وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی - آنالیز عددی

مطالعه روش عددی میلشتین برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری

استاد راهنما

دکتر مجتبی رنجبر

پژوهشگر

هادی میکائیلی

مهر ماه ۱۳۹۱

تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

امام زمان (عج)

و مادر مهربانم و پدر بزرگوارم

و خواهرم

پروردگارا...

سپاس خداوند را که نخستین موجود است و پیش از او هیچ نبود و آخرین موجود است و پس از او هیچ نباشد. سپاس خداوند را که خود را به ما شناسانید و شکر خویش را الهام فرمود و درهای معرفت را بر ما گشود که پروردگار خود را شناختیم و ما را به توحید خالص رهبری کرد و از انکار شك دور داشت.

خدایا درود بر محمد و آل او فرست، و هر چه اندیشه مرا مشغول دارد تو خود کفایت آن کن، و بدان کارم گمار که فردا مرا از آن پرسش کنی، و اوقات مرا فارغ گردان برای انجام عملی که مرا برای آن آفریدی.

خدایا، رتبه مرا پیش مردم بالا مبر مگر به همان اندازه پیش خودم پست گردانی، و عزت ظاهری مرا افزون مکن مگر در باطن پیش خود مرا به همان قدر متواضع سازی.

به من کمک کن تا قبول کنم، دانسته‌هایم در مقابل دانش لایتناهی تو ندانستنی بیش نیست و بدانم که دانایی تو بیشتر از آنی که من می‌دانم و آن همه را حتی به اندازه‌ی یک قطره جز به یاری تو، دانستن نمی‌توانم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و

وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر سپاس گزاری نمایم.

و از آقای دکتر جواد فرضی و آقای دکتر علی خانی نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. هم‌چنین تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند.

هادی میکائیلی

مهرماه ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

روش میلشتین ساده ترین روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی با مرتبه همگرایی قوی است. این روش برای معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری توسعه داده می‌شود که البته بررسی همگرایی آن به خاطر انتگرال‌های موجود در عبارات باقیمانده پیچیده است.
در این پایان نامه روش میلشتین و اولین مرتبه نرخ قوی همگرایی با روش های مقدماتی ساده بیان شده است.

کلمات کلیدی: بسط‌های تیلور، معادلات دیفرانسیل تصادفی، معادلات تأخیری ، همگرایی قوی ، معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری ، روش میلشتین.

پیشگفتار

روش میلشتین ساده‌ترین روش عددی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی مرتبه قوی همگرایی بالاتری از روش اویلر-ماریاما نتیجه می‌دهد، این روش اولین بار توسط میلشتین[1] ارائه شده است، برای بیان این روش در فصل اول این پایان نامه به تعریف‌های مقدماتی اشاره شده است در فصل دوم معادلات دیفرانسیل تصادفی ، معادلات دیفرانسیل تأخیری تصادفی و همچنین نحوه بدست آمدن روش اویلر و روش میلشتین برای معادلات دیفرانسیل تصادفی به طور مختصر بیان کردیم.

موضوع اصلی پایان نامه در فصل سوم بیان شده که توسعه روش میلشتین برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تأخیری تصادفی و تحلیل همگرایی می باشد اما تحلیل همگرایی به خاطر انتگرال‌های موجود در عبارات باقی مانده پیچیده است.

[1] $Milstein$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ فضای احتمال

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید Ω یک مجموعه مفروض باشد، مجموعه $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های Ω یک σ-جبر نامیده می‌شود هرگاه:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) اگر $F \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $F^c \in \mathcal{F}$ باشد.

(iii) اگر $F_1, F_2, ... \in \mathcal{F}$ آنگاه $F := \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$

در این صورت زوج $(\Omega, \mathcal{F})$ را **فضای اندازه‌پذیر** می‌گویند.

تعریف ۲.۱.۱. σ-جبر بورل ،کوچکترین σ-جبر شامل تمام مجموعه‌های باز از فضای توپولوژیکی R^n می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۱. اندازه احتمال P روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ یک تابع از $\mathcal{F}$ به $[0, 1]$ می‌باشد به طوری که:

(i) $P(\emptyset) = 0$ و $P(\Omega) = 1$

(ii) اگر $F_1, F_2, ... \in \mathcal{F}$ و $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ از هم جداپذیر باشند آنگاه:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i).$$

در این‌صورت سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک **فضای احتمال** گویند.

طبق تعریف ۳.۱.۱ برای هر $A, B \in \mathcal{F}$ با $A \subseteq B$ داریم:

$$0 \leq P(A) \leq P(B) \leq 1$$

و برای هر $A \in \mathcal{F}$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

و برای هر $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ به طوری که $F_1, F_2, \cdots, F_n \in \mathcal{F}$ رابطه زیر برقرار است

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(F_n)$$

توجه کنید که زیرمجموعه‌های F از Ω متعلق به $\mathcal{F}$ را مجموعه‌های $\mathcal{F}$ -اندازه پذیر می‌گویند. در نظریه احتمال هر عضو $\mathcal{F}$ را یک پیشامد می‌گویند و تعبیر زیر را داریم

$$P(F) = \text{"احتمال رخداد پیشامد } F\text{"}$$

تعریف ۴.۱.۱. اگر $(\Omega, \mathcal{F})$ فضای اندازه پذیر باشد، آنگاه $X : \Omega \longrightarrow R^n$ اندازه پذیر است هرگاه $X^{-1}(U)$ مجموعه اندازه پذیر در Ω برای هر مجموعه باز U در R^n باشد.

تعریف ۵.۱.۱. اگر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد، تابع $Y : \Omega \longrightarrow R^n$ ، $\mathcal{F}$ -اندازه‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه به ازای تمام مجموعه‌های باز $U \subset R^n$ یا به طور معادل برای تمام مجموعه‌های بورل $U \subset R^n$ داشته باشیم:

$$Y^{-1}(U) := \{w \in \Omega; Y(w) \in U\} \in \mathcal{F}$$

۲.۱ فضای لبگ

تعریف ۱.۲.۱ (انتگرال لبگ تابع ساده). تابع ساده روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تابعی به فرم

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} a_i I_{F_i}$$

می‌باشد به طوری که $a_1, a_2, \cdots, a_N \in R$ و مجموعه‌های $F_1, F_2, \cdots, F_N \in \mathcal{F}$ دو به دو مجزا هستند و I_F تابع مشخصه زیرمجموعه F از Ω می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_F(w) = \begin{cases} 0 & w \notin F \\ 1 & w \in F \end{cases}$$

انتگرال لبگ تابع ساده ϕ روی زیر مجموعه اندازه پذیر $F \in \mathcal{F}$ به صورت

$$\int_F \phi dP = \sum_{i=1}^{N} a_i P(F \cap F_i)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱ **(انتگرال لبگ[1])**. انتگرال لبگ تابع $\mathcal{F}$-اندازه پذیر $Y : \Omega \longrightarrow R$ با فرض این که به ازای هر $w \in F$ و N متناهی داشته باشیم $0 \leq Y(w) \leq N$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_F Y dP = \sup_{\phi \leq Y} \int_F \phi dP$$

به طوری که سوپریمم روی همه توابع ساده ϕ با شرط $\phi(w) \leq Y(w)$ به ازای هر $w \in F$ در نظر گرفته می‌شود و حاصل سوپریمم متناهی است، چون انتگرال‌های این گونه توابع ساده کراندار هستند.

در حالی که اگر Y نامنفی اما بی کران باشد داریم:

$$\int_F Y dP = \sup_N \int_F Y_N dP$$

به طوری که $Y_N(w) = \min\{Y(w), N\}$ است، ولی ممکن است سوپریمم نامتناهی باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فضای برداری S را فضای خطی نرم دار گویند هرگاه به ازای هر $x \in S$ رابطه ای بین عدد حقیقی نامنفی $\|x\|$، که آن را نرم x می‌نامند وجود داشته باشد یعنی

$$\|.\| : S \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$$

به طوری که دارای خواص زیر است:

[1] *Lebesgue*

(i) برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

(ii) اگر $x \in S$ و α اسکالر باشد، آنگاه

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

(iii) $\|x\| = \circ \Longleftrightarrow x = \circ$

مثال ۱.۲.۱ (فضای نرم دار R^n). *اگر $x = (x_{\text{۱}}, \cdots, x_n) \in R^n$ باشد، آنگاه*

$$\|x\|_\infty = \max_{\text{۱} \leq i \leq n} |x_i|$$

و

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=\text{۱}}^{n} |x_i|^p \right)^{\text{۱}/p}$$

نرم‌های برداری هستند که در شرایط $(i), (ii), (iii)$ صدق می‌کنند.

مثال ۲.۲.۱. *فرض کنید $M(n,m)$ مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times m$ روی R باشد. نرم ماتریس یک تابع از فضای $M(n,m)$ به اعداد حقیقی نامنفی است ، یعنی*

$$\|.\|_M : M(n,m) \longrightarrow R^+ \cup \{\circ\}$$

و در شرایط تعریف ۳.۲.۱ برای ماتریس‌ها صدق می‌کند. در حالت خاص اگر $A \in M(n,n)$ و $x = (x_{\text{۱}}, \cdots, x_n) \in R^n$ باشد، آنگاه

$$\|A\|_M = \sup_{x \in R^n, x \neq \circ} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad \text{(نرم وابسته(تبعی))}$$

یا

$$\|A\|_F = \left(\sum_{j=\text{۱}}^{n} \sum_{i=\text{۱}}^{n} |a_{ij}|^{\text{۲}} \right)^{\text{۱}/\text{۲}} \qquad \text{(نرم فربینیوس)}$$

نرم‌های ماتریسی هستند.

تعریف ۴.۲.۱. فضای خطی نرم دار کامل (یعنی هر دنباله کشی در آن همگرا است) با متری که توسط نرم تعریف شده، **فضای باناخ** نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فضای لبگ (که یک فضای باناخ است) توسط $L^p(\Omega, R^n)$ یا $L^p(\Omega.\mathcal{F}, P)$ و با نرم

$$\|X\|_{L^p} := \left(\int_\Omega \|X(w)\|^p_{R^n} dP(w)\right)^{\frac{1}{p}}; \qquad \left(\|X\|_{L^p} = \left(E\left[\|X\|^p_{R^n}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

برای $p \in (\circ, \infty)$ و $X \in L^p(\Omega, R^n)$ (که X در تعریف ۴.۱.۱ صدق می‌کند) ، تعریف می‌شود.

طبق خاصیت خطی سوپریمم، به ازای هر $X, Y \in L^p(\Omega, R^n)$ و ثابت‌های اسکالر α و β داریم:

(i) $\alpha X + \beta Y \in L^p(\Omega, R^n)$ لذا خواهیم داشت:

$$\int_F (\alpha X + \beta Y) dP = \alpha \int_F X dP + \beta \int_F Y dP$$

(ii) اگر برای هر $w \in F$، $X(w) \leq Y(w)$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_F X dP \leq \int_F Y dP$$

(ii) و برای هر زیرمجموعه‌های مجزای $A, B \in \mathcal{F}$ می‌توان به راحتی بدست آورد:

$$\int_{A \cup B} X dP = \int_A X dP + \int_B X dP$$

همچنین داریم:

$$\left\| \int_F Y dP \right\|_{R^n} \leq \int_F \|Y\|_{R^n} dP$$

۳.۱ مشتق فرشه $(Frechet)$

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید S و V فضاهای باناخ باشند، د ر این صورت مشتق تابع $f : S \longrightarrow V$ در $x \in U \subseteq S$ و در جهت $h \in S$ با نماد $f'(x; h)$ نشان می‌دهند و توسط رابطه زیر تعریف می‌شود :

$$f'(x; h) = \lim_{t \to \circ} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}, \qquad (۱.۱)$$

مشروط به این که حد موجود باشد.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید S و V فضاهای باناخ و $U \subseteq S$ زیرمجموعهٔ باز S می‌باشد ، تابع $f : U \longrightarrow V$ در $x \in U$ مشتق پذیر فرشه نامیده می‌شود، اگر تبدیل خطی کراندار $T_x : S \longrightarrow V$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{k \to \circ} \frac{f(x+k) - f(x) - T_x(k)}{\|k\|_S} = \circ \qquad (۲.۱)$$

به عبارت دیگر

$$f(x+k) - f(x) - T_x(k) = o(\|k\|_S) \qquad (۳.۱)$$

اگر حد برای تمامی دنباله‌های $\{k_n\}_{n=۱}^{\infty}$ با جملات غیر صفر در S که به بردار صفر $(k_n \to \circ)$ همگرا هستند، وجود داشته باشد، می‌نویسیم $Df(x) = T_x$ و آن را مشتق فرشه f در x می‌نامند. توجه کنید که $Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(S,V)$ می‌باشد و لذا برای مشتق مرتبه دوم فرشه خواهیم داشت:

$$D^{۲}f : U \longrightarrow \mathcal{L}(S, \mathcal{L}(S,V))$$

اگر در رابطه (۳.۱) قرار دهیم $k = th$ خواهیم داشت:

$$f(x+th) - f(x) = T_x(th) + o(\|th\|_S)$$

از طرفی چون $T_x(th) = tT_x(h)$ و $o(\|th\|_S) = o(|t|\|h\|_S) = o(\|h\|_S)$ لذا داریم:

$$f(x+th) - f(x) = tT_x(h) + o(\|th\|_S)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T_x(h) + \frac{o(\|h\|_S)}{t} \qquad (۴.۱)$$

در صورتی که $f'(x;h)$ موجود باشد، با حد گرفتن از رابطه (۴.۱) نتیجه می‌شود:

$$f'(x;h) = T_x(h) \qquad (۵.۱)$$

مثال ۱.۳.۱. *فرض کنید $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R$، $a \in S$ و $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ بردار دلخواه از R^n باشد، آنگاه طبق تعریف ۱.۳.۱ می‌توان نوشت:*

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) y_k = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big).y$$

لذا از رابطه (۵.۱) خواهیم داشت:

$$Df(a)(y) = T_a(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) y_k = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big).y$$

مثال ۲.۳.۱. *فرض کنید $f : S \subseteq R^n \longrightarrow R^m$، $a \in S$ و $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ بردار دلخواه از R^n باشد، آنگاه طبق تعریف ۱.۳.۱ می‌توان نوشت:*

$$f'(a; y) = \big(f_1'(a; y), \cdots, f_m'(a; y)\big) = \sum_{k=1}^{m} f_k'(a; y) e_k$$

که $f = (f_1, \cdots, f_m)$ و e_k امین k برداریکهٔ مختصات است، لذا از رابطه (۵.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Df(a)(y) = T_a(y) &= \big(f_1'(a; y), \cdots, f_m'(a; y)\big) = \sum_{k=1}^{m} f_k'(a; y) e_k, \\ &= \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot y e_k. \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

توجه کنید که به ازای $k = 1, 2, \cdots, m$، $\nabla f_k = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_k}{\partial x_n}\right)$ می‌باشد.

۴.۱ فرآیند تصادفی

تعریف ۱.۴.۱. تابع اندازه پذیر $X : \Omega \longrightarrow R^n$ را یک متغیر تصادفی می‌نامند.

تعریف ۲.۴.۱. هر متغیر تصادفی ، اندازه احتمال μ_X روی R^n القاء می‌کند و توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_X(U) = P(X^{-1}(U))$$

که μ_X را توزیع X می‌گویند. ($U \subset R^n$ و U یک مجموعه بورل در R^n می‌باشد.)

تعریف ۳.۴.۱. اگر $\int_{\Omega} |X(w)|dP(w) < \infty$ باشد، آنگاه عدد

$$E[X] := \int_{\Omega} X(w)dP(w) = \int_{R^n} x d\mu_X(x)$$

را امید ریاضی X می‌گویند.

به طور کلی اگر $f : \Omega \longrightarrow R^n$ بورل اندازه پذیر (یعنی هر نگاشت پیوسته Ω یا $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ برای هر U مجموعه باز در R^n) و $\int_{\Omega} |f(X(w))|dP(w) < \infty$ باشد، آنگاه داریم :

$$E[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(w))dP(w) = \int_{R^n} f(x)d\mu_X(x)$$

چون این انتگرال‌ها لبگ هستند ، طبق خصوصیات انتگرال‌های لبگ برای هر $X, Y \in L^p(\Omega, R^n)$ و ثابت‌های اسکالر α و β خواهیم داشت:

(i) $\alpha X + \beta Y \in L^p(\Omega, R^n)$ لذا

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$$

(ii) اگر $X \leq Y$ باشد، آنگاه

$$E[X] \leq E[Y]$$

(iii) و همچنین

$$\left\| E[Y] \right\|_{R^n} \leq E\Big[\|Y\|_{R^n} \Big]$$

لم ۱.۴.۱. *فرض کنید P اندازه مثبت روی σ-جبر $\mathcal{F}$ در مجموعه Ω باشد به طوری که $P(\Omega) =$ ۱ ، اگر $f \in L_1(P)$ و برای هر $x \in \Omega$ ، $a < f(x) < b$ و g یک تابع محدب روی بازه (a, b) باشد، آنگاه*

$$g\Big(\int_{\Omega} f dP \Big) \leq \int_{\Omega} (gof) dP \tag{۷.۱}$$

طبق نامساوی (۷.۱) برای متغیر تصادفی X و تابع پیوسته g داریم:

$$g\Big(E[X] \Big) \leq E\Big[g(X) \Big]$$

حال اگر $g(x) = \|x\|$ باشد، آنگاه

$$\Big\| E[X] \Big\| \leq E\Big[\|X\| \Big] \tag{۸.۱}$$

قضیه ۱.۴.۱. در نظر بگیرید $1 < p < \infty$ و $q > 0$ به طوری که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ و $(\Omega, \mathcal{F})$ فضای اندازه پذیر با اندازه P و X و Y توابع اندازه پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ باشند، آنگاه

$$\int_\Omega XY dP \leq \Big(\int_\Omega X^p dP \Big)^{1/p} \Big(\int_\Omega Y^q dP \Big)^{1/q} \qquad (Holder) \tag{۹.۱}$$

و

$$\Big(\int_\Omega (X+Y)^p dP \Big)^{1/p} \leq \Big(\int_\Omega X^p dP \Big)^{1/p} + \Big(\int_\Omega Y^p dP \Big)^{1/p} \qquad (minkowsky) \tag{۱۰.۱}$$

اگر $p = q = 2$ باشد، نامساوی هولدر به نامساوی کشی شوارتز معروف است.

لذا طبق قضیه ۱.۴.۱ داریم:

$$E[XY] \leq \Big(E[X^p] \Big)^{1/p} \Big(E[Y^q] \Big)^{1/q}$$

و

$$\Big(E[(X+Y)^p] \Big)^{1/p} \leq \Big(E[X^p] \Big)^{1/p} + \Big(E[Y^q] \Big)^{1/q}$$

تعریف ۴.۴.۱. خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی $X = \{X_t(w) : t \in T, w \in \Omega\}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را که مقادیری در یک فضای اندازه‌پذیر (R^n) می‌باشند، **فرآیند تصادفی** می گویند.

فضای پارامتر T معمولاً نیم خط $[0, \infty)$ می‌باشد، اما ممکن است بازه $[a, b]$ ، اعداد صحیح نامنفی و حتی زیرمجموعه‌های از R^n برای $n \geq 1$ باشد. توجه کنید که برای هر $t \in T$ ثابت، یک متغیر تصادفی خواهیم داشت یعنی

$$w \longrightarrow X_t(w) \quad ; \quad w \in \Omega$$

و از طرفی برای $w \in \Omega$ ثابت، تابع زیر را خواهیم داشت

$$t \longrightarrow X_t(w) \quad ; \quad t \in T$$

که آن را مسیر X_t می‌گویند.
گاهی اوقات به جای $X(t,w)$ از $X_t(w)$ استفاده می‌کنیم. لذا ممکن است فرآیند را به صورت یک تابع دو متغیره به صورت:

$$(t,w) \longrightarrow X(t,w)$$

که از $T \times \Omega$ به R^n است، در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۴.۵. فرآیند تصادفی $\{X_t(w) : t \geq 0, w \in \Omega\}$ دارای **نموهای مستقل** است ، هرگاه به‌ازای هر $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ متغیرهای تصادفی

$$X(0) \quad , \quad X(t_1) - X(0) \quad , \quad X(t_2) - X(t_1) \quad , \quad \dots \quad , \quad X(t_n) - X(t_{n-1})$$

مستقل باشند.

تعریف ۱.۴.۶. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال اندازه‌پذیر باشد، خانواده ای از σ-جبرهای $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ را **فیلتر** می‌گویند، هرگاه به ازای هر $0 \leq s \leq t < \infty$ داشته باشیم :

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$$

لذا چهارتایی $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ را **پایه تصادفی** می‌گویند.

تعریف ۱.۴.۷. فرض کنید $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ ، (که $X_t : \Omega \longrightarrow R^n$ و $T = [0, \infty)$) فرآیند تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک فیلتر باشد، تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

- فرآیند تصادفی X **اندازه پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه تابع $(t,w) \longrightarrow X_t(w)$ از $T \times \Omega$ به R^n نسبت به $\mathcal{B}(T) \times \mathcal{F}$ اندازه پذیر باشد.

- فرآیند تصادفی X را **اندازه‌پذیر تدریجی** نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ می‌گویند، هرگاه برای هر $N \geq 0$، تابع $(t,w) \longrightarrow X(t,w)$ از $[0,N] \times \Omega$ به R^n نسبت به $\mathcal{B}([0,N]) \times \mathcal{F}_N$ اندازه‌پذیر باشد.

- فرآیند تصادفی X نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ **سازگار** می‌گویند هرگاه برای هر $t \geq \circ$ متغیر تصادفی X_t ، $\mathcal{F}_t$-اندازه‌پذیر باشد.

- فرآیند تصادفی X در $t_\circ \in [\circ, N)$ بطور **تصادفی پیوسته** است هرگاه

$$\forall \varepsilon > \circ \quad , \quad \forall \delta > \circ \quad , \quad \exists \rho > \circ \quad s.t$$

$$P\{\|X_t - X_{t_\circ}\|_S \geq \varepsilon\} \leq \delta, \quad \forall t \in [t_\circ - \rho, t_\circ + \rho] \cap [\circ, N)$$

(S فضای باناخ می باشد)

- فرآیند تصادفی X **پیوسته** است هرگاه مسیر $X(.,w)$ قریب به یقین پیوسته باشد.

- فرآیند تصادفی X را **ایستا** گویند هرگاه X_t و X_{t+h} برای هر $h \geq \circ$ دارای توزیع یکسان باشند.

تعریف ۸.۴.۱. در بسیاری مواقع دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ به متغیر تصادفی X میل می‌کنند، چندین روش برای بررسی همگرایی تعریف کرده‌اند که یکی از آن‌ها همگرایی مربع میانگین است:

اگر $E(X^2) < \infty$ و برای $n = 1, 2, 3, \cdots$ داشته باشیم $E(X_n^2) < \infty$ آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\|X_n - X\|^2\Big] = \circ$$

تعریف ۹.۴.۱. احتمال شرطی را برای $A, B \in \mathcal{F}$ به صورت

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تعریف می‌شود مشروط به این که $P(B) > \circ$ می‌باشد.

تعریف ۱۰.۴.۱. اگر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال، $\mathcal{U}$ یک σ-جبر و $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ و $X : \Omega \longrightarrow R^n$ متغیر تصادفی انتگرال پذیر باشد. امید شرطی $E[X|B]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

- فرض می‌کنیم فضای احتمال جدید از B با اندازه $\tilde{P} = \frac{P}{P(B)}$ داشته باشیم ، لذا اگر $P(B) > \circ$ باشد: