دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

هم ارزی کلاس خاصی از ایده آل های فازی و حلقه های ارزیابی حقیقی

استاد راهنما

دکتر محمد حسین حسینی

استاد مشاور

دکتر حسین فضائلی مقیمی

نگارنده

رضا عبدلی نسب گروهی

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم خاصی از ایده آل های فازی را که ایده آل های فازی ارزیابی نامیده می شوند، را معرفی کرده و شرایط لازم برای وجود چنین ایده آل هایی را بررسی می کنیم. در ادامه نوع دیگری از ایده آل های فازی به نام ایده آل های فازی R-ارزیابی را معرفی کرده و ثابت می کنیم یک حوزه صحیح، حلقه ارزیابی است اگر و فقط اگر دارای یک ایده آل R- ارزیابی باشد. در انتها گروه ارزیاب حلقه های ارزیابی حقیقی، در اصطلاح ایده آل های فازی R- ارزیاب را تعریف و درباره ی روشی برای ساختن چنین ایده آل هایی در یک حلقه ارزیابی گسسته بحث می کنیم.

واژگان کلیدی: ارزیابی؛ گروه ارزیاب؛ حلقه ارزیابی؛ حلقه ارزیابی گسسته؛ ایده آل فازی؛ ایده آل فازی ارزیابی

تعداد صفحات پایان نامه: ۹۳

تقدیم به:

برترینی که به ما فرصت بودن داد.

پدر و مادر عزیزم که در سایه وجودشان همواره از حمایت همه جانبه برخوردار بودم و به وجودشان افتخار می کنم.

همسر عزیزم که همدمی صمیمی و همراهی کوشا و دلسوز بوده و محبت و پشتیبانی را هرگز از من دریغ نمی نماید.

پدر و مادر همسرم که عطوفت های بی دریغشان نیرو بخش زندگی است.

دانشجویان و دانش پژوهان گرامی که امیدوارم این رساله مورد بهره برداری آن ها نیز قرار بگیرد.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

حمد بی کران خداوندی را که استواری، تقدیر خجسته و توان تلاش را در زندگی به من آموخت.

بدین وسیله مراتب سپاس و قدر دانی خود را نسبت به استاد راهنمای عزیز و بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمد حسین حسینی ابراز می دارم که همواره در طول این تحقیق مرا از چشمه علم و محبت خویش سیراب کردند. همچنین مراتب قدر دانی خود را نسبت به استاد مشاور گران قدر جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی که زحمت مشاوره ی اینجانب را بر عهده داشتند و اساتید ارجمند آقایا دکتر محمد مهدی نصرآبادی و دکتر حسین اقدامی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند ابراز می دارم. و همچنین کمال تشکر و سپاس گذاری را از سرکار خانم دکتر اعظم کاهنی، نماینده محترم تحصیلات تکمیلی را خواستارم.

سپاس فراوان نثار پدر و مادر عزیزم که دعای خیر و دست گرمشان را گشای تمام مشکاتم است.

و در نهایت از همسر مهربان و عزیزتر از جانم که هر چه در توان داشت از من دریغ نکرد، تشکر و قدر دانی می نمایم.

امید است جوابگوی مهربانی های این عزیزان باشم.

رضا عبدلی نسب گروهی

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیش گفتار

تاریخچه توسعه نظریه ارزیابی قدمتی بیش از ۱۰۰ سال ندارد. نظریه ارزیابی می تواند به عنوان شاخه ای از توپولوژی جبری در نظر گرفته شود. مطالعه ی ارزیابی روی میدان ها منحصر به نظریه میدان ها نمی شود بلکه ابزار مهمی در شاخه هایی مانند نظریه اعداد، نظریه سیستم های جبری مرتب و غیره می باشد. در سال ۱۹۸۹ کوهن [۲] اظهار داشت که تا آن سال صرف نظر از تعاریف و مثال هایی که در سال ۱۹۴۵ توسط شیلینگ [۳] ارائه شده است، شناخت بارزی از ارزیابی روی میدان ها به دست نیامده است. کوهن در سال ۱۹۸۹ ساختار ارزیابی روی میدان های اریب را معرفی می کند. جزئیات در مورد ارزیابی روی میدان ها را در مقالاتی مانند شیلینگ (۱۹۵۲)، ریبن بویم [۴] (۱۹۶۴) و اندلر [۵] (۱۹۷۲) می توان یافت و در سال ۱۹۶۸ مانیس [۶] برای اولین بار مفهوم ارزیابی در حلقه های جابجایی را بیان کرد. همچنین ارزیابی روی حلقه ماتریس ها توسط م.ح. حسینی در سال ۲۰۰۴ معرفی شد و نتایج مهمی به دست آمد.

این پایان نامه شامل سه فصل است.

فصل اول که در مورد ارزیابی و حلقه های ارزیابی است شامل سه بخش می باشد. در بخش اول تعاریف لازم در زمینه ارزیابی و مثال هایی در باره ی ارزیابی بیان می شود. در بخش دوم حلقه های ارزیابی و بخش سوم نیز قضایایی در زمینه ارزیابی بررسی می شود.

در فصل دوم مباحث مربوط به زیر مجموعه ها و زیر گروه های فازی و همچنین ایده آل های فازی را بیان می کنیم. در ضمن قضیه های مرتبط به این مباحث را نیز بیان و بررسی خواهیم کرد. این فصل شامل چهار بخش است.

فصل سوم نیز در مورد ایده آل های فازی $\mathbb{R}$-ارزیابی می باشد که شامل سه بخش است. در بخش اول ایده آل های فازی و حلقه های ارزیابی حقیقی را بررسی کرده و بخش دوم نیز به بررسی گروه ارزیاب ایده آل های فازی $\mathbb{R}$-ارزیابی می پردازیم. در نهایت در بخش سوم ساختار یک ایده آل فازی $\mathbb{R}$-ارزیابی را در حلقه ارزیابی گسسته بررسی می کنیم.

---

[۲] Cohn
[۳] Schilling
[۴] Ribenboim
[۵] Endler
[۶] Manis

فصل ۱
ارزیابی و حلقه های ارزیابی

.

۱.۱ ارزیابی و مثال هایی از آن

در تمام پایان نامه حلقه ی R به عنوان یک حلقه ی ناجابجایی است، مگر این که خلاف آن تصریح شود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I ایده آلی از آن باشد، آن گاه $(\frac{R}{I}, +, .)$ با عمل جمع و ضرب تعریف شده به شکل

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I$$

$$(x+I).(y+I)=xy+I$$

تشکیل یک حلقه می دهد که آن را حلقه خارج قسمتی[۱] R به وسیله I می نامند.

تعریف ۲.۱.۱. عنصر ناصفر a از حلقه R را یک مقسوم علیه صفر چپ (راست) گوییم اگر عنصر ناصفری مانند $b \in R$ موجود باشد به طوری که $ab=0$ ($ba=0$). مقسوم علیه صفر عنصری از R است که هم مقسوم علیه صفر چپ و هم مقسوم علیه صفر راست باشد.

تعریف ۳.۱.۱. حلقه تعویض پذیر ویکدار R با خاصیت $1_R \neq 0$ و فاقد مقسوم علیه صفر را یک حوزه ی صحیح می نامند.

مثال ۴.۱.۱. حلقه $\mathbb{Z}$ اعداد صحیح یک حوزه ی صحیح است.

[۱] Quotient ring

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. زیرمجموعه ناتهی I از R را یک ایده آل چپ (راست) می نامند هرگاه:

۱) به ازای هر $a, b \in I$، $a - b \in R$؛

۲) به ازای هر $a \in I$ و $r \in R$، $ra \in I$ ($ar \in I$).

توجه کنید که Iرا یک ایده آل (دوطرفه) حلقه R می نامند هرگاه I یک ایده آل چپ و راست حلقه R باشد.

تعریف ۶.۱.۱. ایده آل P از حلقه R را اول نامند هرگاه به ازای هر دو ایده آل A و B از حلقه R، $AB \subseteq P$ ایجاب کند $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

مثال ۷.۱.۱. ایده آل صفر در یک حوزه صحیح یک ایده آل اول است.

تذکر ۸.۱.۱. *اگر P یک ایده آل اول از حلقه R باشد آن گاه حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{P}$ یک حوزه ی صحیح است.*

تعریف ۹.۱.۱. ایده آل M از حلقه R را یک اید ه آل ماکسیمال می نامیم اگر $M \neq (۱)$ و هیچ ایده آل A از R موجود نباشد که

$$M \subsetneqq A \subsetneqq (۱) = R.$$

تذکر ۱۰.۱.۱. *اگر M یک ایده آل ماکسیمال از حلقه تعویض پذیر R باشد آن گاه حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{M}$ یک میدان است.*

تعریف ۱۱.۱.۱. حلقه R را یک حوزه ایده آل اصلی می نامیم اگر حلقه R حوزه صحیح باشد و هر ایده آل آن اصلی باشد یعنی توسط یک عنصر تولید شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. حلقه R را نوتری [۲] چپ (راست) است اگر در شرط زنجیر افزایشی [۳] بر ایده آل های چپ (راست) صدق کند. گوییم R نوتری است اگر نوتری چپ و راست باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه R یک حلقه موضعی[۴] نامیده می شود اگر تنها یک ایده آل ماکسیمال داشته باشد.

مثال ۱۴.۱.۱. میدان ها حلقه های موضعی هستند زیرا صفر تنها ایده آل ماکسیمال آن ها است.

[۲] Noetherian ring
[۳] Ascendig chain condition
[۴] Local ring

تذکر ۱۵.۱.۱. *در هر حلقه موضعی R عناصر غیر یکه تشکیل یک ایده آل می دهند، این ایده آل، یک ایده آل ماکسیمال است و چون حلقه موضعی است این ایده آل منحصر بفرد است. این ایده آل را با M و این حلقه موضعی را با (R, M) نشان می دهیم.*

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه موضعی با تنها ایده آل ماکسیمال M باشد. در این صورت $\frac{R}{M}$ یک میدان است که میدان مانده R نامیده می شود.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنیم K یک میدان باشد، چند جمله ای $p(x) \in K[x]$ را تحویل ناپذیر گویند هرگاه نتوان آن را به صورت $p(x) = f(x)g(x)$ نوشت که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله ای های غیر ثابت از $K[x]$ باشند.

مثال ۱۸.۱.۱. چند جمله ای $x^۲ + ۱$ روی میدان حقیقی تحویل ناپذیر است. اما روی میدان مختلط تحویل ناپذیر نیست. زیرا به صورت $(x+i)(x-i)$تجزیه می شود و چون یکه ها در $D[x]$ دقیقاً چند جمله ای های ثابت اند که در D یکه می باشند، $(x+i)$ و $(x-i)$ در $C[x]$ یکه نیستند. بنابراین $x^۲ + ۱$ در $C[x]$ تحویل ناپذیر نیست.

تعریف ۱۹.۱.۱. میدان F را به طور جبری بسته گوییم هرگاه هر چند جمله ای غیر ثابت در $F[x]$ حداقل یک ریشه در F داشته باشد.

مثال ۲۰.۱.۱. میدان اعداد مختلط به طور جبری بسته است. برای توضیح بیشتر به [۳] قضیه ۱۹.۳.۵ مراجعه شود.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و A یک زیر حلقه از آن باشد. عنصر x از R را روی A عنصر صحیح می نامیم اگر x یک ریشه از چند جمله ای تکین با ضرایب در A باشد، یعنی x در معادله $x^n + a_۱x^{n-۱} + ... + a_n = ۰$ صدق کند که در آن $a_i \in A$.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و A زیر حلقه ای از آن باشد و C مجموعه عناصری از R باشد که روی A صحیح می باشند. در این صورت C را بستار صحیح A در R می نامند. اگر $C = A$ آن گاه A به طور صحیح بسته در R نامیده می شود و اگر $C = B$ آن گاه حلقه R یک حلقه صحیح روی A نامیده می شود.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنید $(G, \circ)$ و $(G_۱, *)$ دو گروه باشند، تابع f از G به $G_۱$ را یک همریختی گویند هرگاه به ازای هر $a, b \in G$

$$f(a \circ b) = f(a) * f(b).$$

در تعریف فوق اگر نگاشت f یک به یک و پوشا باشد آن را یکریختی گروه ها می نامند.

تعریف ۲۴.۱.۱. عنصر غیر صفر و غیر یکه p از حلقه R را یک عنصر تحویل ناپذیر گوییم هرگاه از تساوی $p = ab$ که $a, b \in R$ بتوان نتیجه گرفت a یکه یا b یکه می باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $(G, *)$ یک گروه با رابطه ترتیب $\leq$ تعریف شده بر روی آن باشد. رابطه ی $\leq$ را نسبت به $*$ سازگار گوییم در صورتی که برای هر $g, g_1, g_2 \in G$ با $g_2 \leq g_1$ داشته باشیم :

$$g_1 * g \leq g_2 * g.$$

تعریف ۲۶.۱.۱. زوج $(G, \leq)$ را که G یک گروه آبلی است یک گروه آبلی مرتب [۵] می نامیم هرگاه $\leq$ یک ترتیب کلی روی آن باشد که با عمل گروه G سازگار باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید Γ یک گروه آبلی مرتب باشد و ∞ عضوی باشد که متعلق به Γ نیست. قرار می دهیم

$$\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{\infty\}.$$

عمل جمع روی گروه Γ را برای هر $a \in \Gamma$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\infty + a = a + \infty = \infty + \infty = \infty$$

و اگر $a, b \in G$، جمع آن ها همان جمع در گروه G می باشد.
با این تعریف عمل جمع روی گروه Γ را به Γ_∞ توسیع می دهیم. همچنین ترتیب در G می تواند با تعریف $a \leq \infty$ به ازای هر $a \in G$ توسیع داده شود.
بر طبق این تعاریف G_∞ تشکیل یک نیم گروه جابجایی مرتب می دهد.

مثال ۲۸.۱.۱. اگر گروه $G = \mathbb{Z}$ (گروه اعداد صحیح همراه با عمل جمع) را در نظر بگیریم، در این صورت $G_\infty = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$.

قبل از تعریف ارزیابی توجه داشته باشید که مجموعه عناصر غیر صفر حلقه R را با R^* و متمم زیر مجموعه S از R را با $R \setminus S$ نمایش خواهیم داد.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید K یک میدان باشد. یک ارزیابی [۶] روی میدان K نگاشت

[۵] ordered abelian group
[۶] valuation

$$\vartheta : K \longrightarrow G_\infty$$

می باشد ($G_\infty = G \cup \{\infty\}$)، که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $x = ۰$ اگر و فقط اگر $\vartheta(x) = \infty$؛

۲) برای هر دو عنصر x و y از K داشته باشیم :

$$\vartheta(x+y) \geq min\{\vartheta(x), \vartheta(y)\};$$

۳) برای هر دو عنصر x و y از K داشته باشیم :

$$\vartheta(xy) = \vartheta(x) + \vartheta(y).$$

در این حالت G را گروه ارزیاب[۷] ϑ گوییم. زیر گروه $G' = \vartheta(K^*)$ از G را گروه مقادیر ϑ می نامیم و با نماد $G' = G_\vartheta$ نمایش می دهیم. در حالت کلی فرض می شود که G یک گروه مقادیر است، یعنی $\vartheta : K^* \longrightarrow G$ پوشا است.

تعریف ۳۰.۱.۱. به طور معمول ارزیابی ناسره را به صورت زیر در نظر خواهیم گرفت :

$$\vartheta(x) = \infty,$$

به ازای هر $x \in K$.

همچنین ارزیابی بدیهی را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\vartheta(x) = \begin{cases} ۰ & x \neq ۰ \\ \infty & x = ۰ \end{cases} \tag{۱.۱}$$

در ادامه بحث فرض کنید ارزیابی ϑ روی میدان K داده شده باشد. $a \in K$ را طوری انتخاب کنید که $\vartheta(a) \neq ۰$. چون $a \cdot ۰ = ۰$، پس بنا به شرط (۳) در تعریف قبل داریم :

$$\vartheta(۰) = \vartheta(a) + \vartheta(۰).$$

اگرارزیابی ϑ روی K سره باشد، $a \in K$ را طوری انتخاب کنید که $\vartheta(a) \neq \infty$. با توجه به شرط سوم تعریف فوق از $a \cdot ۱ = a$ نتیجه می شود که

$$\vartheta(a \cdot ۱) = \vartheta(a) + \vartheta(۱) = \vartheta(a)$$

[۷] value group

بنابراین $\vartheta(۱) = ۰$. همچنین برای هر $a \in K^*$ از $aa^{-۱} = ۱$ مجدداً بنا به شرط سوم داریم :

$$\vartheta(a) + \vartheta(a^{-۱}) = \vartheta(۱) = ۰.$$

از این رو هر ارزیابی سره روی یک میدان در شرط زیر صدق می کند :

$$\vartheta(a^{-۱}) = -\vartheta(a)$$

همچنین برای $a \neq ۰$ داریم $\vartheta(a) \neq \infty$.

اکنون به نتایجی که از تعریف ارزیابی به دست می آیند اشاره می کنیم:

نتیجه ۳۱.۱.۱. *ازشرط (۳) نتیجه می شود که ارزیابی ϑ یک همریختی از $K - \{۰\}$ (با قانون ضرب) در گروه G است.*

نتیجه ۳۲.۱.۱. *اگر نگاشت $\vartheta : K \to G \cup \{\infty\}$ با شرایط (۲) و (۳) همراه با شرط $\vartheta(۰) = \infty$ را داشته باشیم ولی فرض نکنیم ϑ مقدار ∞ را فقط برای صفر اختیار می کند آن گاه مجموعه $P = \vartheta^{-۱}(\infty)$ یک ایده آل اول از K و ϑ یک ارزیابی روی حوزه ی صحیح $\frac{K}{P}$ القا می کند.*

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید ϑ و ϑ' دو ارزیابی از میدان K به ترتیب با گروههای ارزیاب G و G' باشند. گوییم ارزیابی های ϑ و ϑ' هم ارزند، اگر یک نگاشت حافظ ترتیب[۸] φ از G به G' وجود داشته باشد به طوری که برای تمام xها در K^*،

$$\vartheta'(x) = \vartheta(x) \circ \varphi.$$

تعریف ۳۴.۱.۱. ارزیابی ϑ را جابجایی گوییم هرگاه گروه ارزیاب آن جابجایی باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱. یک ارزیابی گسسته [۹] روی میدان K عبارت است از نگاشت پوشای

$$\vartheta : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \infty$$

به طوری که برای هر $x, y \in K$ داشته باشیم :

۱) $x = ۰ \iff \vartheta(x) = \infty$

۲) برای هر دو عنصر $x, y \in K$ داشته باشیم $\vartheta(x + y) \geq min\{\vartheta(x), \vartheta(y)\}$.

۳) برای هر دو عنصر داشته باشیم $\vartheta(xy) = \vartheta(x) + \vartheta(y)$.

[۸] order preserving
[۹] discrete valuation

ارزیابی ϑ داده شده روی میدان اریب K را در نظر بگیرید. $a \in K$ را طوری انتخاب کنید که $\vartheta(a) \neq \circ$. چون $a.\circ = \circ$ پس بنا به (۳) داریم $\vartheta(\circ) = \vartheta(a.\circ) = \vartheta(a) + \vartheta(\circ)$ ودر نتیجه $\vartheta(\circ) = \infty$.

اگر K^* مجموعه تمام عناصر غیر صفر K باشد، شرط (۳) بالا به این معنی است که ϑ یک همریختی از گروه ضربی K^* به گروه جمعی G است. از اینرو $\vartheta(۱) = \vartheta(۱ \cdot ۱) = \vartheta(۱) + \vartheta(۱)$ در نتیجه $\vartheta(۱) = \circ$. همچنین

$$\vartheta(-۱) + \vartheta(-۱) = \vartheta(-۱ \times -۱) = \vartheta(۱) = \circ$$

بنابراین $\vartheta(-۱) = \circ$.

فرض کنید عنصر w از K^*، ریشه یکانی باشد، یعنی $w^n = ۱$. در این صورت

$$\circ = \vartheta(۱) = \vartheta(w^n) = n\vartheta(w) \Rightarrow n\vartheta(w) = \circ$$

ازاین رو $\vartheta(w) = \circ$. حال از $\vartheta(-۱) = \circ$ به دست می آید که

$$\vartheta(-x) = \vartheta(-۱.x) = \vartheta(-۱) + \vartheta(x) = \vartheta(x).$$

پس با توجه به (۳) داریم :

$$\vartheta(x - y) \geq min\{\vartheta(x), \vartheta(y)\} \qquad (\star\star)$$

حال ارزیابی را در حالت جابجایی تعریف می کنیم .

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد و G یک گروه آبلی کلاً مرتب باشد و $G_\infty = G \cup \{\infty\}$ به طوری که برای هر $a \in G$ داشته باشیم :

$$\infty + a = a + \infty = \infty + \infty = \infty$$

و برای هر $\beta \in G$ داشته باشیم $\beta < \infty$. یک ارزیابی روی R با گروه ارزیاب (مقداری) G، نگاشتی مانند ϑ از R بروی G_∞ است به طوری که در شرایط زیر صدق کند :

۱) برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $\vartheta(x + y) \geq min\{\vartheta(x), \vartheta(y)\}$؛

۲) برای هر $x, y \in R$ داشته باشیم $\vartheta(xy) = \vartheta(x) + \vartheta(y)$.

ارزیابی روی حلقه جابجایی را ارزیابی مانیس [۱۰] نامیم.

[۱۰] Manis

توجه کنید با توجه به برخی از تعاریف فوق، می توان برخی از نتایج به دست آمده از ارزیابی روی میدان های اریب را برای ارزیابی مانیس نیز نتیجه گرفت.

۲.۱ حلقه های ارزیابی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید K میدان کسر های حلقه ی R باشد و برای $x \in K \neq 0$ داشته باشیم $x \in R$ یا $x^{-1} \in R$. در این صورت زیر حلقه R از میدان K را تام [11] می گوییم.

تعریف ۲.۲.۱. زیر حلقه A از میدان K، پایا [12] نامیده می شود اگر برای هر $c \in K$ و $c \neq 0$ داشته باشیم

$$cA^{-1}c \subseteq A.$$

تعریف ۳.۲.۱. هر زیر حلقه تام و پایا از K یک حلقه ارزیابی نامیده می شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید K یک میدان و V یک حوزه ی صحیح باشد که K میدان کسرهای V باشد. V را یک حلقه ارزیابی روی K گوییم هرگاه برای هر $x \in K^*$، داشته باشیم $x \in V$ یا $x^{-1} \in V$.

در یک حوزه ی ارزیابی مجموعه ایده آل ها تحت رابطه شمولیت یک مجموعه کلاً مرتب تشکیل می دهند. یعنی اگر I و J دو ایده آل در حلقه ارزیابی V باشند و $x \in I$، آن گاه برای هر $0 \neq y \in J$، داریم $xy^{-1} \in V$ یا yx^{-1}. اگر $xy^{-1} \in V$، آن گاه داریم $x = (xy^{-1})y \in J$ که یک تناقض است. بنابراین برای تمام yها که $y \in J$، $yx^{-1} \in V$ و این نتیجه می دهد که $y = (yx^{-1})x \in I$ و لذا $J \subseteq I$.

از مطلب بالا می توان نتیجه گرفت که حلقه ارزیابی V تنها دارای یک ایده آل ماکسیمال است که شامل تمام غیر یکه هاست و ان را به طور معمول با نماد m_ϑ نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می شود

$$m_\vartheta = \{x \in V \mid x = 0 \text{ یا } x^{-1} \in V\}.$$

تعریف ۵.۲.۱. حلقه ارزیابی V را که از یک ارزیابی گسسته مانند ϑ نتیجه شود حلقه ارزیابی گسسته نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. با قرار دادن $G = \mathbb{Z}$ گروه اعداد صحیح، R را یک حلقه ارزیابی گسسته می نامند.

[11] total
[12] invariant

حال به بیان مثال هایی از ارزیابی و حلقه های ارزیابی می پردازیم :

مثال ۷.۲.۱. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح، p یک عدد اول دلخواه و $G = \mathbb{Z}$ گروه مرتب جابجایی اعداد صحیح باشد. نگاشت ϑ روی $\mathbb{Z}$ را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$\vartheta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

$$\vartheta(x) = n, \vartheta(\circ) = \infty;$$

که در آن n توان عدد p در تجزیه x به اعداد اول است. شرط اول ارزیابی، بنا به تعریف برقرار است زیرا $\vartheta(p) = ۱$. حال فرض کنیم x و y دو عدد صحیح دلخواه باشند و همچنین در نظر می گیریم

$$x = p^n Q_۱ \qquad , \qquad y = p^m Q_۲,$$

که در آن ها

$$(Q_۱, p) = ۱ \qquad , \qquad (Q_۲, p) = ۱.$$

با فرض $m \leq n$، داریم

$$x + y = p^m(p^{n-m}Q_۱ + Q_۲).$$

بنابراین

$$\vartheta(x + y) \geq m = min\{\vartheta(x), \vartheta(y)\}.$$

از این رو شرط دوم ارزیابی نیز برقرار است. از طرفی با فرض$x, y \in \mathbb{Z}$ به شکل فوق داریم :

$$xy = p^n Q_۱ . p^m Q_۲ = p^{n+m}(Q_۱ . Q_۲).$$

از این رو

$$\vartheta(x + y) = n + m = \vartheta(x) + \vartheta(y),$$

بنابراین ϑ یک ارزیابی روی $\mathbb{Z}$ است.

مثال ۸.۲.۱. فرض کنیم K میدان و $p(x)$ چند جمله ای تحویل ناپذیر دلخواه از حلقه چند جمله ای های $K[x]$ و $G = \mathbb{Z}$ گروه مرتب جابجایی باشد. در این صورت نگاشت ϑ روی $K[x]$ را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$\vartheta : K[x] \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

$$\vartheta(f(x))=n,\vartheta(0)=\infty,$$

که در آن n توان چند جمله ای تحویل ناپذیر $p(x)$ در تجزیه $f(x)$ به چند جمله ای های تحویل ناپذیر است. مانند مثال فوق می توان نشان داد نگاشت ϑ یک ارزیابی روی $K[x]$ است.

همان طور که در مثال اخیر ملاحظه کردیم عدد اول p و چند جمله ای تحویل ناپذیر به طور اختیاری بودند. بنابراین بی نهایت ارزیابی روی $\mathbb{Z}$ و حلقه چند جمله ای های $K[x]$ موجود است.

مثال ۹.۲.۱. فرض کنید G یک گروه کلاً مرتب و K یک میدان باشد و $K((G))$ را به عنوان مجموعه سری های صوری $g\in G$ ، $f=\sum a_g g$ در نظر بگیریم که تکیه گاه آن یعنی

$$D(f)=\{g\in G; a_g\neq 0\}$$

خوش ترتیب باشد.

در این صورت چون سری صوری $\sum a_g g$ ، $g\in G$، یک مجموع متناهی است به راحتی می توان دید که با تعریف جمع و ضرب برای هر $f=\sum a_g g$ و $f'=\sum b_g g$ به شکل

$$ff'=\sum c_g g \qquad f+f'=\sum(a_g+b_g)g$$

که در آن $c_g=\sum_u a_u b_{u^{-1}g}$ ، $K((G))$ یک حلقه است. همچنین با تعریف $f^{-1}=\sum a_{g^{-1}}^{-1}g^{-1}$ داریم $ff^{-1}=1$ و بنابراین $K((G))$ یک میدان است. حال نگاشت u روی $K((G))$ را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$u: K((G))\longrightarrow G$$

$$u(f)=g_0$$

که g_0 کوچکترین عنصر در تکیه گاه f می باشد. ادعا می کنیم u یک ارزیابی روی $K((G))$ است.
فرض می کنیم $g_0\in G$ و $g_0\neq 0$. $f=1g_0$. در این صورت $D(f)=\{g_0\}$.
بنابراین $u(f)=g_0\neq 0$. پس شرط اول برقرار است. حال فرض کنیم $f=\sum a_g g$ و $f'=\sum b_g g$ متعلق به $K((G))$ باشند به طوری که $u(f)=g_0$ و $u(f')=g'_0$.

در این صورت $f+f'=\sum(a_g+b_g)g$. اگر $u(f+f')=g_0^*$، آن گاه بنا به تعریف g_0^* کوچکترین عنصر $D(f+f')$ است که $a_{g_0^*}+b^*_{g_0}\neq 0$. در نتیجه $a_{g_0^*}\neq 0$ و $b_{g_0^*}\neq 0$ و این از آن جهت است که $g_0^*\geq g$ یا $g_0^*\geq g'$ (چون گروه را کلاً مرتب فرض کردیم). بنابراین $g_0^*\geq min\{g_0,g'_0\}$ و یا $\vartheta(f+f')\geq min\{\vartheta(f),\vartheta(f')\}$. لذا شرط دوم ارزیابی برقرار است.
فرض می کنیم $\vartheta(f\cdot f')=g_0^*$ که در آن $ff'=\sum c_g g$ و $c_g=\sum a_n b_{n^{-1}g}$. بنا به تعریف، g_0^*

کوچکترین عنصر در تکیه گاه ff' است. به عبارت دیگر $g_\circ^*$ کوچکترین عنصر در $D(ff')$ است که $c_{g_\circ^*} \neq \circ$. حال فرض می کنیم

$$f' = b_{g'_\circ} g'_\circ + ... \qquad , \qquad f = a_{g_\circ} g_\circ + ...$$

ودر نتیجه

$$ff' = (a_{g_\circ}.b_{g'_\circ})(g_\circ + g'_\circ)$$

یعنی کوچکترین عنصری از $D(ff')$ که $c_g \neq \circ$ ، $g_\circ + g'_\circ$ است. زیرا اولاً $a_{g_\circ}.b'_{g_\circ} \neq \circ$ ثانیاً بنا به خاصیت ترتیبی گروه G عناصر دیگر تشکیل دهنده ی ff' دارای عنصری بزرگتر از $g_\circ + g'_\circ$ اند. بنابر این $g_\circ^* = g_\circ + g'_\circ$ در نتیجه $\vartheta(ff') = \vartheta(f) + \vartheta(f')$. بنابراین ϑ یک ارزیابی روی $K((G))$ است.

مثال ۱۰.۲.۱. میدان K یک حلقه ارزیابی از K است.

مثال ۱۱.۲.۱. میدان K را میدان اعداد گویا $(\mathbb{Q})$ و p را عددی اول و ثابت در نظر بگیرید. A را مجموعه همه ی اعداد گویا به صورت $p^r\dfrac{m}{n}$ درنظر بگیرید که $r \geq \circ$ و p هیچ کدام از m و n را عاد نکند، واضح است که A حلقه ارزیابی K می باشد زیرا اگر فرض کنیم $\circ \neq \alpha = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ قرار دهید :

$$b = p^{r_۲} m_۲ \qquad و \qquad a = p^{r_۱} m_۱$$

که $(p, m_۱) = ۱$ و $(p, m_۲) = ۱$. اگر $r_۱ \geq r_۲$، آن گاه $\alpha = \dfrac{a}{b} = p^{r_۱ - r_۲}\dfrac{m_۱}{m_۲} \in A$ و اگر $r_۱ < r_۲$، آنگاه

$$\alpha^{-۱} = \frac{b}{a} = p^{r_۲ - r_۱}\frac{m_۲}{m_۱} \in A.$$

بنابراین زیر حلقه A از $\mathbb{Q}$ یک زیر حلقه تام است. از طرفی چون $\mathbb{Q}$ خاصیت جابجایی دارد پس A زیر حلقه پایا نیز هست.

مثال ۱۲.۲.۱. فرض کنید $K' = K[x]$ که K میدان دلخواهی است. A را مجموعه همه ی اعداد گویا به صورت $p^r\dfrac{m}{n}$ قرار دهید که $r \geq \circ$ و p یک چند جمله ای ثابت است که روی K تحویل ناپذیر می باشد و m و n چند جمله ای های دلخواه در $K[x]$ که به وسیله p تقسیم پذیر نیستند. مشابه مثال قبل نتیجه می شود که A یک حلقه ارزیابی است.

مثال ۱۳.۲.۱. فرض کنید $K' = K[x]$ و A را مجموعه همه ی توابع گویای $\frac{f}{g} \in K[x]$ که $deg(f) \leq deg(g)$ باشد. A یک حلقه ارزیابی از K' است. زیرا اگر $\circ \neq \frac{f}{g} \in K'$ در صورتی که $deg(f) \leq deg(g)$، $\frac{f}{g} \in A$ خواهد بود. ولی در غیر این صورت $(\frac{f}{g})^{-1} = \frac{g}{f} \in A$.

مثال ۱۴.۲.۱. اگر V' یک حلقه ارزیابی از میدان K' و K یک زیر میدان از K' باشد، $V' \cap K$ یک حلقه ارزیابی از K است.

مثال ۱۵.۲.۱. اگر در مثال ۱۱.۲.۱ تعریف کنیم

$$\vartheta(p^r \frac{m}{n}) = r \qquad \text{و} \qquad \vartheta(\circ) = \infty$$

آن گاه ϑ یک ارزیابی گسسته روی K است. برای این منظور دو عضو از $\mathbb{Q}$ مانند x و y را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$x = \frac{m_۱}{n_۱} \qquad \text{و} \qquad y = \frac{m_۲}{n_۲}$$

و $x = \frac{m_۱}{n_۱} = p^r \frac{a_۱}{b_۱}$ که p ،اعداد $a_۱$ و $b_۱$ را عاد نکند و به طور مشابه $y = \frac{m_۲}{n_۲} = p^t \frac{a_۲}{b_۲}$ که p هیچ یک از اعداد $a_۲$ و $b_۲$ را عاد نکند. در این صورت

$$xy = p^{r+t} \frac{a_۱ a_۲}{b_۱ b_۲}$$

که p هیچ یک از اعداد $a_۱ a_۲$ و $b_۱ b_۲$ را عاد نمی کند.

زیرا بنا به برهان خلف، اگر فرض کنیم که p ، $a_۱ a_۲$ را عاد کند آن گاه p ، $a_۱$ یا $a_۲$ را عاد می کند که یک تناقض است. بنابراین

$$\vartheta(xy) = r + t = \vartheta(x) + \vartheta(y)$$

و همچنین

$$x + y = p^r \frac{a_۱}{b_۱} + p^t \frac{a_۲}{b_۲}$$

با فرض $r \leq t$ داریم،

$$x + y = p^r (\frac{a_۱}{b_۱} + p^{t-r} \frac{a_۲}{b_۲})$$

و در نتیجه

$$\vartheta(x + y) \geq r = min\{\vartheta(x), \vartheta(y)\}.$$

مثال ۱۶.۲.۱. اگر در مثال ۱۲.۲.۱ تعریف کنیم $\vartheta(p^r \frac{m}{n})$ و $\vartheta(\circ) = \infty$، آن گاه مجدداً ϑ یک ارزیابی گسسته روی K' است.