دانشگاه خوارزمی
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (جبر)

عنوان

زیرمدول‌های شبه اول و توپولوژی زاریسکی گسترش‌یافته

تدوین

زینب امیری

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری زاده

آذر ۱۳۹۲

به نام خدا

تقدیم به همسر عزیزم

که حضورش در زندگیم

امید بودن، سایه آرامش و شور عشق

را آفرید.

و تقدیم به همه ی اساتید بزرگوارم

که به من علم و دانایی آموختند.

سپاس‌گزاری

زینب امیری

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابه‌جایی و دارای عضو همانی ناصفر و M یک $R-$ مدول است. در این پایان‌نامه مفهوم زیرمدول‌های شبه اول M و توپولوژی زاریسکی گسترش یافته روی گردایه زیرمدول‌های مذکور معرفی شده است. همچنین رابطه بین خاصیت‌های جبری و توپولوژیک $q\,\mathrm{Spec}(M)$ (مجموعه زیر مدول‌های شبه اول M) بررسی شده است. علاوه بر این مدول‌هایی که توپولوژیکی زاریسکی گسترش یافته آنها $T_{\circ}$، تحویل‌ناپذیر و یا نوتری است مورد مطالعه قرار می‌گیرند و مشخص‌سازی‌های متعددی از مدول‌های مذکور ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: حلقه‌های حسابی، زیر مدول شبه اول، مدول شبه اول‌دار، مدول شبه اول نشانده شده، توپولوژی زاریسکی گسترش یافته، مدول تاپ.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۱۰): 13C99, 13C13, 13F99, 13E05, 13C05, 13A15

مقدمه

زیرمدول‌های اول مدول‌ها بعنوان تعمیم ایده‌ال‌های اول حلقه توسط جی.داونس[۱] [13] معرفی شده‌اند و متخصصین جبر متعددی درباره‌ی طیف زیرمدول‌های اول مطالعه کرده‌اند، (به عنوان مثال [17]، [20]، [26]، [25]، [19]، [24]، [22]، [27]).

در این پایان‌نامه، زیرمدول‌های شبه اول M به‌عنوان تعمیمی از زیرمدول‌های اول معرفی می‌شوند، همچنین مدول‌های شبه اول دار بررسی می‌شوند و خاصیت‌های توپولوژیک $q\,\mathrm{Spec}(M)$ (مجموعه زیرمدول‌های شبه اول M) نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

توپولوژی زاریسکی روی طیف ایده‌آل‌های اول یک حلقه ابزار مهمی در هندسه جبری است تعمیم‌های متفاوتی برای توپولوژی زاریسکی از حلقه‌ها به مدول‌ها وجود دارد. ([25]، [9]، [10]، [20]). در این پایان‌نامه، توپولوژی زاریسکی گسترش یافته را برای $q\,\mathrm{Spec}(M)$ مطالعه می‌کنیم (مانند تعمیم توپولوژی زاریسکی مطرح شده در [20]) که در آن M یک $R-$ مدول است همچنین می‌دانیم توپولوژی زاریسکی روی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های اول یک مدول تعریف شده است؛ اکنون توپولوژی زاریسکی گسترش یافته روی مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های شبه اول از یک مدول را مطرح می‌کنیم.

در سراسر این پایان‌نامه، همه‌ی حلقه‌ها جابه‌جایی و با عضو همانی و همه‌ی مدول‌ها یکانی هستند. فصل ۱ به معرفی قضایا و مفاهیم مقدماتی اختصاص داده شده است که ابزاری برای کار در فصل‌های بعدی است.

در فصل ۲ برخی از خواص زیرمدول‌های شبه اول را به دست می‌آوریم، و رابطه‌ی بین زیرمدول‌های شبه اول یک مدول مانند M و زیرمدول‌های شبه اول حاصل از موضعی سازی M را مطالعه می‌کنیم. همچنین مدول‌های شبه اول دار را بررسی می‌کنیم و آنها را برای گسترش خواص توپولوژیکی $q\,\mathrm{Spec}(M)$ به کار می‌بریم.

در قضیه ۷.۲.۲ نشان می‌دهیم که $R-$ مدول M شبه اول دار است هرگاه R یک حوزه‌ی ایده‌آل اصلی و M متناهیاً تولید شده، یا R لسکرین و M یک $R-$ مدول موضعاً آزاد باشد. همچنین برخی خواص مهم مدول‌های شبه اول دار را در گزاره‌ی ۹.۲.۲ و مدول‌های شبه اول نشانده شده را در قضیه ۴.۳.۲ مطالعه می‌کنیم. و

[۱] J. Dauns

نشان می‌دهیم که اگر R یک حوزه‌ی نوتری یک بعدی باشد آنگاه $R-$ مدول M در هر یک از موارد زیر تاپ است: (۱) M ضربی ضعیف باشد و (۲) برای هر ایده‌آل اول $P \in \mathrm{Spec}(R)$، $|\mathrm{Spec}_P(M)| \leq 1$ و $S_{(0)}(0) \subseteq \mathrm{rad}(0)$.

در فصل ۳ یک توپولوژی روی مجموعه‌ی زیرمدول‌های شبه اول معرفی می‌کنیم به گونه‌ای که توپولوژی زاریسکی ([20] را ببینید) زیر فضایی از این توپولوژی است و خواص مربوط به آن را به ما می‌دهد. همچنین مدول‌هایی که توپولوژی زاریسکی گسترش یافته آنها T_0، تحویل‌ناپذیر و یا نوتری است در این فصل مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌ی زیر تدوین شده است.

[1] A. Abbasi and D. Hassanzadeh-lelekaami, Quasi-prime Submodules and Developed Zariski Topology, Algebra coll. (Specl), (2012), 1089-1108.

فهرست مطالب

فهرست مطالب ث

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۱.۱ مقدمه‌ای بر جبر جابه‌جایی ۱

۲.۱ حلقه و مدول کسرها ۹

۳.۱ مدول‌های یکدست، تصویری و انژکتیو ۱۲

۴.۱ زیر مدول‌های اول واولیه ۱۴

۵.۱ توپولوژی زاریسکی و ویژگی‌های آن ۱۹

۲ برخی خواص زیرمدول‌های شبه‌اول ۲۱

۱.۲ زیرمدول‌های شبه‌اول ۲۱

۲.۲ زیرمدول‌های شبه‌اول دار ۲۷

۳.۲ زیرمدول‌های شبه‌اول نشانده‌شده ۳۳

۳ برخی از خواص توپولوژیکی $q\,\mathrm{Spec}(M)$ ۴۱

۱.۳ توپولوژی زاریسکی گسترش یافته ۴۱

۲.۳ فضای توپولوژیک $T_\circ$ و فضای توپولوژیک T_1 ۴۷

۳.۳ فضای توپولوژیک تحویل ناپذیر ۵۱

۴.۳ فضای توپولوژیک نوتری ۵۹

کتاب‌نامه ۶۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۶۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۱

نمایه **۷۴**

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در سراسر این پایان‌نامه از نمادهای $\mathrm{Spec}(R)$ و $\mathrm{Max}(R)$ به ترتیب برای نمایش مجموعه ایده‌آل‌های اول و مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R استفاده می‌شود.

۱.۱ مقدمه‌ای بر جبر جابه‌جایی

تعریف ۱.۱.۱. *[32, 48.3,52.3] فرض کنید I یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت واریته‌ی I را با نماد $V(I)$ یا $\mathrm{Var}(I)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند*

$$V(I) := \{P : P \in \mathrm{Spec}(R), P \supseteq I\}.$$

عضوهای مینیمال $\mathrm{Var}(I)$ را ایده‌آل‌های اول مینیمال I می‌نامند و مجموعه‌ی ایده‌ال‌های اول مینیمال I را با $\mathrm{Min}(I)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. *[32, 2.5] فرض کنید I ایده‌الی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت رادیکال I را با نماد $\sqrt{I}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند.*

$$\sqrt{I} := \{r \in R : r^n \in I \text{ عددی چون } n \in N \text{ وجود داشته باشد به طوری که } \}$$

$\sqrt{O_R}$ را که از عضوهای پوچ توان R تشکیل شده است، رادیکال پوچ R می‌نامند.

لم ۳.۱.۱. *[32, 3.42] فرض کنید I ایده‌الی از حلقه‌ی R باشد، در این صورت $\sqrt{I} = \bigcap_{P\in\mathrm{Var}(I)} P$. ایده‌ال $\sqrt{I}$ که آن را با $\mathrm{rad}(I)$ نیز نمایش می‌دهند یک ایده‌آل رادیکال نامیده می‌شود.*

تعریف ۴.۱.۱. *[32, 3.16] رادیکال جیکبسن R را اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنند و آن را با نماد $J(R)$ یا $\mathrm{Jac}(R)$ نمایش می‌دهند.*

تعریف ۵.۱.۱. *[32, 2.31] فرض کنید I و J ایده‌آل‌های حلقه‌ی R باشند. خارج قسمت $(I :_R J)$ به صورت*

$$(I :_R J) = \{a \in R; aJ \subseteq I\}$$

تعریف می‌شود واضح است که $I \subseteq (I :_R J)$. در حالت خاص، اگر $I = 0$ باشد، $(0 :_R J)$ را پوچساز J می‌نامند و آن را با نماد $\mathrm{Ann}_R J$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۶.۱.۱. *[32, 6.16] فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی R باشد. فرض کنید G یک زیر مدول M باشد و $J \subseteq M$ و $J \neq \phi$. ایده‌آل*

$$\{r \in R : rj \in G, \text{برای هر } j \in J\}$$

از R را با نماد $(G :_R J)$ نمایش می‌دهند. در حالت خاص، اگر $G = 0$ باشد، ایده‌ال $(0 :_R J)$ را پوچساز J می‌نامند و آن را با نماد $\mathrm{Ann}_R J$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۷.۱.۱. *[32, 18.13] فرض کنید M یک مدول روی حلقه‌ی R باشد. در این صورت M را با وفا می‌نامند اگر $\mathrm{Ann}_R M = 0$ باشد.*

ملاحظه ۸.۱.۱. *[32, 6.19] (تغییر حلقه) فرض کنید M یک مدول روی حلقه‌ی R و I ایده‌آلی از R باشد به طوری که $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$. در این صورت M با عمل ضرب اسکالر زیر به $\frac{R}{I}-$ مدول تبدیل می‌شود. برای هر $r \in R$ و $m \in M$،*

$$(r + I).m := rm$$

تعریف ۹.۱.۱. *[32, 8.26] حلقه‌ی جابه‌جایی و نوتری R را موضعی می‌نامند هرگاه تنها یک ایده‌آل ماکسیمال مانند $\underline{m}$ داشته باشد. در این صورت $k = \frac{R}{\underline{m}}$ میدان مانده‌ای یا خارج قسمتی R نامیده می‌شود.*

ملاحظه ۱۰.۱.۱. *[32, 6.6] فرض کنید $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای و M یک $S-$ مدول باشد در این صورت M با ضرب اسکالر زیر یک $R-$ مدول است. برای هر $r \in R$ و $m \in M$*

$$r.m := f(r)m$$

تعریف ۱۱.۱.۱. *[32, 36.2] دامنه ی صحیح R را دامنه‌ی ایده‌ال اصلی (به اختصار PID) می‌نامیم اگر هر ایده‌آل R اصلی باشد.*

تعریف ۱.۱.۱۲. *[32, 38.1] فرض کنید R دامنه‌ی صحیح باشد. عضو $p \in R$ را عضو تحویل ناپذیر R گوییم اگر گزاره‌های زیر برقرار باشند*

۱. *$p \neq 0$ و p وارون‌پذیر نباشد.*

۲. *هرگاه p به‌صورت $p = ab$ که $a, b \in R$ نوشته شود آن‌گاه یا a یا b یک عضو وارون‌پذیر R باشند.*

تعریف ۱.۱.۱۳. *[32, 53.6,51.6] فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی R باشد. یک پایه برای M خانواده‌ای چون $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ از عضوهای M است که*

۱. *$\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ مدول M را تولید کند؛ و*

۲. *هر $m \in M$ به طور یکتا به صورت $m = \sum_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda e_\lambda$ قابل نمایش باشد که در آن به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $r_\lambda \in R$ و تنها تعدادی متناهی از r_λها ناصفرند.*

$R-$ مدول M را آزاد می‌گوییم اگر پایه داشته باشد.

توجه کنید که R خودش $R-$ مدول آزاد با پایه‌ی متشکل از عضو 1_R است.

اگر M مدول آزاد با پایه‌ی $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ باشد آن‌گاه $M \cong \oplus_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$، که در آن به ازای هر $r \in R$، $R_\lambda = R$.

لم ۱.۱.۱۴. *اگر F مدولی آزاد روی حلقه‌ی R و I ایده‌آلی از R باشد، خواهیم داشت $(IF : F) = I$.*

برهان. به وضوح داریم $I \subseteq (IF : F)$، اکنون فرض کنیم $r \in (IF : F)$ در این صورت به ازای هر $x \in F$ داریم $rx \in IF$. فرض کنیم $\{x_i\}_{i \in \Lambda}$ یک پایه‌ی F باشد از آنجا به ازای هر $i \in \Lambda$ داریم $rx_i \in IF$، در نتیجه بازای هر $i \in \Lambda$ داریم $rx_i = \sum_{j \in \Lambda} e_j x_j$ که در آن برای هر $j \in \Lambda$، e_j عضو I است. حال اگر در مجموع سمت راست x_i داشته باشیم می‌توان نوشت

$$(r - e_i)x_i = rx_i - e_i x_i = \sum_{\substack{j \in \Lambda \\ j \neq i}} e_j x_j$$

که نتیجه می‌شود

$$(r - e_i)x_i - \sum_{\substack{j \in \Lambda \\ j \neq i}} e_j x_j = 0$$

و بنابر خواص پایه $(r - e_i) = 0$ و لذا $r = e_i$ که از آنجا $r \in I$ اما اگر در مجموع سمت راست x_i نداشته باشیم می‌توان نوشت $rx_i - \sum_{j \neq i} e_j x_j = 0$ که از آنجا نتیجه می‌شود $r = 0$ و لذا بازهم $r \in I$. بنابراین ثابت شد که $(IF : F) \subseteq I$ و در نتیجه $(IF : F) = I$. □

لم ۱.۱.۱۵. [32, 18.6] *فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی R و N زیر مدولی از M باشد. فرض کنید $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ خانواده‌ای از زیر مدول‌های M باشند. در این صورت داریم*

۱. $(G : \sum_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (G : G_\lambda)$

۲. $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda : N) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (G_\lambda : N)$

تعریف ۱.۱.۱۶. [6, 12, 15] *ایده‌آل سره I از حلقه R را شبه‌اول گوییم اگر برای هر جفت از ایده‌آل‌های A و B از R که $A\cap B\subset I$ داشته باشیم $A\subset I$ یا $B\subset I$.*

لم ۱.۱.۱۷. [32, 55.3] *فرض کنیم P یک ایده‌آل اول از حلقه‌ی R و I_1 و $\cdots$ و I_n ایده‌آل‌هایی از R باشند، در این‌صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:*

۱. *بازای jای که $1\leq j\leq n$، $P\supseteq I_j$.*

۲. $P\supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$

۳. $P\supseteq \prod_{i=1}^{n} I_i$

تعریف ۱.۱.۱۸. [3, 3.14] *فرض کنید I یک ایده‌آل حلقه‌ی R باشد. می‌گوییم I تحویل‌ناپذیر است اگر I سره باشد و برابر اشتراک دو ایده‌آل اکیداً بزرگتر از خودش نباشد.*

نتیجه ۱.۱.۱۹. *بنابر لم ۱.۱.۱۷ و تعریف ۱.۱.۱۸ نتیجه می‌شود که هر ایده‌آل اول یک ایده‌ال شبه اول و هر ایده‌ال شبه اول یک ایده‌آل تحویل ناپذیر است.*

تعریف و بحث ۱.۱.۲۰. [32, 10.1] *فرض کنیم p عددی اول باشد. $\mathbb{Z}-$ مدول $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ را نظر می‌گیریم. برای هر $n\geq 0$ قرار می‌دهیم*

$$G_n = \left\{\mathbb{Z}+\frac{x}{p^n}\ ;\ \ x\in\mathbb{Z}\right\}$$

G_n یک زیر مدول $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ است و دارای p^n عضو می‌باشد. (در واقع G_n یک گروه دوری از مرتبه‌ی p^n است و مولد آن $\mathbb{Z}+\frac{1}{p^n}$ می‌باشد.) توجه شود که $\mathbb{Z}+\frac{x}{p^n}=\mathbb{Z}+\frac{px}{p^{n+1}}$ بنابراین $G_n\subseteq G_{n+1}$ قرار می‌دهیم $G=\bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$. G یک $\mathbb{Z}-$ مدول است و G_nها زیر مدول‌های G می‌باشند. نشان می‌دهیم که تنها زیر مدول‌های سره G همان G_n ها هستند: فرض کنیم $1\leq x\in\mathbb{Z}$ چنان باشد که $(x,p^n)=1$. فرض کنیم H زیر مدولی ناصفر و سره از G باشد به‌طوری‌که $\mathbb{Z}+\frac{x}{p^n}\in H$، $y,y'\in\mathbb{Z}$ موجود هستند که $yp^n+y'x=1$

بنابراین خواهیم داشت

$$\mathbb{Z}+\frac{۱}{p^n}=\mathbb{Z}+\frac{yp^n+y'x}{p^n}=(\mathbb{Z}+y)+\left(\mathbb{Z}+y'\frac{x}{p^n}\right)=y'\left(\mathbb{Z}+\frac{x}{p^n}\right)\in H$$

لذا برای هر $r\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$\mathbb{Z}+\frac{r}{p^n}=r\left(\mathbb{Z}+\frac{۱}{p^n}\right)\in H$$

در نتیجه $G\subseteq H$. فرض کنیم

$$t=\operatorname{Max}\left\{m;\exists x\in\mathbb{Z};\mathbb{Z}+\frac{x}{p^m}\in H,\ (x,p^m)=۱\right\}$$

(توجه شود که t نمی‌تواند بی‌نهایت شود زیرا در این صورت همه‌ی G_nها زیر مجموعه‌ی H می‌شوند و لذا اجتماع آنها هم زیر مجموعه‌ی H می‌شود که از آنجا $H=G$ بدست می‌آید که تناقض است زیرا ما H را زیر مدولی سره از G در نظر گرفته‌ایم).

در نتیجه $x'\in\mathbb{Z}$ موجود است که $(x',p^t)=۱$ و $\mathbb{Z}+\dfrac{x'}{p^t}\in H$. در نتیجه $G_t\subseteq H$. فرض کنیم $h\in H$، در این‌صورت $h=\mathbb{Z}+\dfrac{\alpha}{p^l}$ که در آن $\alpha\in\mathbb{Z}$ و می‌توان فرض کرد که $(\alpha,p^l)=۱$ بنابراین l در مجموعه‌ی

$$\left\{m;\mathbb{Z}+\frac{x}{p^m}\in H\ ,\ (p^m,x)=۱ \text{ ی هست که } x\in\mathbb{Z}\right\}$$

قرار دارد لذا $l\leq t$ بنابراین $h=\mathbb{Z}+\dfrac{\alpha}{p^l}\in G_l\subseteq G_t$. پس $H\subseteq G_t$. لذا $H=G_t$ و این یعنی تنها زیر مدول‌های سره G، همان G_n ها هستند.

در کتاب‌های جبر معمولاً G را با علامت $\mathbb{Z}(p^\infty)$ نشان می‌دهند.

G در واقع گروهی نامتناهی است که دوری نیست ولی همه‌ی زیر گروه‌های آن دوری و متناهی‌اند، اکنون بنابر استدلالی که در ادامه خواهیم آورد، اگر L زیر مدول سره‌ای از $\mathbb{Z}_{(p^\infty)}$ باشد آنگاه $\left(L\underset{\mathbb{Z}}{:}\mathbb{Z}_{(p^\infty)}\right)=۰$.

فرض کنیم $r\in\left(L\underset{\mathbb{Z}}{:}\mathbb{Z}_{(p^\infty)}\right)$. اگر $(r,p)=۱$، $(r,p^i)=۱$ و اعضای a,b از N چنان موجودند که داریم $ar+bp^i=۱$ اکنون می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{p^i}+\mathbb{Z}=\frac{ar+bp^i}{p^i}+\mathbb{Z}=\frac{ar}{p^i}+\mathbb{Z}=r\left(\frac{a}{p^i}+\mathbb{Z}\right)\in r\mathbb{Z}_{(p^\infty)}$$

و لذا در این حالت داریم $r\mathbb{Z}_{(p^\infty)}=\mathbb{Z}_{(p^\infty)}$. اما اگر $(r,p)\neq ۱$ از آنجا که p اول است خواهیم داشت $p|r$ و در نتیجه $l\in N$ و $x\in\mathbb{Z}$ وجود دارد که $r=p^lx$، به‌طوری‌که $(x,p)=۱$، در این‌صورت

$$r\mathbb{Z}_{(p^\infty)}=p^lx\mathbb{Z}_{(p^\infty)}=p^l\mathbb{Z}_{(p^\infty)}=\mathbb{Z}_{(p^\infty)}.$$

نتیجه می‌شود $\mathbb{Z}_{(p^\infty)} = r\mathbb{Z}_{(p^\infty)}$. بنابراین برای هر زیر مدول L از $\mathbb{Z}_{(p^\infty)}$ بازای هر $r \neq 0$، $r\mathbb{Z}_{(p^\infty)} =$ $L \not\subset \mathbb{Z}_{(p^\infty)}$ مگر در حالتی که $r = 0$ لذا $\left(L \underset{\mathbb{Z}}{:} \mathbb{Z}_{(p^\infty)}\right) = 0$.

تعریف ۲۱.۱.۱. *حلقه‌ی R را سریال گوییم اگر مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌ال‌های R، بطور خطی مرتب باشند. (یادآوری می‌کنیم که یک ترتیب جزئی (انعاسی، تعدی، پاردتقارنی) که هر دو عضوش قابل مقایسه باشند را یک ترتیب خطی گویند).*

تعریف ۲۲.۱.۱. *[16] حلقه‌ی R را حسابی گویند اگر برای هر ایده‌ال ماکسیمال P از R، R_P یک حلقه‌ی سریال باشد.*

تعریف ۲۳.۱.۱. *$R-$ مدول M را لسکرین گویند اگر هر زیر مدول سره از M یک تجزیه‌ی اولیه داشته باشد. همچنین یادآوری می‌کنیم که هر مدول نوتری، لسکرین است.*

ملاحظه ۲۴.۱.۱. *[6, 15, 16] فرض کنیم I ایده‌الی از حلقه‌ی R و S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. در این‌صورت*

۱. *اگر I شبه اول باشد آنگاه I تحویل‌ناپذیر است.*

۲. *اگر R یک حلقه‌ی لسکرین باشد، آنگاه هر ایده‌ال شبه اول یک ایده‌آل اولیه است.*

۳. *اگر I یک ایده‌آل اول باشد، آنگاه I شبه اول است.*

۴. *هر ایده‌آل سره از یک حلقه‌ی سریال، شبه اول است.*

۵. *اگر IR_s یک ایده‌آل شبه اول از R_s باشد، آنگاه $IR_s \cap R$ یک ایده‌آل شبه اول از R است.*

۶. *اگر I یک ایده‌ال اولیه و شبه اول از R باشد به‌طوری‌که $I \cap S = \phi$، آنگاه IR_s یک ایده‌آل شبه اول از R_s است.*

۷. *اگر R یک حلقه‌ی حسابی باشد، I تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر I شبه اول باشد.*

۸. *در حلقه‌ی حسابی R، هر ایده‌آل اولیه تحویل‌ناپذیر است.*

۹. *اگر R یک دامنه ی ددکیند باشد، آنگاه I شبه اول است اگر فقط اگر I یک ایده‌آل اولیه باشد.*

لم ۲۵.۱.۱. *[32, 11.3] فرض کنید R یک حلقه و $a \in R$، در این صورت a عضو وارون‌پذیر R است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R داشته باشیم $a \notin M$.*

ملاحظه ۲۶.۱.۱. *فرض کنیم M یک $R-$ مدول ساده باشد، در این صورت $0 \neq x \in M$ وجود دارد که $M = Rx$. اکنون تابع $f : R \longrightarrow M$ از $R-$ مدول‌ها را با ضابطه‌ی $f(r) = rx$ در نظر می‌گیریم. f یک هومومورفیسم پوشا از $R-$ مدول‌ها است و داریم $\ker f = \{r \in R;\ rx = 0\} = \mathrm{Ann}(x)$ اکنون بنابر قضیه اول یکریختی داریم $M \cong \dfrac{R}{\mathrm{Ann}(x)}$.*

قضیه ۲۷.۱.۱. *[32, 8.10] هر مدول متناهی مولد M روی دامنه ایده‌آل اصلی R، جمع مستقیمی از زیر مدول‌های دوری است.*

تعریف ۲۸.۱.۱. *[32, 26.8] منظور از حلقه‌ی نیم موضعی حلقه‌ای تعویض‌پذیر و نوتری است که تنها تعدادی متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.*

تعریف ۲۹.۱.۱. *به $R-$ مدول M موضعاً دوری گفته می‌شود اگر بازای هر ایده‌آل اول دلخواه P از R، M_P یک مدول دوری روی حلقه‌ی موضعی R_P باشد.*

قضیه ۳۰.۱.۱. *[14, Theorem 22] مدول‌های ضربی موضعاً دوری هستند. (یادآوری می‌کنیم که Rـمدول M را ضربی گوییم اگر هر زیرمدول N از M را بتوان به‌صورت $N = IM$ نوشت که در آن I ایدآلی از حلقه R است.)*

تعریف ۳۱.۱.۱. *[32, 43.15] دامنه صحیح R که در آن هر ایده‌آل سره، حاصل ضرب تعدادی متناهی ایده‌آل اول باشد را دامنه‌ی ددکیند می‌نامند.*

تعریف ۳۲.۱.۱. *فرض کنیم R یک حوزه‌ی صحیح و M یک $R-$ مدول باشد. اگر بازای هر $m \in M$، $0 \neq r \in R$ ای وجود داشته باشد که $rm = 0$ آنگاه M را یک مدول تابی گویند.*

گزاره ۳۳.۱.۱. *[7, Proposition 5] یک مدول متناهیاً تولید شده ضربی است اگر و تنها اگر موضعاً دوری باشد.*

گزاره ۳۴.۱.۱. *[5, Proposition 2.4] اگر M یک مدول ضربی ضعیف روی یک حوزه‌ی صحیح باشد آنگاه M تابی یا بدون تاب است.*

ملاحظه ۳۵.۱.۱. *[3, Examples 1] هر دامنه ایده‌آل اصلی، یک دامنه‌ی ددکیند است.*

گزاره ۳۶.۱.۱. *[3, Proposition 9.1] فرض کنیم R یک دامنه نوتری با بعد یک باشد. در این صورت هر ایده‌آل ناصفر $\underline{a}$ از R را می‌توان بطور یکتا بصورت حاصل ضربی از ایده‌آل‌های اولیه که رادیکال آن‌ها مجزا است نوشت.*

لم ۳۷.۱.۱. *[32, 17.3] فرض کنید R حلقه باشد و $r \in R$ در این‌صورت $r \in J(R)$ اگر و تنها اگر بازای هر $a \in R$، $۱ - ra$ یک یکال R باشد.*

لم ۳۸.۱.۱. *[32, Lemma 3.3] فرض کنید I ایده‌آل حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت I ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ میدان باشد.*

تعریف ۳۹.۱.۱. *[32, 3.7,35.3] فرض کنید $(V, \leq)$ مجموعه‌ای ناتهی و جزئاً مرتب باشد.*

۱. *می‌گوییم که $(V, \leq)$ در شرط زنجیره‌ی افزایشی صدق می‌کند اگر بازای هر خانواده‌ای از عضوهای V چون $(v_i)_{i \in N}$ با ویژگی*

$$v_۱ \leq v_۲ \leq \cdots \leq v_i \leq v_{i+۱} \leq \cdots$$

عدد $k \in N$ وجود داشته باشد که بازای هر $i \in \mathbb{N}$، $v_k = v_{k+۱}$.

۲. *می‌گوییم که $(V, \leq)$ در شرط زنجیره‌ی کاهشی صدق می‌کند اگر بازای هر خانواده‌ای از اعضای V چون $(v_i)_{i \in N}$ با ویژگی*

$$v_۱ \geq v_۲ \geq v_۳ \geq \cdots \geq v_i \geq v_{i+۱} \geq \cdots$$

عدد $k \in N$ وجود داشته باشد که به ازای هر $i \in N$، $v_k = v_{k+۱}$.

لم ۴۰.۱.۱. *[24, ex 18] حلقه R حسابی است اگر برای ایده‌آل‌های A و B و C از R داشته باشیم $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.*

قضیه ۴۱.۱.۱. *[24, Theorem 6.20] اگر R یک دامنه صحیح نوتری باشد موارد زیر معادل‌اند:*

۱. *R دامنه ددکیند است.*

۲. *اگر A و B و C ایده‌آل‌هایی از R باشند، آنگاه $A \cap (B + C) = A \cap B + A \cap C$.*

نتیجه ۴۲.۱.۱. *[24, Result 6.17] اگر R یک دامنه ددکیند باشد، آنگاه R نوتری است و هر ایده‌آل اول سره از R ماکسیمال است.*

نتیجه ۴۳.۱.۱. *بنابر لم ۴۰.۱.۱ و قضیه ۴۱.۱.۱ و نتیجه ۴۲.۱.۱ نتیجه می‌شود که هر دامنه‌ی ددکیند یک حلقه‌ی حسابی است.*

۲.۱ حلقه و مدول کسرها

تعریف ۱.۲.۱. *[31, p: 189] زیر مجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را یک بسته‌ی ضربی R می‌نامند اگر*

۱. $1_R \in S$ و $0_R \notin S$؛

۲. برای هر $a, b \in S$، $ab \in S$.

تعریف و بحث ۲.۲.۱. *[32, 5.2] فرض کنید S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $(a,s),(b,t) \in R \times S$ می‌نویسیم*

$$(a,s) \sim (b,t)$$

اگر و تنها اگر $u \in S$ی موجود باشد به طوری که $u(ta - sb) = 0$ در این‌صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی $R \times S$ است. برای هر $(a,s) \in R \times S$، رده‌ی هم ارزی شامل (a,s) را با $\frac{a}{s}$ و مجموعه‌ی رده‌های هم ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. $S^{-1}R$ تحت عمل‌های

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta+sb}{st}, \qquad \frac{a}{s}.\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

که در آن $a, b \in R$ و $s, t \in S$، یک حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار است. این حلقه را حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S می‌نامیم. در صورتی که P یک ایده‌آل اول R باشد و $S = R \backslash P$ آنگاه $S^{-1}R$ را با علامت R_P نمایش می‌دهیم.

تعریف و بحث ۳.۲.۱. *[32, 9.4] فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از حلقه‌ی R و M یک $R-$ مدول باشد. رابطه‌ی $\sim$ را روی $M \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای هر $(m,s),(n,t) \in M \times S$ می‌نویسیم*

$$(m,s) \sim (n,t)$$

اگر و تنها اگر $u \in S$ی موجود باشد به‌طوری‌که

$$u(tm - sn) = 0$$

در این‌صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم ارزی روی $M \times S$ است. برای هر $(m,s) \in M \times S$، رده‌ی هم ارزی شامل (m,s) را با $\frac{m}{s}$ و مجموعه‌ی رده‌های هم ارزی $\sim$ را با $S^{-1}M$ نمایش می‌دهیم.

$S^{-1}M$ تحت عمل‌های $\frac{rn}{st} = \frac{r}{s}.\frac{n}{t}$ و $\frac{(tm+sn)}{st} = \frac{n}{t} + \frac{m}{s}$ که در آن $m,n \in N$ و $s,t \in S$ و $r \in R$ یک $S^{-1}R-$ مدول است، $S^{-1}M$ را مدول کسرهای M نسبت به S می‌نامیم. در صورتی‌که P ایده‌آل اول R باشد و $S = R\backslash P$، آنگاه $S^{-1}M$ را با علامت M_P نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. *[32, 9.14] فرض کنیم M یک مدول روی حلقه‌ی R باشد. در این صورت محمل M را با نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند.*

$$\mathrm{Supp}_R(M) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) | M_P \neq \circ\}$$

لم ۵.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. فرض کنیم M یک $R-$ مدول و N زیر مدولی از $M_S = (S^{-1}M)$ باشد، در این صورت*

$$\big((N \cap M) \underset{R}{:} M\big) = \big(N \underset{R_S}{:} M_S\big) \cap R$$

ملاحظه. نگاشت‌های طبیعی $f : M \longrightarrow M_S$ که در آن برای هر $m \in M$ داریم $f(m) = \frac{M}{1}$ و $g : R \longrightarrow R_s$ که در آن برای هر $r \in R$ داریم $g(r) = \frac{r}{1}$ را در نظر می‌گیریم. در این لم منظور از $N \cap M$، $f^{-1}(N)$ و منظور از $(N \underset{R_S}{:} M_S) \cap R$، $g^{-1}\big((N \underset{R_S}{:} M_M)\big)$ است.

برهان. فرض کنیم $r \in \big((N \cap M) \underset{R}{:} M\big)$ در این صورت خواهیم داشت $rM \subseteq N \cap M$ لذا بازای هر $m \in M$ داریم $\frac{rm}{1} \in N$. اما $\frac{r}{1}.\frac{m}{s} = \frac{rm}{s} = \frac{rm}{1}.\frac{1}{s}$ که در آن $\frac{m}{s}$ عضو دلخواهی از M_s است و از آنجا که $\frac{1}{s}$ برای هر $s \in S$ عضو $S^{-1}R$ است نتیجه می‌شود $\frac{r}{1}.\frac{m}{s} \in N$ (توجه شود که N یک $S^{-1}R-$ مدول است) لذا ثابت شد که $\frac{r}{1} \in (N \underset{R_s}{:} M_s)$ و از آنجا $r \in (N \underset{R_s}{:} M_s) \cap R$. لذا $\big((N \cap M) \underset{R}{:} M\big) \subseteq (N \underset{R_s}{:} M_s) \cap R$. اکنون فرض کنیم $r' \in (N \underset{R_s}{:} M_s) \cap R$ در این صورت طبق تعریف $\frac{r'}{1} \in (N \underset{R_s}{:} M_s)$ خواهد بود و از آنجا $\frac{r'x}{1} = \frac{r'}{1}.\frac{x}{1} \in N$ و لذا $r'x \in N \cap M$ برای هر x دلخواه عضو M. در نتیجه $r'M \subseteq N \cap M$ و لذا $r' \in (N \cap M \underset{R}{:} M)$ که نتیجه می‌دهد $\big(N \cap M\big) \underset{R}{:} M\big) \supseteq (N \underset{R_s}{:} M_s) \cap R$. لذا حکم برقرار است. □

لم و تعریف ۶.۲.۱. *[32, 41.2] فرض کنید R و S حلقه و $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای باشد.*

۱. *هرگاه J یک ایده‌آل S باشد، آنگاه $f^{-1}(J) := \{r \in R;\ f(r) \in J\}$ ایده‌آلی از R است که آن را حاصل تحدید J نسبت به (یا تحت) همریختی حلقه‌ای $f : R \longrightarrow S$ می‌نامیم. اگر احتمال این اشتباه نباشد که کدام همریختی حلقه‌ای مورد بحث است، $f^{-1}(J)$ را اغلب با J^c نمایش می‌دهیم.*