دانشگاه آزاد اسلامي

واحد تهران مرکزي

دانشکده علوم پايه، گروه رياضي

پايان نامه براي دريافت درجه کارشناسي ارشد**(Msc)**

گرايش: آناليز عددي

عنوان:

روش عددی برای حل معادلات انتگرال والترا-فردهلم در فضای دوبعدی با استفاده از توابع ضربه‌ای بلوکی و ماتریس عملیاتی

استاد راهنما:

دکتر حجت ا... ادیبی

استاد مشاور:

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

پژوهشگر:

راضیه محمدحسینی

تابستان۱۳۹۲

تقدیم به :

پدر و مادر مهربانم

و

همسر عزیزم

تشکر و قدردانی :

حمد وستایش بی‌کران به درگاه خداوند که به انسان حکمت ،تفکر، تعقل و ....عطا کرد تا بتواند در پدیده‌های عالم هستی تامل کند.

اینک که با لطفش پروژه‌ی نهایی دوره کارشناسی ارشد را به اتمام رساندم، بر خودم لازم می‌دانم که از استاد عزیزم جناب آقای دکتر حجت ا... ادیبی که با سعه صدر اینجانب را در انجام این پروژه یاری رسانیده‌اند، تقدیر و تشکر نمایم.

و همچنین لازم می‌دانم صمیمانه‌ترین تشکرات خود راجناب آقای دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی که مشاوره‌ام نموده‌اند، ابراز دارم.

و همچنین از پدر و مادر مهربانم و همسر عزیزم که در طول زندگی حامی اینجانب هستند، صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.

بسمه تعالی

تعهد نامه اصالت پایان‌نامه کارشناسی ارشد

اینجانب راضیه محمد حسینی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی با شماره دانشجویی ۸۹۰۶۶۹۷۵۲۰۰ اعلام می‌نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان:

روش عددی برای حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم در فضای دوبعدی با استفاده از توابع-ضربه‌ای بلوکی و ماتریس عملیاتی ، حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم ، طبق ضوابط و رویه‌های جاری، آنرا ارجاع داده و در فهرست منابع و ماخذ ذکر نموده‌ام. علاوه بر آن تاکید می‌نماید که پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح، پایین‌تر یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می‌شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آنرا بپذیرم.

تاریخ و امضاً

بسمه تعالی

در تاریخ:

دانشجوی کارشناسی ارشد خانم، **راضیه محمدحسینی** از پایان نامه خود دفاع نموده

و با نمره ۱۷/۵ بحروف هفده نیم و با درجه

مورد تصویب قرار گرفت.

امضاً استاد راهنما

و

بسمه تعالی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

نام واحد دانشگاهی:تهران مرکزی **کد واحد:**۱۰۱	**کد شناسایی پایان نامه:** ۱۰۱۳۰۱۰۹۹۰۲۰۲۴

عنوان پایان نامه: روش عددی برای حل معادلات انتگرال والترا-فردهلم در فضای دوبعدی با استفاده از توابع ضربه‌ای بلوکی و ماتریس عملیاتی

نام ونام خانوادگی دانشجو: راضیه محمدحسینی	**تاریخ شروع پایان نامه:** ۳۱, ۳,۹۱
شماره دانشجویی:۸۹۰۶۶۹۷۵۲۰۰	**تاریخ اتمام پایان نامه:** ۳۰ , ۱۱, ۹۱
رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی	

استاد / استادان راهنما: دکتر دکتر حجت ا... ادیبی

استاد / استادان مشاور: دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

آدرس وشماره تلفن: تهران- سعادت آباد-خیابان علامه جنوبی- پلاک ۱۸-واحد۲ -۴۶۵۳ ۰۹۱۲۳۹۶

چکیده پایان نامه (شامل خلاصه، اهداف، روش های اجرا ونتایج به دست آمده):

در این پایان نامه توابع ضربه‌ای بلوکی (BPFs) و ماتریس عملیاتی در فضای دوبعدی برای حل معادلات انتگرال فردهلم-والترا، (F-VIE) استفاده می‌شود. این روش معادلات انتگرال فردهلم-والترا، را به معادلات خطی تبدیل می‌کندکه راه‌حل‌اش ضریب بسط تابع بلوکی است و منجر به حل معادلات انتگرال فردهلم-والترا، می‌شود. در پایان مثال عددی وجود دارد که نشان دهنده کاربردی بودن این روش است.

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش نامه دانشگاه $\frac{\text{مناسب است}}{\text{مناسب نیست}}$ تاریخ وامضاء:

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه توابع ضربه‌ای بلوکی (BPFs) و ماتریس عملیاتی در فضای دوبعدی برای حل معادلات انتگرال فردهلم-والترا، (F-VIE) استفاده می‌شود. این روش معادلات انتگرال فردهلم-والترا، را به معادلات خطی تبدیل می‌کندکه راه‌حل‌اش ضریب بسط تابع بلوکی است و منجر به حل معادلات انتگرال فردهلم-والترا، می‌شود. در پایان مثال عددی وجود دارد که نشان دهنده کاربردی بودن آن است و همچنین صحت این روش را بیان می‌کند.

مقدمه

تحیل و آنالیز روش‌های محاسباتی برای معادلات انتگرال چندبعدی در مقایسه با پایان نامه های فراوان در رابطه با تحلیل عددی معادلات انتگرال یک بعدی[۵] ، به تازگی آغاز شده و به خصوص در حالت غیر خطی توسعه زیادی نیافته است.

اما در هر صورت ، در ۲۰ سال گذشته پیشرفت های مهمی در این زمینه انجام شده است که شروع آن با اثر معروف برونر[۱] و کاوزن[۲] [۲] بوده که در آن روش هم محلی و هم محلی تکراری را برای حل معادلات والترای خطی دوبعدی مطرح کردند. کاوزن همچنین در [۲] این بحث را برای معادلات انتگرال والترا فردهلم خطی بسط داد و برونر نیز در [۳] شکل غیرخطی معادلات انتگرال والترا را بیان کرد.

در کتاب هان[۳] و دستیارانش، آثار فراوانی در این زمینه یافت می‌شود. آنها بسط‌های خطای مجانبی روش‌های

1.Brunner

2.Kauthen

3.Guogiang Han

قدیمی را هنگامی که برای معادلات انتگرال دوبعدی به کار می‌روند، به دست آوردند و از آنها به عنوان پایه‌ای برای معرفی الگوریتم‌های برونیابی استفاده کردند، آنها از این رویکرد برای تحلیل جواب معادله انتگرال والترا فردهلم خطی با استفاده از روش نیستروم ذوزنقه‌ای استفاده کردند.

در واقع روش معادلات انتگرالی برای حل بسیاری از معادلات ریاضی به کار برده می‌شود و مقالات زیادی در مورد معادلات انتگرالی که با راه‌حل‌ها و تحلیل‌های این معادلات در ارتباط است، وجود دارد.

در این پایان‌نامه معادلات انتگرال دوبعدی انتگرال والترا- فردهلم مطرح می‌شود واین معادله توسط

چبیشف چند فرمولی می‌شود. [۸] و همچنین توابع ضرب بلوکی مطرح می‌شوند و ویژگی هایی که این توابع

ضربه ای بلوکی دارند این است که به آسانی قابل استفاده هستند واین سادگی به شخص استفاده کننده

اجازه می‌دهد که از این فرمول‌ها برای حل معادلات انتگرال و دیگر معادلات [٤]، استفاده نماید و کاربرد

معادلات انتگرالی که به این‌صورت حل می‌شوند در مراجع [۱۱-۱۰]، نشان داده شده است.

در واقع ساختار پایان‌نامه به شرح ذیل پایه ریزی شده است.

در فصل اول به تعریف معادلات انتگرال و معرفی انواع معادلات انتگرال و خصوصیات آنها پرداخته شده است.

در فصل دوم به طور مختصر دستگاه معادلات انتگرال و نمونه‌های از روش‌های حل معادلات انتگرال و همچنین توابع ضربه‌ای بلوکی و ویژگی‌های این‌گونه توابع ذکر شده است.

در فصل سوم توابع ضربه‌ای بلوکی دوبعدی و همچنین به حل معادله انتگرال والترا نوع اول با پیدا کردن حداکثر ارزش ضریب بسط ضربه‌ای بلوکی و در پایان این فصل روش عددی برای حل معادلات انتگرال والترا – فردهلم (F-VIE) بیان شده است.

در فصل چهارم در برخی مثال‌های عددی روش پیشنهادی را به کار بسته‌ایم که صحت وکارائی این روش‌ها را نمایان می کند.

فصل ۱. معادلات انتگرال

۱.۱ تاریخچه

اولین کسی که نام معادله انتگرال را به معادلاتی که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود نسبت داد بویس ریموند[1]در سال ۱۸۸۸ بود. در واقع در سال ۱۸۷۲ لاپلاس[2] اولین بار نظریه معادلات انتگرال را مطرح کرد. او معادله انتگرال $y(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-xt} \; f(t)dt$ را مورد بررسی قرار داد. در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات فوریه[3] در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت کار برد و تئوری انتگرال فوریه در این سال‌ها شکل گرفت. به خاطر همین معمولا گفته می‌شود که مبدا معادلات انتگرال به تئوری انتگرال فوریه برمی‌گردد. در سال ۱۸۲۰ آبل[4] در مساله خود که به مسئله مکانیکی آبل معروف است کاربرد معادلات انتگرال را در چنین مسائلی مطرح کرد. در سال ۱۸۲۶ پواسن [5] در نظریه مغناطیسی و در سال ۱۸۳۲ لیوویل[6]

1.Bois reymond

2.Laplace

3.fourier

4.Able

5.poisson

6.Lioville

بطور مستقل دسته خاصی از معادلات انتگرال را حل کرد و یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط وی برداشته شد وآن چگونگی حل بعضی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود و در سال ۱۸۷۰نیومن[۷] در تبدیل مسئله دیریلکه[۸] با معادلات انتگرال برخورد کرد و از کسانی بود که نقش موثری در تکامل نظریه معادلات انتگرال داشت. در سال ۱۸۹۶برای اولین بار والترا [۹] از ایتالیا نظریه عمومی معادلات انتگرال را به شکل زیر معرفی کرد.

$$u(x) = y(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\ u(t)dt \qquad (1-1)$$

فردهلم [۱۰]در سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۳ با یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال کار والترا را تکمیل کرد.

$$u(x) = y(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\ u(t)dt \qquad (2-1)$$

7.Neuman

8.Dericlet

9.Volterra

10.Fredholm

ارائه یک سخنرانی توسط هولمگرن[11] درسال ۱۹۰۱ روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت[12] را به تحقیق در مورد معادلات انتگرال برانگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از مسائل انتگرال بهره گرفت.

همچنن قضایای فردهلم که از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند، ابتدا توسط فردهلم برای هسته‌های پیوسته بیان شدند [۵] لیکن بعدها توسط افراد دیگری نظیر کارلمان[13] و ریس[14] برای هسته‌های کلی‌تر تعمیم یافت. در طی پنجاه سال گذشته پس از فردهلم و والترا بحث اصلی معادلات انتگرال در خصوص پیشرفت آنالیز تابعی آن بود و از از اویل نیمه دوم اخیر تحقیقات زیادی روی جواب معادلات انتگرال به وسیله ویل[15] در ارتباط با این که به ازای چه مقادیری از λ معادله انتگرال جواب دارد صورت گرفت، لیکن از آنجا که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرال که در عمل با آنها مواجه می‌شویم، نیستیم لذا از همین

11 .Holmgren

12.Hilbert

13.Carleman

14.Riesz

15.Weyl

سال‌ها نیاز به روش‌های تقریبی و عددی جهت معادلات انتگرال آشکار شد و در واقع معادلات انتگرال کاربردهای فراوانی در علوم مختلف فیزیک- مکانیک ، ارتباطات، پتروشیمی، ساختمان و پل سازی و........دارد و این مسائل توسط توسط معادلات انتگرال فرموله می‌شوند.

۲.۱ تعاریف و دسته‌بندی معادلات انتگرال [۵]

۱.۲.۱ تعریف معادله انتگرال: یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر یک یا چند علامت انتگرال ظاهر شود. یک نمونه از معادله انتگرال که در آن $u(x)$ مجهول است و باید معلوم شود به صورت زیر است:

$$a(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)\ u(t)dt \qquad (۱-۳)$$

که در آن $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال‌گیری هستند. باید توجه کرد که هسته معادله $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند و همچنین $\lambda \neq ۰$ عددی مختلط یا حقیقی است.

با توجه به توسعه‌ی معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن یک تقسیم بندی جامع بر آنها ضروری به نظر می‌رسد . به خصوص این که از یک طرف در مسائل مختلف فیزیک و مهندسی انواع خاصی از معادلات انتگرال ظاهر می‌شوند و از طرف دیگر راه‌هایی که جهت حل انواع مختلف این نوع معادلات ارائه شده است متفاوتند.