IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

قضایای همگرایی قوی برای دو ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی کامل در فضاهای باناخ

استاد راهنما

دکتر عزیزی

استاد مشاور

دکتر آبکار

پژوهشگر

زهره مهرعلیان

۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: مهرعلیان نام: زهره

عنوان: *قضایای همگرایی قوی برای دو ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی کامل در فضاهای باناخ*

استاد راهنما: *دکتر عزیزی*
استاد مشاور: *دکتر آبکار*

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره) دانشکده علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۵۸

واژگان کلیدی: نگاشتهای ناانبساطی مجانبی کامل؛نقطه ثابت مشترک؛فضای باناخ محدب یکنواخت

چکیده

پایان‌نامه،قضایای همگرایی قوی برای دو ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی کامل در فضاهای باناخ را معرفی و نتایجی از نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک را ثابت می‌کند.این نتایج، چندین نتیجه‌ی نظیر شناخته شده را عمومیت می‌دهد.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عزیزی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر آبکار که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند کمال تشکر را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخشش که بهترین پشتیبان من بودند.

زهره مهرعلیان

۱۳۹۳

چکیده

پایان‌نامه،قضایای همگرایی قوی برای دو ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی کامل در فضاهای باناخ را معرفی و نتایجی از نقطه ثابت و نقطه ثابت مشترک را ثابت می‌کند.این نتایج، چندین نتیجه‌ی نظیر شناخته شده را عمومیت می‌دهد.

پیشگفتار

در این پایان نامه نقطه ثابت مشترک دو ناخود نگاشت نا انبساطی مجانبی کامل در فضاهای باناخ را مطالعه می کنیم .

این پایان نامه شامل سه فصل می‌باشد.در فصل اول، بعد از بیان تعاریف مقدماتی، نگاهی بر نگاشت‌ها و خودنگاشت‌ها و ناخودنگاشت‌های ناانبساطی مجانبی کامل که تعاریف و قضایای مربوط به نقاط ثابت و نقاط ثابت مشترک ناخودنگاشت‌های ناانبساطی مجانبی کامل آورده شده است. در فصل دوم، چند قضیه و لم که برای اثبات قضایای اصلی مورد نیاز هستند را مطالعه می‌کنیم. درفصل سوم ، قضایای همگرایی قوی برای دو ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی کامل در فضاهای باناخ را مطالعه می‌کنیم و در آخر، مثال و کاربردی آورده شده تا نتایج را تایید کند.
این پایان نامه از مقاله

' Hukmi Kiziltunc, Esra Yolacan, B: *Strong convergence theorems for two total asymptotically nonexpansive nonself mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications 2013,2013:90.'

اقتباس گردیده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و نکات مورد استفاده را بیان می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان K باشد. یک نرم بر X تابعی است مانند $\|.\| : X \longrightarrow K$ که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

الف. به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$

ب. $\|x\| = 0$ اکر و تنها اگر $x = 0$

ت. به ازای هر $x \in X$، و هر $\alpha \in K$، $\|\alpha x\| = \|\alpha\|\|x\|$

پ. به ازای هر $x, y \in K$، $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

فضای برداری X ، مجهز به یک نرم مانند $\|.\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱. دنباله $\{x_n\}$ از اعضای فضای برداری نرم‌دار X را یک دنباله‌ی کوشی نامیم هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall m, n \qquad m, n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

تعریف ۳.۲.۱. فضای متریک X را کامل نامیم اگر هر دنباله کوشی در X به عضوی از X همگرا باشد.

تعریف ۴.۲.۱. فضای برداری نرم‌دار X را یک فضای باناخ نامیم هرگاه X با متریک القا شده توسط نرم یک فضای منریک کامل باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید E فضای نرم دار حقیقی و K زیرمجموعه ناتهی از E باشد نگاشت $T : K \longrightarrow K$ ناانبساطی [۱] نامیده می‌شود اگر برای هر $x, y \in K$

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

[۱] nonexpansive

نگاشت $T:K\longrightarrow K$ ناانبساطی مجانبی نامیده می‌شود اگر یک دنباله $K_n\subset[1,\infty)$ با $K_n\longrightarrow 1$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\|T^nx-T^ny\|\leq K_n\|x-y\| \tag{1.1}$$

برای هر $x,y\in K$ و $n\geqslant 1$.

تعریف ۶.۲.۱. فضای نرم‌دار با این خاصیت که به ازای هر $\epsilon>0$، $\delta>0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر دو بردار x,y اگر $\|x\|\leqslant 1+\delta$، $\|y\|\leqslant 1+\delta$، $\|x+y\|>2$ آنگاه $\|x-y\|<+\epsilon$ را فضای باناخ محدب یکنواخت می‌نامند.

گئوبل [2] وکرک [3] ثابت کردند که اگر K یک زیر مجموعه ناتهی بسته و کران‌دار از یک فضای باناخ محدب یکنواخت باشد آن‌گاه هر خود نگاشت ناانبساطی مجانبی یک نقطه ثابت دارد. نگاشت T ناانبساطی مجانبی میانی گفته می‌شوداگر پیوسته باشد و نابرابری زیر برقرار باشد.

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x,y\in K}(\|T^nx-T^ny\|-\|x-y\|)\leq 0 \tag{2.1}$$

T شبه ناانبساطی مجانبی میانی نامیده می‌شود اگر $F(T):=\{x\in K:Tx=x\}\neq\oslash$ و (۲.۱) برای هر $x\in K,y\in F(T)$ برقرار باشد. اگر تعریف کنیم

$$a_n:=\sup(\|T^nx-T^ny\|-\|x-y\|)\quad \sigma_n:=\max\{0,a_n\} \tag{3.1}$$

---
[2] Goebel
[3] Kirk

آنگاه وقتی $n \to \infty$ ، $\sigma_n \longrightarrow ٠$ و (۲.۱) تبدیل می‌شود به:

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|x - y\| + \sigma_n \quad \forall n \geq ١, \quad x, y \in K \tag{۴.۱}$$

بروک [۴] و همکارانش دسته‌ای از نگاشت‌های ناانبساطی مجانبی میانی را در [۲] معرفی کردند. در [۳] ثابت شده است که اگر K یک زیرمجموعه ناتهی،بسته،کراندار و محدب از فضای باناخ محدب یکنواخت E باشد و T یک خودنگاشت ناانبساطی مجانبی میانی از K باشد آنگاه T یک نقطه ثابت دارد.

آلبرت [۵] وهمکارانش یک کلاس عمومی از نگاشت ناانبساطی را معرفی کردند که نگاشت‌های ناانبساطی مجانبی نامیده شدند و روش های تقریب نقطه ثابت از نگاشت های متعلق به این کلاس را مورد مطالعه قرار دادند.

تعریف ۷.۲.۱. نگاشت $T : K \longrightarrow K$ ناانبساطی مجانبی کامل نامیده می‌شود اگر دنباله‌های حقیقی نامنفی $\{\mu_n\}, \{l_n\}$، $\mu_n, l_n \longrightarrow ٠$ وقتی $n \to \infty$ وتابع اکیدا صعودی $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ با $\phi(٠) = ٠$ به قسمی موجود باشد که برای هر $x, y \in K$:

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|x - y\| + \mu_n \phi(\|x - y\|) + l_n \qquad n \geq ١ \tag{۵.۱}$$

نکته ۸.۲.۱. *اگر* $\phi(\lambda) = \lambda,$ *آنگاه* (۵.۱) *تبدیل می‌شود به*

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant (١ + \mu_n)\|x - y\| + l_n \qquad n \geq ١ \tag{۶.۱}$$

علاوه بر این اگر برای هر $l_n = ٠, n \geq ١$ نگاشتهای ناانبساطی مجانبی کامل بر نگاشت‌های ناانبساطی مجانبی منطبق می‌شوند. اگربرای هر $\mu_n = ٠, n \geq ١$ و $l_n = ٠$ از (۵.۱) دسته‌ای از نگاشت‌ها را به دست

[۴] Bruck
[۵] Albert

می‌آوریم که شامل نگاشت‌های ناانبساطی هستند. اگر برای هر $n \geq ۱$, $\mu_n = ۰$ و $l_n = \sigma_n = \max\{۰, a_n\}$ که $a_n := \sup\{\|T^n x - T^n y\| - \|x - y\|\}$ بنابراین (۵.۱) تبدیل می‌شود به (۴.۱) که به عنوان نگاشت‌های ناانبساطی میانی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

تعریف ۹.۲.۱. زیرمجموعه K از E درون‌برد از E گفته می‌شود اگر وجود داشته باشد نگاشت پیوسته $P : E \longrightarrow K$ به طوری که برای هر $x \in K$، $Px = x$. هر زیرمجموعه محدب بسته از فضای باناخ محدب یکنواخت درون‌برد است. یک نگاشت $P : E \longrightarrow K$ انقباضی گفته می‌شود اگر $P^۲ = P$. در نتیجه اگر نگاشت P یک انقباض باشد پس برای هر $y \in R(P)$, $Py = y$.

مفهوم ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی ابتدا توسط چیودیوم [6] وهمکارانش [۷] به عنوان تعمیم خودنگاشت ناانبساطی مجانبی معرفی شد.ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنیم K زیرمجموعه ناتهی از فضای خطی نرم‌دار حقیقی E باشد و $P : E \longrightarrow K$ یک انقباض ناانبساطی از E به روی K باشد یک ناخودنگاشت $T : K \longrightarrow E$ ناانبساطی مجانبی نامیده می‌شود اگر وجود داشته باشد دنباله $\{k_n\} \subset [۱, \infty)$ با $k_n \longrightarrow ۱$ وقتی $n \to \infty$ به طوری که:

$$\left\|T(PT)^{n-۱}x - T(PT)^{n-۱}y\right\| \leq k_n \|x - y\| \quad \forall n \geq ۱ \quad x, y \in K \quad (۷.۱)$$

چی دیوم و همکارانش [۱۲] یک کلاس عمومی از نگاشت‌های ناانبساطی مجانبی کامل را به عنوان تعمیم ناخودنگاشت‌های ناانبساطی مجانبی معرفی کردند.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم K زیرمجموعه محدب بسته وناتهی از E باشدو $P : E \longrightarrow K$ انقباض ناانبساطی از E به روی K باشد ناخودنگاشت $T : K \longrightarrow E$ ناانبساطی مجانبی کامل گفته می‌شود اگر

[6] Chidume

وجود داشته باشد دنباله‌های $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$و $\{l_n\}_{n\geq 1}$ در $[0,+\infty)$ با $\mu_n, l_n \longrightarrow 0$ وقتی $n\to\infty$ و تابع پیوسته اکیدا صعودی $\phi:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ با $\phi(0)=0$ به طوری که برای همه $x,y\in K$ ؛

$$\left\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\right\| \leq \|x-y\| + \mu_n\phi(\|x-y\|)+l_n \quad n\geq 1 \qquad (۸.۱)$$

در [۷] چی دیوم وهمکارانش در مورد دنباله تکرارشونده زیر مطالعه کردند.

$$x_{n+1} = P((1-a_n)x_n + a_nT(PT)^{n-1}x_n, \quad x_1\in K, \quad n\geq 1 \qquad (۹.۱)$$

که در شرایط مناسب نقطه ثابت T راتقریب می‌کند. در [۱۳] وانگ [۷] دنباله تکرار (۹.۱) را به شرح زیر تعمیم داد.

$$\begin{cases} x_{n+1} = P((1-\alpha_n)x_n + \alpha_nT_1(PT_1)^{n-1}y_n) \\ y_n = P((1-\alpha'_n)x_n + \alpha'_nT_2(PT_2)^{n-1}x_n) \quad x_1\in K \quad n\geq 1 \end{cases} \qquad (۱۰.۱)$$

که $T_1,T_2:K\longrightarrow E$ ناخود نگاشت‌های ناانبساطی مجانبی و $\{\alpha_n\}$و$\{\alpha'_n\}$ دنباله‌هایی در $[0,1]$ هستند.آنها تحت شرایط مناسب همگرای قوی و ضعیف را برای دنباله تکرار (۱۰.۱) مطالعه کردند. در [۱۴] شهزاد [۸] دنباله تکرار زیر را مطالعه کرد.

$$x_{n+1} = P((1-a_n)x_n + a_nTP[(1-\beta_n)+\beta_nTx_n]) \quad x_1\in K \quad n\geq 1 \qquad (۱۱.۱)$$

که در آن $T:K\longrightarrow E$ یک ناخودنگاشت ناانبساطی است و K یک درون‌برد ناانبساطی محدب بسته ناتهی از یک فضای باناخ محدب یکنواخت حقیقی E با انقباض ناانبساطی P است. اخیرا تیان‌وان [۹] [۱۵] دنباله

[۷] Wang
[۸] Shahzad
[۹] Thianwan

تکرار (۱.۱۱) را به شرح زیر تعمیم داد:

$$\begin{cases} x_۱ \in K \\ x_{n+۱} = P((۱-\alpha_n-\gamma_n)x_n + \alpha_n TP((۱-\beta_n)y_n + \beta_n Ty_n) + \gamma_n u_n) \\ y_n = P((۱-\alpha'_n-\gamma'_n)x_n + \alpha'_n TP((۱-\beta'_n)x_n + \beta'_n Tx_n) + \gamma'_n v_n) \end{cases} \quad (۱.۱۲)$$

که $\{\alpha_n\}$،$\{\beta_n\}$،$\{\gamma_n\}$،$\{\alpha'_n\}$،$\{\beta'_n\}$،$\{\gamma'_n\}$ دنباله‌هایی در $[۰,۱]$ هستند و $\{u_n\}$،$\{v_n\}$ دنباله‌های کران‌داردر k هستند. او قضایای همگرایی قوی و ضعیف برای ناخودنگاشت ناانبساطی در فضای باناخ یکنواخت محدب را اثبات کرد. طرح تکرار (۱.۱۳) به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار و K یک زیرمجموعه محدب ناتهی از E، $T: E \longrightarrow K$ یک درون برد ناانبساطی از E به روی K و $T_۱, T_۲ : K \longrightarrow E$ دو ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی کامل باشند.بنابراین برای $x_۱ \in K$ دلخواه و $n \geq ۱$ دنباله $\{x_n\}$ را به وسیله طرح تکرارشونده زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_{n+۱} = P((۱-\alpha_n)x_n + \alpha_n T_۱ P(T_۱)^{n-۱}((۱-\beta_n)y_n + \beta_n T_۱(PT_۱)^{n-۱}y_n)) \\ y_n = P((۱-\alpha'_n)x_n + \alpha'_n T_۲(PT_۲)^{n-۱}((۱-\beta'_n)x_n + \beta'_n T_۲(PT_۲)^{n-۱}x_n)), \end{cases} \quad (۱.۱۳)$$

که $\{\alpha_n\}$،$\{\beta_n\}$ ،$\{\alpha'_n\}$،$\{\beta'_n\}$ دنباله‌هایی در $[۰,۱]$ هستند.طرح تکرار شونده (۱.۱۳) تعمیم طرح‌های تکرار شونده (۱.۱۰)، (۱.۱۱)، (۱.۱۲) است. تحت شرایط مناسب دنباله $\{x_n\}$ که به وسیله دنباله تکرار (۱.۱۳) تعریف شد می‌تواند به دنباله‌های تکرار با خطا تعمیم داده شود. بنابراین تمام نتایج ثابت شده در این مقاله را می‌توان برای دنباله تکرار با خطا ثابت کرد.در این مورد روند اصلی شبیه دنباله تکرار (۱.۱۳) است.

$$\begin{cases} x_۱ \in K \\ x_{n+۱} = P((۱-\alpha_n-\gamma_n)x_n + \alpha_n T_۱(PT_۱)^{n-۱}((۱-\beta_n)y_n + \beta_n T_۱(PT_۱)^{n-۱}y_n) + \gamma_n u_n) \\ y_n = P((۱-\alpha'_n-\gamma'_n)x_n + \alpha'_n T_۲(PT_۲)^{n-۱}((۱-\beta'_n)x_n + \beta'_n T_۲(PT_۲)^{n-۱}x_n) + \gamma'_n v_n) \end{cases} \quad (۱.۱۴)$$

که $\{\alpha_n\}$،$\{\beta_n\}$،$\{\gamma_n\}$،$\{\alpha'_n\}$،$\{\beta'_n\}$،$\{\gamma'_n\}$ دنباله‌هایی در $[۰,۱]$ و

$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n = ۱ = \alpha'_n+\beta'_n+\gamma'_n$، $\{u_n\}$،$\{v_n\}$ دنباله‌های کران‌داردر K هستند. دنباله تکرارشونده

(۱۴.۱) وقتی که $\gamma_n = \circ = \gamma'_n$ باشد، به دنباله تکرار (۱۳.۱) تبدیل می‌شود.

فصل ۲

فضای باناخ یکنواخت محدب

۱.۲ مقدمه

در این فصل لم‌ها و قضایای مورد استفاده را بیان می‌کنیم.

۲.۲ نگاشت‌های موضعا فشرده

فرض کنیم E یک فضای باناخ با $diamE \geq 2$ باشد مدول‌های E به صورت تابع $\delta_E : (0, 2] \longrightarrow [0, 1]$ هستند که به وسیله رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\{1 - \|\frac{1}{2}(x + y)\| : \|x\| = \|y\| = 1, \varepsilon = \|x - y\|\}$$

یک فضای باناخ E یکنواخت محدب است اگرو تنها اگر $\delta_E(\varepsilon) > 0$ برای تمام $\varepsilon \in (0, 2]$

نگاشت $T : K \longrightarrow E$ با $F(T) \neq \oslash$ در شرط A، [۱۷] صدق می‌کند اگر وجود داشته باشد یک تابع نانزولی $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ با $f(0) = 0$،$f(t) > 0$ برای همه $t \in (0, \infty)$ به طوری که $\|x - Tx\| \geqslant f(d(x, F(T)))$ برای هر $x \in K$ که $d(x, F(T)) = \inf\{\|x - p\| : p \in F(T)\}$.

دو نگاشت $T_1, T_2 : K \longrightarrow E$ در شرط (A')، [۱۸] صدق می‌کنند اگر وجود داشته باشد تابع نانزولی $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ با

$f(0) = 0$،$f(t) > 0$ برای هر $t \in (0, \infty)$ به طوری که

$$\frac{1}{2}(\|x - T_1x\| + \|x - T_2x\|) \geqslant f(d(x, \mathcal{F}))$$

برای هر $x \in K$ که

$$d(x, \mathcal{F}) = \inf\{\|x - p\| : p \in \mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2)\}$$

نگاشت $T : K \longrightarrow K$ موضعا فشرده [1] نامیده می‌شود اگر هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در K طوری‌که $\{x_n - Tx_n\}$ همگرا باشد، زیردنباله همگرا داشته باشد. نگاشت $T : K \longrightarrow K$ نیم فشرده [2] نامیده می‌شود

[1] demicompact
[2] semicompact

اگر هر دنباله کران‌دار $\{x_n\}$ که در K $\{x_n - Tx_n\} \longrightarrow 0$ وقتی $n \to \infty$، زیردنباله همگرا داشته باشد.

گزاره ۱.۲.۲. *فرض کنید K یک زیرمجموعه محدب بسته وناتهی از E و $P : E \longrightarrow K$ انقباض ناانبساطی از E و $T_1, T_2 : K \longrightarrow E$ دو ناخود نگاشت ناانبساطی مجانبی کامل باشند آنگاه وجود دارد دنباله‌های نامنفی $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ ، $\{l_n\}_{n\geq 1}$ در $[0, +\infty)$ با $\mu_n, l_n \longrightarrow 0$ وقتی $n \to \infty$ و یک تابع پیوسته اکیدا صعودی $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ با $\phi(0) = 0$ موجود است به طوری که برای هر $x, y \in K$ ؛*

$$\left\|T_i(PT_i)^{n-1}x - T_i(PT_i)^{n-1}y\right\| \leq \|x - y\| + \mu_n\phi(\|x - y\|) + l_n \quad n \geq 1 \tag{1.2}$$

برای $i = 1, 2$

برهان. چون $T_i : K \longrightarrow E$ ناخود نگاشت ناانبساطی مجانبی کامل است $(i = 1, 2)$ بنابراین وجود دارند دنباله‌های حقیقی نامنفی $\{\mu_{in}\}$، $\{l_{in}\}$، $n \geq 1$ با $\mu_{in}, l_{in} \longrightarrow 0$ وقتی $n \to \infty$ و تابع اکیدا افزایشی $\phi_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ با $\phi_i(0) = 0$ به طوری که برای هر $x, y \in K$ ؛

$$\left\|T_i(PT_i)^{n-1}x - T_i(PT_i)^{n-1}y\right\| \leq \|x - y\| + \mu_{in}\phi_i(\|x - y\|) + l_{in} \quad n \geq 1$$

قرار دهید :

$\mu_n = \max\{\mu_{1n}, \mu_{2n}\}$ ،$l_n = \max\{l_{1n}, l_{2n}\}$ ،$\phi(a) = \max\{\phi_1(a), \phi_2(a)\}$ برای $a \geq 0$. بنابراین دنباله‌های حقیقی نامنفی $\{\mu_n\}$، $\{l_n\}$، $n \geq 1$ با $\mu_n, l_n \longrightarrow 0$ وقتی $n \to \infty$ و تابع اکیدا افزایشی $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ با $\phi(0) = 0$ به طوری که برای هر $x, y \in K$ و هر $i = 1, 2$ ؛

$$\begin{aligned}\left\|T_i(PT_i)^{n-1}x - T_i(PT_i)^{n-1}y\right\| &\leq \|x - y\| + \mu_{in}\phi_i(\|x - y\|) + l_{in} \\ &\leq \|x - y\| + \mu_n\phi(\|x - y\| = l_n \quad n \geq 1\end{aligned}$$

□

سنتر [3] و داتسون [4]، [۱۷] نقاط ثابت نگاشت ناانبساطی T را به وسیله تکرار مان تقریب زدند.در حالیکه مایتی [5] و قوش [6] [۱۸] وتان [7] و خؤ [8] [۱۸] نقاط ثابت استفاده شده در تکرار ایشیکاوا را تحت شرایط (A) از سنتر و داتسون [۱۷] تقریب زدند. تان و خی [۷] اشاره کرده‌اند که شرایط (A) ضعیف‌تر است از فشردگی K.

در نهایت،برای اثبات نتایج اصلی به دو لم زیر نیاز داریم.

لم ۲.۲.۲. [۸] *فرض کنید $\{a_n\}$، $\{b_n\}$، $\{c_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی نامنفی باشند که در نابرابری زیر صدق می‌کنند*

$$a_{n+1} \leqslant (1 + b_n)a_n + c_n \qquad n \geqslant 1$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ سپس

(i) $\lim_{n\to\infty} a_n$ *وجود دارد؛*

(ii) *اگر $\{a_n\}$ یک زیردنباله به طور قوی همگرا به صفر داشته باشد آنگاه* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

لم ۳.۲.۲. [۱۹] *فرض کنیم $p > 1$ و $R > 0$ دو عدد ثابت و E یک فضای باناخ باشند. E یکنواخت محدب است اگر و تنها اگر یک تابع اکیدا صعودی ومحدب $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ وجود داشته باشد با $g(0) = 0$ به طوری که*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \leqslant \lambda\|x\|^p + (1-\lambda)\|y\|^p - W_p(\lambda)g(\|x-y\|) \qquad (۲.۲)$$

برای هر $x, y \in B_R(0)$ که $B_R(0) = \{x \in E; \|x\| \leqslant R\}$

و $\lambda \in [0,1]$ که $W_p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)^p + \lambda^p(1-\lambda)$.

---

[3] Senter
[4] Dotson
[5] Maiti
[6] Ghosh
[7] Tan
[8] Xu

فصل ۳

نتایج اصلی

۱.۳ مقدمه

در این فصل نقطه ثابت مشترک دو ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی کامل $T_۱$ و $T_۲$ را بررسی می‌نماییم و نتایجی که در مراجع این پایان نامه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند را تعمیم می‌دهیم. ابتدا دنباله $\{x_n\}$ را توسط رابطه (۱۳.۱) تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از قضایا و لم‌هایی که در این فصل مطالعه می‌کنیم، ثابت می‌کنیم دنباله $\{x_n\}$ به نقطه ثابت مشترک $T_۱$ و $T_۲$ همگرای قوی است.در پایان دنباله $\{x_n\}$ را به وسیله رابطه تکرار باخطا (۱۴.۱) که تعمیم رابطه (۱۳.۱) است،تعریف کرده و تمام نتایج ثابت شده توسط رابطه (۱۳.۱) را برای رابطه (۱۴.۱) ثابت می‌کنیم.

۲.۳ قضایای همگرایی قوی برای ناخودنگاشت‌های ناانبساطی

لم ۱.۲.۳. *فرض کنید E فضای باناخ حقیقی و K یک زیرمجموعه بسته محدب و ناتهی از E باشد که یک انقباض ناانبساطی از E نیز هست.و $T_۱,T_۲ : K \longrightarrow E$ دو ناخودنگاشت ناانبساطی مجانبی کامل با دنباله‌های $\{l_n\}$،$\{\mu_n\}$ تعریف شده در (۱.۲.۲) به طوری که $\sum_{n=۱}^{\infty} \mu_n < \infty$، $\sum_{n=۱}^{\infty} l_n < \infty$ و*

$$\mathcal{F} := F(T_۱) \cap F(T_۲) = \{x \in K : T_۱x = T_۲x = x\} \neq \emptyset$$

فرض کنید $M, M^* > ۰$ موجود باشند به طوری که $\phi(\lambda) \leqslant M^*\lambda$ برای همه $\lambda \geqslant M$. با شروع از یک $x_۱ \in K$ دلخواه، دنباله $\{x_n\}$ را به وسیله دنباله تکرار (۱۳.۱) تعریف می‌کنیم در این صورت دنباله $\{x_n\}$ کران‌دار و $(p \in \mathcal{F})$ $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ وجود دارد.

برهان. فرض کنیم $p \in \mathcal{F}$. قرار می‌دهیم

$$\sigma_n = (۱ - \beta_n)y_n + \beta_n T_۱(PT_۱)^{n-۱} y_n$$

$$\delta_n = (۱ - \beta'_n)x_n + \beta'_n T_۲(PT_۲)^{n-۱} x_n$$