیرد، آشنا می شود.

---

۱ Rassias

۲ Gavruta

۳ Cădariu

۴ Radu

۵ Nambu

۶ Akubo

۷ Yang-Bexter

۸ Jacobson

در فصل دوم، محاسبه تقریبی همریختی های سه تایی ژوردان و مشتق های سه تایی ژوردان روی C^*-جبرهای باناخ سه تایی بررسی می کنیم [۱۵].

در فصل سوم، همریختی های سه تایی ژوردان بین C^*-جبر سه تایی یکدار ارائه می شود [۱۶].

در فصل چهارم، پایداری و فوق پایداری همریختی سه تایی ژوردان روی جبرهای باناخ سه تایی، به روش نقطه ثابت را بررسی می کنیم [۱۷].

مقالات زیر از این پایان نامه استخراج شده اند.

1. M. Eshaghi Gordji, V. Keshavarz and M. De La Sen, Approximately Ternary Jordan Homomorphisms and Jordan Derivations on Ternary C^*-Algebras, Submitted.
2. M. Eshaghi Gordji, V. Keshavarz, Ternary Jordan Homomorphisms between unital Ternary C^*-Algebras, Submitted.
3. M. Eshaghi Gordji, V. Keshavarz and Sh. Bazeghi, Ternary Jordan Homomorphisms on Banach Ternary Algebras
4. M. Eshaghi Gordji, Sh. Bazeghi and V. Keshavarz, Ternary Jordan Derivations on Banach Ternary Algebras
5. M. Eshaghi, V. Keshavarz, M. De La Sen and A. Rahimi, Fixed points and functional equations connected with 3-Lie m-derivations on 3-Lie algebras, Submitted.
6. M. Eshaghi Gordji, A.Rahimi and V.Keshavarz, Approximate Ternary Jordan Bi-Homomorphisms in 3-Lie Algebras, Submitted.
7. M. Eshaghi Gordji,V.Keshavarz and A.Rahimi , Approximate Orthogonally Ternary Jordan Bi-Derivations in 3-Lie Algebras

فصل ۱

تعاریف و قضیه های مقدماتی

این فصل شامل دو بخش می باشد؛ که در بخش اول به بیان تعاریف اولیه خواهیم پرداخت و در بخش دوم پایداری معادلات تابعی و قضایای مقدماتی بیان خواهیم کرد که در فصل های بعدی استفاده می شوند. در این فصل بسیاری از قضیه ها را بدون اثبات ذکر می کنیم که خواننده می تواند برای مطالعه بیشتر به منابع ذکر شده در قسمت مراجع، مراجعه کند.

۱.۱ تعاریف اولیه

در این بخش تعاریف مورد نیاز را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری X را روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ نرمدار گوییم، هرگاه نگاشت $\|.\| : X \to \mathbb{F}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{F}$، سه خاصیت زیر برقرار باشد

(۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ ؛

(۲) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ؛

(۳) به ازای هر $x \in X$ و $\lambda \in \mathbb{F}$، $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

در این صورت $(X, \|.\|)$ را فضای نرمدار می نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد. زوج $(X, \|.\|)$ یک فضای باناخ نامیده می شود هرگاه فضای متریک $d(x, y) = \|x - y\|$ کامل باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را یک جبر گوییم که نگاشت $\pi : (x, y) \to xy$

از $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ به توی $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x,y,z\in\mathcal{A}$ و $\alpha\in\mathbb{F}$ داشته باشیم

(۱) $x(yz)=(xy)z$ ؛

(۲) $(x+y)z=xz+yz$، $x(y+z)=xy+xz$ ؛

(۳) $(\alpha x)y=\alpha(xy)=x(\alpha y)$.

تعریف ۴.۱.۱. جبر $\mathcal{A}$ را تعویض پذیر گوییم هرگاه برای هر $x,y\in\mathcal{A}$ داشته باشیم $xy=yx$.

تعریف ۵.۱.۱. جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر نرمدار گوییم هرگاه $\mathcal{A}$ به عنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $\|.\|$ در شرط زیر صدق کند

$$\|xy\|\leq\|x\|\|y\| \qquad (x,y\in\mathcal{A}).$$

تعریف ۶.۱.۱. جبر نرمدار $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر باناخ گوییم هرگاه $\mathcal{A}$ فضای باناخ باشد.

تعریف ۷.۱.۱. اگر جبر $\mathcal{A}$ شامل عنصری مانند e باشد که به ازای هر $x\in\mathcal{A}$ داشته باشیم $xe=ex=x$ آن گاه $\mathcal{A}$ را یک جبر یکدار و e را عضو یکه $\mathcal{A}$ می نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{B},\mathcal{A}$ دو جبر با میدان اسکالر یکسان $\mathbb{F}$ باشند. در این صورت یک همریختی جبری از $\mathcal{A}$ به توی $\mathcal{B}$، نگاشت خطی φ است به طوری که

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \qquad (x,y\in\mathcal{A}).$$

تذکر: اگر $\mathcal{B}=\mathbb{F}=\mathbb{C}$ و $\varphi\neq 0$، آنگاه φ را همریختی مختلط روی $\mathcal{A}$ می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱. یک برگشت روی $\mathcal{A}$ عبارت است از نگاشت $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ هرگاه به ازای هر $a,b\in\mathcal{A}$ و $\lambda\in\mathbb{F}$ در شرایط زیر صدق کند

(۱) $(a+b)^* = a^* + b^*$؛

(۲) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$؛

(۳) $(ab)^* = b^* a^*$؛

(۴) $a^{**} = a$.

تعریف ۱۰.۱.۱. جبر $\mathcal{A}$ به انضمام برگشت $*$ را یک $*$-جبر می نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. یک $*$-جبر نرمدار، یک جبر نرمدار با عمل برگشت $x \mapsto x^*$ است هرگاه برای هر $x \in \mathcal{A}$،

$$\|x\| = \|x^*\|.$$

به علاوه اگر $\mathcal{A}$ کامل باشد، آن گاه $\mathcal{A}$ را یک $*$-جبر باناخ یا B^*-جبر گوییم.

تعریف ۱۲.۱.۱. جبر باناخ $\mathcal{A}$ را یک C^*-جبر می نامیم، هرگاه به ازای هر $a \in \mathcal{A}$،

$$\|aa^*\| = \|a\|^۲.$$

لم ۱۳.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای خطی و $f : X \to Y$ نگاشت جمعی باشد هرگاه به ازای $x \in X$ و $\mu \in T^۱$ ($T^۱ = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = ۱\}$)،

$$f(\mu x) = \mu f(x)$$

در این صورت f یک نگاشت $\mathbb{C}$-خطی است.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو C^*-جبر باشند، در این صورت نگاشت $\mathbb{C}$-خطی $H : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ را

C^*-همریختی می نامیم هرگاه

$$H(xy) = H(x)H(y), \qquad (x, y \in \mathcal{A})$$

$$H(x^*) = H(x)^* \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

و H را C^*-همریختی ژوردان می نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم

$$H(xx) = H(x)H(x),$$

$$H(x^*) = H(x)^* \qquad .$$

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد، عمگر خطی $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را یک C^*-مشتق گوییم برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم

$$D(xy) = xD(y) + D(x)y,$$

$$D(x^*) = D(x)^*$$

و D را C^*-مشتق ژوردان گوییم به طوری که برای هر $x \in A$ داشته باشیم

$$D(xx) = xD(x) + D(x)x,$$

$$D(x^*) = D(x)^* \qquad .$$

تعریف ۱.۱.۱۶. فضای باناخ مختلط A را C^*-جبر سه تایی می نامیم اگر نگاشت ضربی $A^۳ \to A$موجود باشد که $(x, y, z) \to [x, y, z]$ و در شرایط زیر صدق کند:

(۱) در متغیرهای بیرونی C-خطی باشد،

(۲) در متغیرهای میانی C-خطی مزدوج باشد،

(۳) شرکت پذیر باشد، یعنی برای هر $x, y, z, u, w \in A$ داشته باشیم

$$\Big[x, y, [z, u, w]\Big] = \Big[x, [y, z, u], w\Big] = \Big[[x, y, z], u, w\Big]$$

(۴) برای هر $x, y, z \in A$

$$\|[x, y, z]\| \leq \|x\|.\|y\|.\|z\|$$

(۵) برای هر $x \in A$

$$\|[x, x, x]\| \leq \|x\|^{۳}$$

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر C^*-جبر سه تایی A در شرایط تعریف (۱۶.۱.۱) صدق کند و شامل عنصری مانند e باشد که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم

$$x = [x, e, e] = [e, e, x]$$

آن گاه تعریف می کنیم

$$xoy := [x, e, y] \quad , x^* := [e, x, e]$$

بنابراین A جبر یکدار و e عضو یکه A است. بر عکس اگر (A, o) یک C^*-جبر یکدار باشد آن گاه

$$[x, y, z] := xoy^*oz$$

یعنی A یک C^*-جبر سه تایی است.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم A و B، C^*-جبر سه تایی باشند. در این صورت نگاشت خطی $H : A \to B$

را C^*-همریختی سه تایی می نامیم. اگر برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشم

$$H([x, y, z]) = [H(x), H(y), H(z)],$$

$$H(x^*) = H(x)^*.$$

و H را C^*-همریختی سه تایی ژوردان می نامیم. اگر برای هر $x \in A$ داشته باشم

$$H([x, x, x]) = [H(x), H(x), H(x)],$$

$$H(x^*) = H(x)^*.$$

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم A یک C^*-جبر سه تایی باشد. در این صورت نگاشت خطی $D : A \to A$ را C^*-مشتق های سه تایی می نامیم. اگر برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشم

$$D[x, y, z] = [D(x), y, z] + [x, D(y), z] + [x, y, D(z)],$$

$$D(x^*) = D(x)^*.$$

و D را C^*-مشتق های سه تایی ژوردان می نامیم. اگر برای هر $x \in A$ داشته باشم

$$D[x, x, x] = [D(x), x, x] + [x, D(x), x] + [x, x, D(x)],$$

$$D(x^*) = D(x)^*.$$

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم A یک C^*-جبر یکدار با نرم $\|.\|$ و عنصر همانی e_A و B یک C^*-جبر یکدار با نرم $\|.\|$ و عنصر همانی e_B باشند همچنین $U(A)$ مجموعه تمام عناصر یکه در A باشد. تعریف می کنیم $A_{sa} = \{x \in A; x = x^*\}$ و $I_۱(A_{sa}) = \{u \in A_{sa}; \|u\| = ۱$□} .

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم $h : A \to B$ نگاشتی باشد به طوری که برای همه $y \in A$، $u \in U(A)$ و

$n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ داریم

$$h(۳^n uy) = h(۳^n)h(y)$$

در این صورت نگاشت دو سویی پیوسته خطی $h : A \to B$، C^*-یکریختی است.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه باشد. تابع $d : X \times X \to [۰, \infty]$ را یک متریک توسعه یافته می نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند

(۱) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$ ؛

(۲) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$ ؛

(۳) به ازای هر $x, y, z \in X$،$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

تذکر: متریک توسعه یافته با متریک معمولی متفاوت است زیرا، برد آن شامل بی نهایت نیز می باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک توسعه یافته و $L \geq ۰$ ثابت باشد. تابع $T : X \to X$ در شرط لیپشیتز [۱]با ثابت لیپشیتز L صدق می کند هرگاه به ازای هر $x, y \in X$، داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y).$$

۲.۱ پایداری معادلات تابعی

معادله تابعی Q را پایدار گوییم برای هر تابع که به طور تقریبی در این معادله صدق کند، جواب منحصر بفردی از معادله وجود داشته باشد که به آن تابع نزدیک باشد.

[۱]Lipshitz

معادله $f(x+y) = f(x) + f(y)$ یک معادله تابعی معروف و شناخته شده است که آن را معادله کوشی می نامیم و هر جواب از این یک تابع جمعی نامیده می شود. برای توابع حقیقی مقدار، هر جواب اندازه پذیر لبگ از معادله فوق به صورت $f(x) = cx$ می باشد که در آن c عددی ثابت است.
پایداری معادله های تابعی اولین بار برای معادله کوشی مطرح شد و بعد از آن روی معادلات تابعی دیگر مطرح شد و هم اکنون تحقیقات گسترده ای در این زمینه روی فضاهای مختلف انجام می گیرد.

تذکر: در این بخش X، $X_۱$ و $X_۲$ را فضاهای برداری نرمدار حقیقی و Y را فضای باناخ در نظر می گیریم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $\epsilon > ۰$ و تابع $f : X \to Y$ داده شده باشد. تابع f را ϵ-جمعی می نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon.$$

قضیه ۲.۲.۱. (هایرز) فرض کنیم $\epsilon > ۰$ و تابع $f : X \to Y$ داده شده باشد. اگر تابع f، ϵ-جمعی باشد، آن گاه تابع منحصر بفرد جمعی $T : X \to Y$ به ازای هر $x \in X$ به صورت

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} f(۲^n x)$$

تعریف می شود. به طوری که به ازای هر $x \in X$ وجود دارد

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \epsilon.$$

برهان. بنا به فرض برای هر $x, y \in X$، داریم

$$\| f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \tag{۱.۱}$$

اگر در رابطه (۱-۱) به جای y مقدار x را قرار دهیم، برای هر $x \in X$، خواهیم داشت

$$\| f(۲x) - ۲f(x)\| \leq \varepsilon \tag{۲.۱}$$

حال با تقسیم رابطه (۱-۲) بر ۲، برای هر $x \in X$ ، داریم

$$\| \frac{f(۲x)}{۲} - f(x)\| \leq \varepsilon \tag{۳.۱}$$

اکنون در رابطه (۱-۳) به جای x مقدار $۲x$ قرار داده و نتیجه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، برای هر $x \in X$، بدست می‌آوریم

$$\| \frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - \frac{f(۲x)}{۲}\| \leq \frac{\varepsilon}{۲^۲} \tag{۴.۱}$$

با استفاده از رابطه های (۱-۳) و (۱-۴)، برای هر $x \in X$، داریم

$$\| \frac{f(۲^۲x)}{۲^۲} - f(x)\| \leq \varepsilon\Big(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲}\Big) = \varepsilon(۱ - ۲^{-۲}) \tag{۵.۱}$$

با ادامه روند فوق به استقرا، برای هر $x \in X$ ، خواهیم داشت

$$\| ۲^{-n} f(۲^n x) - f(x) \| \leq \varepsilon(۱ - ۲^{-n}) \tag{۶.۱}$$

قرار می‌دهیم

$$T_n(x) = ۲^{-n} f(۲^n x)$$

و ثابت می‌کنیم $\{T_n(x)\}_{n\in N}$ یک دنباله همگرا است. برای این منظور از محک همگرایی کوشی استفاده می‌کنیم. در معادله (۱-۶) به جای x مقدار $۲^m x$ قرار داده و نتیجه را بر ۲^m تقسیم می‌کنیم، در این صورت برای $x \in X$ ،

$$\| ۲^{-(n+m)} f(۲^{n+m} x) - ۲^{-m} f(۲^m x) \| \leq \varepsilon(۱ - ۲^{-n})۲^{-m} \tag{۷.۱}$$

از آنجا که Y کامل است، بنا به محک همگرایی کوشی $\lim_{n\longrightarrow\infty} T_n(x)$ وجود دارد. بنابراین می‌توان تابع $T : X \longrightarrow Y$ را با ضابطه $T(x) := \lim_{n\longrightarrow\infty} T_n(x)$ تعریف نمود. در نتیجه اگر در معادله (۱-۷)

n را به سمت بی نهایت میل دهیم آن گاه برای هر $x \in X$ ، خواهیم داشت

$$\|T(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

نشان می‌دهیم T جمعی است. برای این منظور در (۱-۱) به جای x و y به ترتیب مقادیر $۲^n x$ و $۲^n y$ قرار می‌دهیم و حاصل را بر ۲^n تقسیم می‌کنیم، برای هر $x, y \in X$ ،بدست می‌آوریم

$$\| ۲^{-n} f(۲^{-n}(x+y)) - ۲^{-n} f(۲^n x) - ۲^{-n} f(۲^n y)\| \leq ۲^{-n}\varepsilon$$

با میل دادن n به سمت بی نهایت در معادله اخیر برای هر $x, y \in X$ ، داریم

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

حال شرط یکتایی T را بررسی می کنیم. فرض کنیم $T' : X \longrightarrow Y$ تابع جمعی دیگری باشد که برای هر $x \in X$، در

$$\|T'(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

صدق کند، برای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$T'(x) = \frac{۱}{۲^n} T'(۲^n x)$$

در نتیجه به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\|T(x) - T'(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|\frac{۱}{۲^n} f(۲^n x) - \frac{۱}{۲^n} T'(۲^n x)\|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} \|f(۲^n x) - T'(۲^n x)\| \leq \frac{\epsilon}{۲^n}$$

لذا برای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$T'(x) = T(x)$$