دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک

گرایش اخترفیزیک و نجوم رصدی

عنوان

حل منحنی نوری سیستم ستاره دوتایی گرفتی EG Cephei به روش Phoebe 0.32

استاد راهنما

آقای دکتر بهرام خالصه

نگارش

هنگامه هاشمی قوچانی

تیرماه ۱۳۹۱

به نام خدایی که در این نزدیکی است

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: طبقه‌بندی ستاره‌های دوتایی

۱-۱ انواع ستاره‌های دوتایی ۲

۱-۱-۱ دوتایی نوری: ۲

۱- ۱-۲ دوتایی مرئی : ۲

۱- ۱-۳ دوتایی اختر سنجی: ۳

۱- ۱-۴ دوتایی طیفی : ۳

۱- ۱-۵ دوتایی طیف سنجی: ۳

۱- ۱-۶ دوتایی گرفتی: ۵

۱-۲ منحنی نوری و طبقه بندی ستاره‌های دوتایی ۸

۱- ۲-۱ منحنی‌های نوری نوع الگول ۹

۱- ۲-۲ منحنی‌های نوری نوع شلیاق(بتالیرا) ۱۰

۱- ۲-۳ منحنی‌های نوری نوع دبلیو دب اکبر(.WUMa) ۱۰

۱-۳ لوب روچ و طبقه بندی ستاره‌های دوتایی گرفتی ۱۲

۱- ۳-۱ لوب روچ، حد روچ ۱۲

۱- ۳-۲ نقاط لاگرانژی و انتقال جرم ۱۶

۱- ۳-۳ رده بندی کوپال بر اساس لوب روچ: ۱۹

فصل دوم: عوامل موثر بر منحنی نوری

۲-۱ تاریکی لبه ۲۶

۲-۲ تاریکی گرانشی ۲۷

۲-۳ اثر بازتاب ۲۹
۲-۴ لکه‌های ستاره‌ای ۳۰
۲-۵ نسبت جرمی ۳۰
۲-۶ پارامترهای مداری ۳۱
۲-۶-۱ خروج از مرکز مداری و نسبت آهنگ گردش مداری به چرخش محوری ۳۱
۲-۶-۲ زاویه میل مدار i ۳۲
۲-۶-۳ نور سوم ۳۳

فصل سوم: آشنایی با روش و برنامه فوبه (Phoebe)

۳-۱ آشنایی با برنامه فوبه ۳۵
۳-۲ راهنمای کار با برنامه فوبه (PHOEBE 0.32) ۳۷

فصل چهارم: تحلیل منحنی نوری سیستم دوتایی گرفتی EG cephei

۴-۱ ابزار و محل نورسنجی ۴۶
۴-۲ مراحل نورسنجی: ۴۷
۴-۳ منظومه دوتایی EG cep ۴۷
۴-۴ بررسی سیستم EG cep : ۴۸
۴-۵ نتیجه گیری: ۵۱
۴-۶ موقعیت ستاره‌ها در نمودار HR: ۵۲
۴-۷ بحث و پیشنهاد ۵۹
منابع ۶۲
پیوست ۶۴

مقدمه

بیش از نیمی از ستارگان وجود دارند که گرانش متقابل بین آنها سبب یک ارتباط دینامیکی بین آنها می‌شود و دو ستاره به دور مرکز جرم مشترک سیستم گردش می‌کنند که به این سیستم‌ها، سیستم دوتایی گفته می‌شود.

هر کدام از اعضای یک ستاره دوتایی را یک مؤلفه می‌نامند. معمولاً ستاره روشن‌تر را ستاره اصلی و ستاره دوم را ستاره همدم می‌نامند.

در گروهی از این دوتایی‌ها وضعیت دید مدار به گونه‌ای است که یکی از دو ستاره میان ناظر و ستاره دیگر قرار می‌گیرد و این دو ستاره به تناوب، همدیگر را می‌پوشانند و شاهد تغییرات دوره‌ای در شدت روشنایی این ستاره‌ها خواهیم بود و با رسم شدت بر حسب زمان یا فاز منحنی نوری دوتایی به دست می‌آید.به کمک قوانین فیزیکی و رصد و بررسی منحنی نوری و طیف سنجی دوتایی می‌توان به خصوصیات مهمی از سیستم، مانند: جرم، شعاع، چگالی، دمای سطحی، تابندگی، میل مداری، خروج از مرکز مداری و آهنگ چرخش دست یافت و یا با اندازه گیری ضرایب تاریکی لبه به بررسی ساختار جو ستاره پرداخت. تلفیق داده‌های نورسنجی و طیف سنجی دوتایی‌ها به ما امکان می‌دهد تا ابعاد مطلق سیستم را تعیین کنیم و سپس با مطالعه دوتایی‌ها و تعیین موقعیت آن‌ها بر روی نمودار H-R اطلاعات مهمی درباره سیر تحول مؤلفه‌های دوتایی به دست آوریم.

با تحقیقات و مطالعات بعدی و گسترش وسایل جدید و تلسکوپ‌های پیشرفته،تعداد بیشتری از ستارگان دوتایی شناخته و ثبت شده اند. به طوریکه تا هم اکنون بیش از ۶۰۰۰ سیستم ستاره دوتایی کشف و در فهرست های نجومی ثبت شده اند [۱۸] .

ستارگان دوتایی گرفتی از مهمترین زیرمجموعه‌های سیستم‌های دوتایی می‌باشند. در این نوع دوتایی، دو مؤلفه در مدارهایی دایره‌ای یا بیضی شکل حول مرکز جرم سیستم می‌چرخند و به تناوب از مقابل هم عبور کرده و یکدیگر را می‌پوشانند. از این رو موجب تغییر روشنایی دوتایی نسبت به زمان می‌شوند. با رسم تغییرات روشنایی یا تابندگی دوتایی نسبت به زمان، منحنی نوری به دست می‌آید. یکی از راههای رسیدن به سیر تحولی ستارگان، مطالعه و محاسبه پارامترهای فیزیکی و هندسی یک سیستم به خصوص جرم اعضاء آن است. برای دستیابی به این پارامترها ستارگان دوتایی گرفتی ابزار مفیدی هستند که با استفاده از تغییرات منحنی نوری و منحنی سرعت که از طریق طیف سنجی به دست می‌آید، می‌توان به این هدف رسید.

فصل اول

طبقه بندی ستاره‌های دوتایی

۱-۱ انواع ستاره‌های دوتایی

سیستم‌های ستاره‌ای دوتایی را می‌توان بر اساس دلایل فیزیکی و نحوه آشکارسازی به ۶ نوع مختلف تقسیم کرد:

۱-۱-۱ دوگانه نوری[1]:

ستارگانی که با یکدیگر ارتباط فیزیکی ندارند و در آسمان به طور اتفاقی در راستای خط دید یکسان قرار گرفته اند .

۱- ۱-۲ دوتایی مرئی[2] :

ستارگانی که توسط نیروی گرانش با هم ارتباط دارند و معمولاً فاصله آنها چند صد واحد نجومی است. فاصله مراکز دو ستاره در این حالت بیشتر از یک ثانیه قوسی است و با استفاده از تلسکوپ قابل تفکیک می‌باشند. به دلیل فاصله زیاد در این حالت، سرعت مداری اینگونه ستارگان بسیار کم بوده و برای پی بردن به حرکت مداری آنها گاهی باید چند ده سال رصدشان کرد.

[1] Optical Doubles
[2] Visual Binaries

۱- ۱-۳ دوتایی اختر سنجی[1]:

این گونه از دوتایی‌ها در تلسکوپ فقط به صورت یک ستاره دیده می‌شوند اما حرکت نوسانی شان در آسمان، نشان از یک همدم ناپیدا دارد. هر دو جرم، به دور مرکز جرم مشترک شان در حال گردش هستند .

۱- ۱-۴ دوتایی طیفی[2] :

اغلب یک سیستم دوتایی آنچنان به یکدیکر نزدیک یا دورند که به صوزت یک جفت نوری قابل تشخیص نیستند. با این وجود طیف به دست آمده از چنین سیستمی، دو نوع ستاره متفاوت را نشان خواهد داد. به طور طبیعی هر ستاره، طیف منحصر به فردی دارد به طور مثال یک ستاره داغ خطوط غنی از هیدروژن و در طیف یک ستاره سرد خطوط غنی از فلزات دیده می‌شود.

۱- ۱-۵ دوتایی طیف سنجی[3]:

یک سیستم دوتایی که مرئی بودن آن به وسیله نوسانات دوره ای در خطوط طیفی‌اش مشخص می‌شود. در بعضی موارد، مجموعه‌ای از اشکال طیفی (برای هر ستاره) دیده می‌شوند که با فازهای مخالف نوسان می‌کنند، در موارد دیگر یکی از ستاره‌ها کم نورتر از آن است که دیده شود، در نتیجه تنها یک مجموعه از خطوط طیفی نوسان کننده ثبت می‌شود. در اینجا دوره‌های تناوب مداری واقعی از چند ساعت تا چند ماه متغیر است .

[1] Astrometric Binary
[2] Spectral Binary
[3] Spectroscopic Binary

اغلب در یک سیستم دوتایی فاصله ظاهری دو ستاره خیلی به هم نزدیک بوده و یا این که یکی از دو ستاره از دیگری بسیار روشن‌تر و پر نورتر است و از این رو نمی‌توان آنها را از تلسکوپ به صورت مجزا مشاهده و تفکیک کرد. دوتایی بودن این منظومه‌ها با استفاده از رصدهای طیفی سرعت شعاعی، یعنی سرعت در راستای خط دید ناظر، استنباط می‌شود. به عبارت دیگر، هر دو ستاره در مدارهایی دایره‌ای یا بیضی شکل حول مرکز جرم مشترک شان حرکت می‌کنند، با اندازه‌گیری انتقال دوپلری خطوط طیفی می‌توانیم تغییرات سرعت شعاعی هر ستاره را نسبت به زمان، که منحنی سرعت نامیده می‌شود، به دست آورد. اگر دو عنصر یک سیستم دوتایی طیف سنجی به اندازه کافی نورانی باشند، در این صورت می‌توان طیف هر یک از مؤلفه‌ها را با استفاده از یک طیف نگار به دست آورد. با کمک این دو منحنی سرعت شعاعی استخراج می‌شود، به این گونه سیستم‌ها، دوتایی‌های طیف سنجی دو خطی (SB_2)[1] گفته می‌شود. اما اگر تنها یک عضو سیستم دوتایی قابل آشکارسازی باشد، روشنایی زیاد این مؤلفه سبب محو شدن خطوط طیفی مؤلفه کم نورتر می‌گردد و از این رو تنها یک طیف از سیستم دوتایی به دست می‌آید. در این حالت از روی جابه جایی دوپلری خطوط طیفی مؤلفه روشن‌تر که به طور تناوبی تغییر می‌کند، می‌توان استنباط کرد که این منظومه دارای عضو دومی است که در تلسکوپ دیده نمی شود. به این منظومه‌ها، دوتایی طیف سنجی تک خطی (SB_1) گفته می‌شود.

آشکارسازی دوتایی طیف سنجی، محدودیت‌های تفکیک هندسی و زاویه‌ای مربوط به دوتایی‌های مرئی را ندارد و تنها به یک تلسکوپ قوی با توانایی جمع آوری نور کافی احتیاج است تا بتوان این دوتایی‌ها را حتی در کهکشان‌های نزدیک نیز بررسی کرد. از تجزیه و تحلیل منحنی سرعت شعاعی، نسبت جرم و همچنین نسبت روشنایی مؤلفه‌ها به دست می‌آید .

[1] Spectral Binary

۱- ۱-۶ دوتایی گرفتی[1]:

یک سیستم دوتایی که در آن دو ستاره به تناوب یکدیگر را می‌پوشانند که منجر به تغییرات دوره‌ای در روشنایی ظاهری سیستم می‌شود، چنین سیستم‌هایی ممکن است دوتایی مرئی، اخترسنجی و طیف سنجی نیز باشند .

هندسه یک سیستم دوتایی گرفتی در شکل ۱-۱ نشان داده شده است. زاویه بین خط عمود بر صفحه مداری و صفحه آسمان، به زاویه میل مداری موسوم است و با i نشان داده می‌شود. واضح است که وقتی $i=90^o$ باشد مدار کاملاً از پهلو دیده می‌شود و سیستم دچار بیشترین گرفت خواهد شد. یک سیستم ایده آل از دو ستاره کروی با قرص‌های به طور یکنواخت درخشان را در نظر می‌گیریم. شعاع ستاره‌ها R_1 و R_2 و فاصله بین مراکز آنها a است. ما شعاع‌های R_1 و R_2 را بر حسب واحد a تعریف خواهیم کرد، به گونه‌ای که بر حسب این واحد، فاصله بین مراکز دو ستاره برابر ۱ است. درخشندگی تک تک ستاره‌ها با L_1 و L_2 نشان داده شده و بر حسب درخشندگی کل سیستم بیان می‌شود یعنی $L_1+L_2=1$.

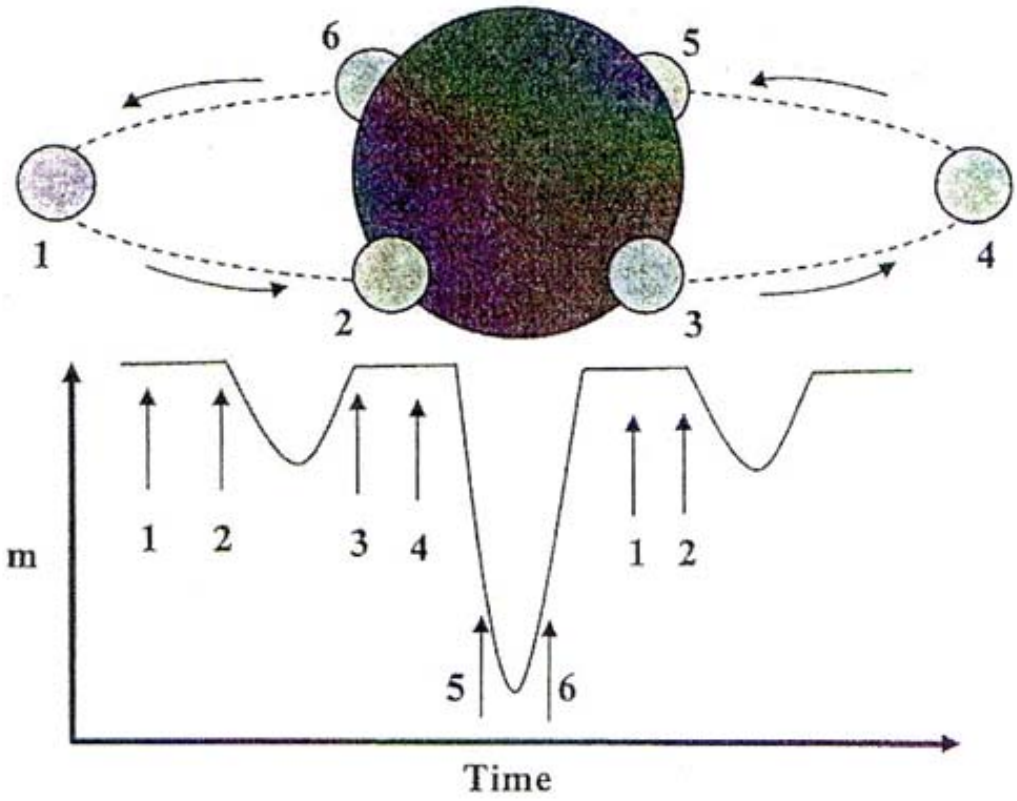
شرط وقوع گرفت مطابق شکل (۱-۲) این است که [۲۱]

$$acosi<R_1+R_2 \qquad (۱-۱)$$

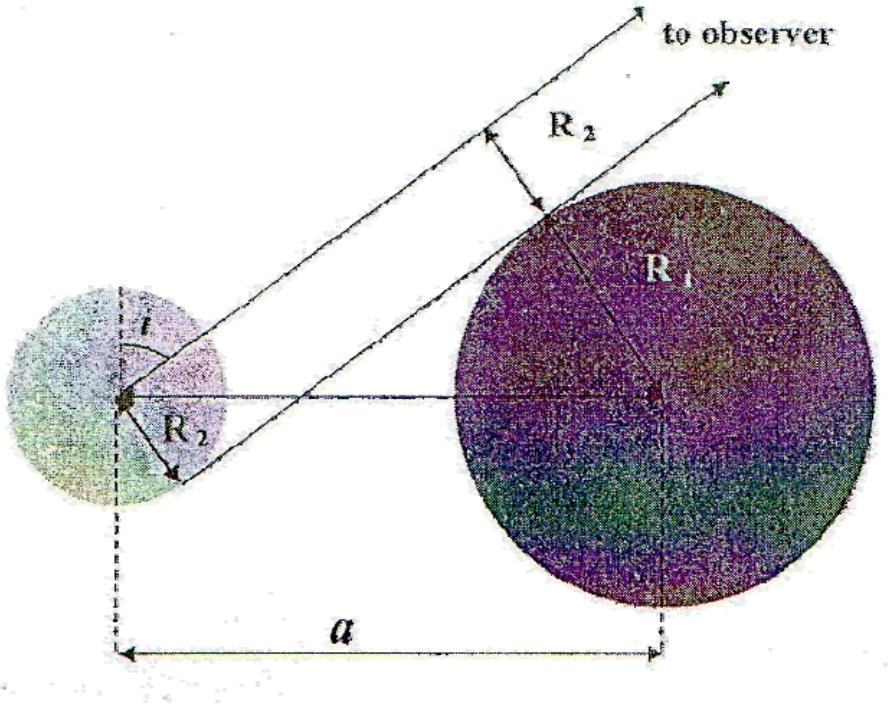
- اگر $i=90^o$ هر دو گرفت کامل (ستاره کوچکتر پشت ستاره بزرگتر) و گرفت حلقوی (ستاره بزرگتر پشت ستاره کوچکتر) اتفاق می‌افتد.
- اگر $acosi<R_1+R_2$ باشد هر دو گرفت کامل و حلقوی رخ می‌دهد.
- اگر $R_1-R_2<acosi<R_1+R_2$ باشد فقط گرفت جزئی رخ می‌دهد.

دوره تناوب دوتایی گرفتی نوعاً ۳ ساعت تا ۲۷ روز است. اولین سیستم دوتایی گرفتی شناخته شده ستاره رأس الغول(آلگول)[2] در صورت فلکی برساووش است .

[1] Eclipting Binary
[2] Algol



شکل ۱-۱ هندسه یک سیستم دوتایی گرفتی و چگونگی ایجاد گرفت



شکل ۱-۲ پارامترهای هندسی یک سیستم دوتایی

متغیر بودن نور تابش شده از سیستم، اولین بار توسط جمینیانو مونتاناری[1] و در سال ۱۶۶۷ گزارش شد، هر چند احتمالاً مدت‌ها پیش، این ویژگی مورد توجه قرار گرفته بود. اولین شخصی که راهبرد برای تغییرات این ستاره ارائه داد منجم آماتور انگلیسی، جان گودریک[2] بود. وی در سال ۱۷۸۳ یافته‌های خود را ارائه نمود، مبنی بر اینکه تغییرات تناوبی این ستاره ناشی از عبور یک جسم تاریک از مقابل آن است و یا در غیر این صورت خود ستاره دارای ناحیه تاریکی است که به طور تناوبی مقابل زمین قرار می‌گیرد. و در سال ۱۸۸۱ منجم هاروارددی، ادوارد پیکرینگ[3] شواهدی را ارائه نمودند که نشان می‌داد آلگول در واقع یک دوتایی گرفتی می‌باشد. چند سال بعد در سال ۱۸۸۹ هم،هرمان کارل وگول[4] انتقال دوپلری تناوبی را در طیف آلگول مشاهده کردند که مؤید تغییرات سرعت شعاعی سیستم دوتایی بود. بنابراین آلگول جزء اولین دوتایی‌های طیف سنجی هم می‌باشد. آلگول A وآلگول B دوتایی گرفتی هستند که فاصله آنها تنها ۰/۰۶۲ Au می‌باشد و هر ۲/۷۸ روز یک بار به دور یکدیگر می‌چرخند [۲۲] .

۱-۲ منحنی نوری[5] و طبقه بندی ستاره‌های دوتایی

در حال حاضریکی از مهمترین منابع اطلاعاتی ما درباره ستارگان، نوری است که از آن‌ها به ما می‌رسد. اگر شدت نور دریافتی از ستاره را بر حسب زمان رسم کنیم، یک منحنی نوری خواهیم داشت. معمولاً منحنی‌های نوری به دست آمده، تغییرات شدت نور را در یک صافی[6] مشخص، مانند صافی آبی، مرئی و یا قرمز نشان می‌دهد. همانطور که قبلاً هم اشاره کردیم، ستاره‌های دوتایی به طور تناوبی حول مرکز جرم مشترکشان می‌چرخند و اگر این دوتایی‌ها از نوع گرفتی باشند، آن گاه به علت گرفت‌های متناوب،

[1] Geminiano Montanari
[2] John Godricke
[3] Edvard Pickering
[4] Herman Carl Vogel
[5] Light Curve
[6] Filter

تغییرات متناوبی را در شدت نور دریافتی از این ستارگان خواهیم داشت. بنابراین یک منحنی نوری متناوب به دست می‌آید که با توجه به انواع مختلف سنارگان دوتایی گرفتی، اشکال متفاوتی خواهد داشت. در این قسمت به توصیف سه شکل اساسی منحنی‌های نوری به دست آمده از ستاره‌های دوتایی گرفتی و طبقه بندی دوتایی گرفتی بر اساس آنها خواهیم پرداخت .

۱- ۲-۱ منحنی‌های نوری نوع الگول[1]

این منحنی‌های نوری مانند شکل ۱-۳ (الف) شامل افت عمیق در قسمت گرفت می‌باشند و تنها تغییرات اندکی در خارج از این افت در منحنی مشاهده می‌شود. در الگول و دوتایی مشابه آن که چنین منحنی نوری‌ای دارند، مؤلفه دوم که یک غول قرمز بزرگ می‌باشد، بسیار سردتر و سبک‌تر اما بزرگتر از مؤلفه اول می‌باشد. بنابراین تابندگی سطحی آن نیز بسیار کمتر از مولفه اول می‌باشد. به همین دلیل هنگامی که پدیده گرفت برای مؤلفه رخ می‌دهد، افت مشاهده شده در کل نور دریافتی از سیستم بسیار اندک خواهد بود و در بیشتر دوتایی‌های الگولی تنها چند درصد از کل نور کم خواهد شد. اما از آنجائیکه تابندگی سطحی مؤلفه اول اتفاق می‌افتد عمق گرفت بسیار زیاد خواهد بود [۱۴].

[1] Algol-type

۱- ۲-۲ منحنی‌های نوری نوع شلیاق(بتالیرا[1])

منحنی نوری چنین دوتایی‌هایی تغییرات پیوسته‌ای را طی یک دوره تناوب مداری، که معمولاً بیش از یک روز می‌باشد، نشان می‌دهد. در دوتایی‌های نوع شلیاق ستاره بزرگ‌تر، مؤلفه کم نورتر می‌باشد. به همین دلیل بیشترین افت در شدت نور دریافتی از سیستم و یا کمینه اول مربوط به زمانی است که ستاره بزرگتر، به طور کامل ستاره کوچکتر را می‌پوشاند کمینه دوم هم برای وقتی است که مؤلفه اول (مؤلفه کوچکتر اما پرنورتر) به طور جزئی مؤلفه دوم را می‌پوشاند [۱۴].

در چنین حالتی، هر چند عمق کمینه دوم اکثر اوقات بسیار کمتر از عمق کمینه اول که غالباً دامنه‌ای کمتر از ۲ مرتبه قدر دارد می‌باشد، کمینه دوم همیشه قابل مشاهده است [۱۱].

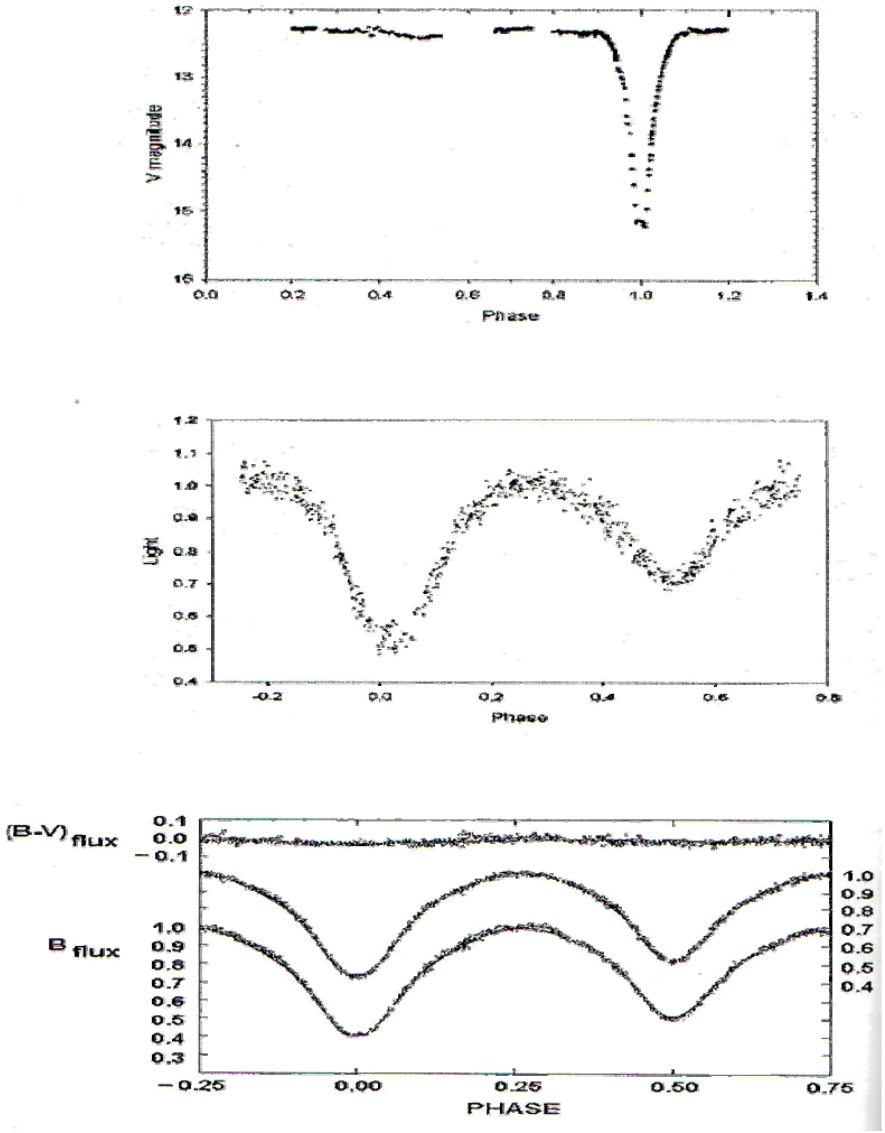
در شکل ۱-۳(ب) منحنی نوری ستاره شلیاق را در صافی V که از داده‌های سال ۱۹۹۵ از رصد این سیستم دوتایی به دست آورده‌اند، مشاهده می‌کنیم.

۱- ۲-۳ منحنی‌های نوری نوع دبلیو دب اکبر(WUMa.[2])

دوتایی‌های گرفتی نوع WUMa به وفور در آسمان یافت می‌شوند و تقریباً ۱ درصد کل ستارگان را تشکیل می‌دهند. همانطور که در شکل ۱-۳(ج) هم قابل مشاهده است، شدت نور دریافتی از چنین سیستم‌هایی به طور پیوسته در تمام قسمت‌های منحنی نوری تغییر می‌کند. به همین دلیل نمی توان به سادگی آغاز و پایان گرفت‌ها را مشخص نمود. در این نوع ستارگان عمق کمینه‌های مربوط به گرفت‌های اول و دوم تقریباً یکسان می‌باشد. دوره تناوب مداری این دوتایی‌ها کوتاه و کمتر از یک روز

[1] βlyrae
[2] W Ursae Majoris

می‌باشند[۱۱]. با توجه به دوره تناوب بسیار کوتاه دوتایی نوع .WUMa می‌توان فهمید که این ستارگان به یکدیگر نزدیک می‌باشند [۵] .



شکل ۱-۳ (الف)منحنی نوری یک سیستم الغول نوعی. (ب)منحنی نوری ستاره دوتایی شلیاق. (ج)منحنی نوری یک سیستم دوتایی گرفتی از نوع .WUM a در دو صافی آبی و مرئی.

۱-۳ لوب[1] روچ و طبقه بندی ستاره‌های دوتایی گرفتی

طبقه بندی ستارگان دوتایی بر اساس شکل منحنی‌های نوری، روش کارآمدی نیست. این طبقه بندی تنها بر اساس شکل ظاهری دوتایی‌ها انجام گرفته است. ممکن است دوتایی‌ها به علت شکل منحنی‌های نوری خود در یک گروه قرار گرفته باشند که خود شباهتی با یکدیگر نداشته باشند. برای مثال می‌توان به دوتایی‌هایی اشاره نمود که در فهرست عمومی ستارگان متغیر[2](Kopalove et al.1985) در گروه سیستم‌های بتالیرا ثبت شده اند اما کمترین شباهتی با بتالیرا ندارند[۱۴]. با افزایش دانش ما از ساختار فیزیکی دوتایی‌ها روشی دیگر بر اساس لوب روچ می‌پردازیم و سپس به طبقه بندی سیستم‌های دوتایی گرفتی بر اساس آنچه که توسط کوپال انجام گرفته است خواهیم پرداخت.

۱- ۳-۱ لوب روچ، حد روچ[3]

واژه‌های فوق، به واسطه کارهای منجم فرانسوی، ادوارد آلبرت روچ (۱۸۸۳-۱۸۲۰)[4] نامگذاری شده‌اند. او بیشتر به خاطر کارهایش در زمینه مکانیک سماوی شناخته شده است. ادوارد روچ روشی را برای محاسبه فاصله‌ای که در آن یک جسم توسط نیروهای گرانشی منسجم است، ولی به علت نیروهای جزر و مدی[5] از هم می‌گسلد، توصیف نمود. این فاصله را با نام حد روچ می‌شناسیم [۱۶].

حد روچ که گاهی از آن به نام شعاع روچ[6] نیز یاد می‌شود، معرف فاصله‌ای است که در آن یک جسم سماوی که به علت تأثیر نیروی گرانش خود منسجم می‌باشد، به خاطر اینکه نیروهای جزر و مدی یک جسم سماوی دوم از نیروهای خود- گرانشی آن بیشتر می‌شود، از هم پاشیده می‌شوند. اگر جسمی داخل

[1] Roche Lobe
[2] General catalogue of Variable stars
[3] Roche Limit
[4] Edouare Albert Roche
[5] Tidul Forces
[6] Roche Radius

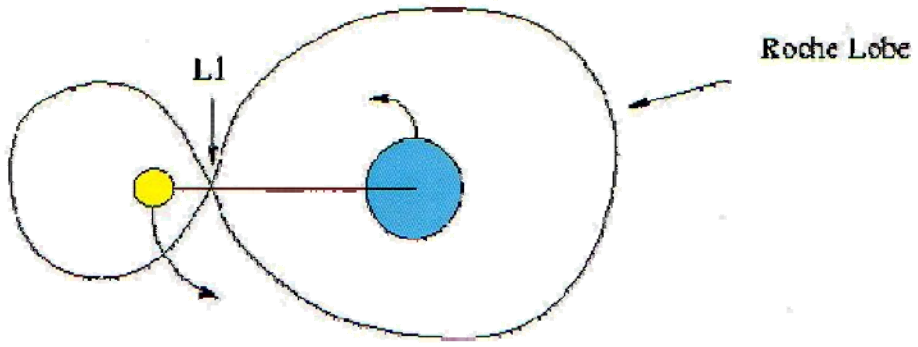
حد روچ جسم سنگین‌تری در حال چرخش باشد، تمایل به حفظ یکپارچگی[1] خود دارد.حد روچ، d، برای یک جسم صلب که در حال چرخش حول یک جسم کروی دیگر است با رابطه زیر تعیین می‌شود [۱۷] .

$$d = R\left(2\frac{\rho_M}{\rho_m}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (۱-۲)$$

حد روچ، هنگامی که نسبت چگالی جسم اول که مثلاً ممکن است یک سیاره باشد به چگالی جسم دوم هم که مثلاً ماهواره آن می باشد، تقریباً با هم برابر باشند، حدود ۲/۴۶ به دست می‌آید[۱۱].

حال به تعریف روچ می‌پردازیم :

لوب روچ ناحیه‌ای از فضای حول هر یک از ستاره‌ها در یک سیستم دوتایی است که در آن اجرام به واسطه نیروی گرانشی مقید به آن ستاره می‌باشد [۱۱]. همانطور که در شکل (۱-۴) هم قابل مشاهده است، این ناحیه به شکل یک قطره اشک[2] می‌باشد. این ناحیه توسط یک سطح هم پتانسیل گرانشی بحرانی[3] مقید شده است، در حالی که نوک قطره به سمت ستاره دیگر می‌باشد .



شکل ۱-۴

[1] Coalesce
[2] Tear Drop
[3] Critical Gravitational Equipotential

انرژی پتانسیل در دستگاهی که با سیستم دوتایی در حال چرخش می‌باشد، محاسبه می‌شود. به دلیل اینکه این چارچوب مرجع یک دستگاه غیر لخت می‌باشد، برای محاسبه صحیح انرژی پتانسیل در هر نقطه، علاوه بر در نظر گرفتن انرژی پتانسیل گرانشی ناشی از هر دو ستاره (که با عکس فاصله از مرکز دو ستاره تغییر می‌کند) باید شبه پتانسیل ناشی از نیروی گریز از مرکز را هم در نظر گرفت. این شبه پتانسیل با مربع فاصله از محور دوران سیستم رابطه مستقیم دارد. بنابراین با توجه به مطالب فوق، انرژی پتانسیل در هر نقطه نسبت به مرکز دستگاه مختصات چرخان از رابطه زیر به دست می‌آید :

$$\phi(\mathrm{r}) = -\frac{GM_1}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}_1|} - \frac{GM_2}{|\mathrm{r}-\mathrm{r}_2|} - \frac{1}{2}(\omega \times \mathrm{r})^2 \qquad (۳-۱)$$

در رابطه بالا M_1 جرم جسم اول وM_2 جرم جسم دوم می‌باشد. r مکان نقطه‌ای است که در آن می‌خواهیم پتانسیل را حساب کنیم. r_1 و r_2 هم به ترتیب مکان مرکز جرم جسم اول و دوم نسبت به مرکز جرم سیستم می‌گذرد و در یک دستگاه مختصات لخت، مانند ستارگان دور دست اندازه گیری می‌شود. پس از محاسبه انرژی پتانسیل در هر نقطه، می‌توان سطوح هم پتانسیل را به صورت شکل (۱-۵) رسم نمود. سطح هم پتانسیل بحرانی در شکل، سطحی است که قسمت رنگی را محدود کرده است .