دانشگاه علامه طباطبایی

دانشکده اقتصاد

گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد ریاضیات کاربردی گرایش ریاضیات مالی

عنوان

مدل چندعاملی کاکس-اینگرسل-راس و ساختارزمانی نرخ‌های بهره

پژوهشگر

فاطمه فیض‌آبادی

استاد راهنما

دکتر محمد جلوداری ممقانی

استاد مشاور

دکتر عبدالرحیم بادامچی زاده

بهمن‌ماه ۱۳۹۰

تأیید پایان‌نامه‌ی‌کارشناسی ارشد توسط دانشجو

عنوان پایان نامه: مدل چندعاملی کاکس-اینگرسل-راس و ساختارزمانی نرخ‌های بهره

نام دانشجو: فاطمه فیض آبادی

شماره دانشجویی: ۸۸۱۲۵۶۰۰۱۱۸

استادراهنما: دکترمحمدجلوداری ممقانی

اینجانب **فاطمه فیض‌آبادی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی **ریاضیات مالی** دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه علامه طباطبائی گواهی می‌نمایم پژوهش‌های ارایه‌شده در پایان‌نامه با عنوان مذکور توسط شخص اینجانب انجام شده است و درستی مطالب نگارش یافته مورد تأیید است. همچنین گواهی می‌نمایم مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ کجا ارایه نشده است و در نگارش متن پایان‌نامه، شیوه‌ی نگارش مصوب دانشکده‌ی اقتصاد را به طورکامل رعایت نموده‌ام. چنان‌چه در هر زمان خلاف آن‌چه گواهی نموده‌ام مشاهده گردد، خود را از آثار حقیقی و حقوقی ناشی از دریافت مدرک کارشناسی ارشد محروم می‌دانم و هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

تاریخ: **امضا دانشجو:**

تقدیم به **مادرمهربان و پدر عزیزم**

به خاطر تمام عشق و محبتی که در دوران تحصیل بر من ارزانی داشتند

وتقدیم به **یگانه برادرم علی**

سپاس نامه

بارالها

آن‌قدر قادری که بهترین‌ها را درمسیرم قرار دادی تا یاری‌ام کنند

و آن‌قدر مهربانشان آفریدی که توان سپاس‌گزاری شان در بیانم نیست

پس به رسم احترام در برابر اساتید بزرگوار

جناب‌آقای دکتر محمد جلوداری‌ممقانی، استاد راهنمای مهربانم به پاس دقت، صبر، حوصله و راهنمایی‌هایشان،

جناب آقای دکتر عبدالرحیم بادامچی زاده، استاد مشاور خوبم به پاس دلسوزی‌ها و لطف‌های بی‌دریغشان،

خانم دکتر شیوا زمانی و آقای دکتر رضا پورطاهری داوران محترم این پایان‌نامه به پاس توجه و یادآوری‌هایشان

سر تعظیم فرود می‌آورم.

اگر نبود همراهی پدر، مادر و برادرم، طی این طریق ممکن نبود. دست آنها را می‌بوسم.

از خانم صفری عزیز به خاطر تمام محبتهایشان سپاسگزارم.

اگر در فراقی، وصل شو

اگر بیتابی، صبرکن

اگر مشتاقی، بجوی تا بیابی.

فاطمه فیض آبادی

بهمن ۱۳۹۰

چکیده

از آن‌جا که نرخ بهره متغیر است؛ هر مشتقه‌ای که برای دارایی خاصی تعریف می‌کنیم؛ تابعی از نرخ بهره آن دارایی نیز خواهد بود. از این‌رو برای نرخ‌های بهره نیز مشتقاتی در نظر گرفته می‌شود. از دیدگاه فعالان اقتصادی یکی از جذاب‌ترین مشتقاتی که تا به حال برای نرخ‌های بهره تعیین شده است؛ اختیار معامله نرخ‌های بهره است که به‌عنوان نمونه می‌توان از اختیارهای سقف و کف نرخ بهره نام برد.

برای مطالعه رفتار نرخ‌های بهره، مدل‌های گوناگونی معرفی شده‌است که از آنها برای قیمت‌گذاری مشتقات نرخ بهره استفاده می‌شود. یکی از این مدل‌ها مدل کاکس- اینگرسل- راس است. قیمت‌گذاری مشتقات روی یک دارایی، مسئله رایجی است؛ اما زمانی که می‌خواهیم روی چند دارایی‌پایه به طور همزمان مشتقه تعریف کنیم؛ مسئله مهم، وابستگی نرخ‌های بهره این دارایی‌ها به یکدیگر است. یکی از مدل‌هایی که این مطلب را مورد توجه قرار می‌دهد؛ مدل چندعاملی کاکس-اینگرسل-راس است. در این مدل، نرخ‌های بهره در یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی با شرایط اولیه صدق می‌کند. تابع چگالی احتمال انتقال این مدل، تابع چگالی نرخ‌های بهره است. مزیت اصلی تابع چگالی احتمال انتقال، فراهم آوردن امکان محاسبه ارزش اختیار معامله نرخ بهره در زمان‌های قبل از سررسید است.

بااستفاده از فرمول ایتو یک معادله دیفرانسیل جزیی برای مدل چندبعدی کاکس-اینگرسل-راس می‌نویسیم و سپس معادله فاکر-پلانک مدل را به‌دست‌می‌آوریم. در ادامه با استفاده از روش اختلال، تبدیل فوریه، روش مشخصه‌ها و تبدیل فوریه معکوس، تابع چگالی احتمال انتقال را به دست می‌آوریم. این روش که به‌طورکامل از روش ها و قواعد آنالیز ریاضی تبعیت می‌کند؛ نسبت به روش‌های عددی، به مراتب از دقت بالاتری برخوردار است. عبارتی که در نهایت برای تابع چگالی احتمال انتقال به دست می‌آوریم؛ با وجود آن که تنها توابع مقدماتی را شامل می‌شود؛ می تواند برای قیمت‌گذاری مشتقات روی ده‌ها دارایی با نرخ‌های بهره وابسته به‌یکدیگر مورد استفاده قرار گیرد. به‌همین‌دلیل فرمول چگالی احتمال انتقال مورد مطالعه در این پایان‌نامه، در محاسبات موازی و در نتیجه در بازارهای لایبر کاربرد می‌یابد.

واژگان کلیدی: تابع چگالی احتمال انتقال، معادله فاکر-پلانک، روش‌اختلال، ادامه‌تحلیلی، روش‌مشخصه‌ها، تابع بسل

فهرست مطالب

پیشگفتار

با گسترش معاملات در بازار و تعریف دارایی‌های‌مالی جدیدی که هریک به چند نرخ‌بهره کوتاه‌مدت وابسته‌اند و یا تعریف مشتق‌های مالی برای چندین دارایی به طورهمزمان، مدل‌های چندعاملی اهمیت ویژه‌ای یافته‌اند. به‌طور مثال، در بازارهای لایبر همزمان چندصد دارایی با نرخ‌های بهره وابسته به یکدیگر معامله می‌شوند. در این پایان‌نامه، در ساده‌ترین حالت، دارایی مالی‌ای را در نظر می‌گیریم که به دو نرخ بهره وابسته است. مرجع اصلی این پایان‌نامه، مقاله‌ای با عنوان "روشی برای محاسبه‌ی تابع چگالی احتمال انتقال مدل چندعاملی کاکس-اینگرسل-راس بدون رانش"([۱۶]) است.

در فصل‌اول اختیار خریدی برای این نرخ‌های بهره تعریف می‌کنیم. وابستگی این نرخ‌ها بر ارزش اختیارخرید اثر می‌گذارد و در صورتی‌که سررسیدهای این نرخ‌ها با یکدیگر متفاوت باشد؛ مسئله پیچیده‌تر می‌شود. سررسیدهای متغیر موجب به‌کارگیری مدل‌های ساختارزمانی، وابستگی قیمت دارایی مالی به این نرخ‌ها و وابستگی نرخ‌ها به یکدیگر موجب به‌کارگیری مدل‌های عاملی می‌شود.

در فصل‌دوم، انواع مدل‌های‌عاملی برای ساختارزمانی و به طورخاص مدل‌های‌عاملی آفین را معرفی می‌کنیم. در پایان فصل دوم، مدل دوعاملی کاکس-اینگرسل-راس را که از انواع مدل‌های عاملی آفین است؛ به عنوان مدل تحقیق انتخاب می‌کنیم. فرایند تصادفی در این مدل، فرایند تصادفی ریشه دوم است؛ به همین دلیل در این مدل‌ها، جواب هرگز منفی نمی‌شود.

در فصل‌سوم، ارزش اختیار برای دو نرخ بهره را معرفی می‌کنیم؛ اما بازار نیازمند اطلاع از ارزش این اختیار در زمان‌های قبل از سررسید است. برای پیداکردن این ارزش، باید انتگرالی شامل تابع چگالی احتمال انتقال نرخ‌های‌بهره را حل کنیم. این تابع چگالی در معادله فاکر-پلانک صدق می‌کند. با استفاده از بعضی روش‌های آنالیز حقیقی و مختلط از جمله تبدیل‌فوریه، ادامه تحلیلی، روش مشخصه‌ها و ... این معادله را حل می‌کنیم و با قراردادن جواب در انتگرال موردنظر، ارزش اختیار را در زمان‌های قبل از سررسید به‌دست می‌آوریم. هدف اصلی در این پایان نامه پیداکردن تابع چگالی احتمال انتقال مدل چندعاملی کاکس-اینگرسل-راس بدون رانش است که موجب به دست آوردن ارزش اختیار در زمان‌های قبل از سررسید می‌شود.

در فصل‌چهارم، با ارائه یک مثال عددی، دقت این روش را با دقت روش‌های عددی مقایسه می‌کنیم.

فصل اول

طرح و کلیات تحقیق

۱-۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، معاملات اختیارهای خرید و اختیارهای فروش نرخ‌های بهره[۱] با استقبال زیادی روبه‌رو بوده‌اند و اغلب در بورس‌های رسمی و بازارهای خارج از بورس[۲] هواداران بسیاری را به خود جلب نموده‌اند. رایج‌ترین اختیارات نرخ بهره خارج از بورس، کف‌ها و سقف‌های[۳] نرخ بهره و اختیارهای معاوضه اروپایی[۴] هستند.

برای مطالعه رفتار نرخ‌های بهره، مدل‌های گوناگونی معرفی شده‌است. مدل وسیچک[۵]، مدل هو-لی[۶]، مدل کاکس-اینگرسل-راس[۷] و مدل هال-وایت[۸] نمونه‌هایی از این مدل‌ها هستند که به طورخاص ساختارزمانی نرخ‌های بهره را مطالعه می‌کنند. ساختارزمانی نرخ‌های بهره، ارتباط میان بهره‌های اوراق بهادار بدون نکول را که تنها در تاریخ سررسید با یکدیگر تفاوت دارند، بررسی می‌کند. درک این ارتباط برای فعالان بازارهای پول و سرمایه بسیار بااهمیت است، زیرا با استفاده از آن می‌توانند اثر تغییر متغیرهای اصلی را روی منحنی بازده[۹] پیش‌بینی نمایند[۱۲].

در زمینه ساختارزمانی نرخ های بهره، نظریه های بسیاری ارائه شده است. بعضی از این نظریه‌ها نرخ بهره را در بازارهای مطمئن[۱۰] مورد بررسی قرار داده‌اند. در یک بازار امن، نرخ‌سلف با نرخ نقدی مورد انتظار در سررسید برابر است. اما وجود عدم اطمینان در بازارهای واقعی موجب می‌شود که این دو قیمت با یکدیگر برابر نباشند. فرض‌هایی که در این زمینه ارائه شده‌اند، به فرض‌های‌انتظارات[۱۱]موسوم هستند. فرض رجحان نقدشوندگی[۱۲](هیکس[۲۲]) و فرض تقطیع بازار[۱۳](کولبرستون[۱۵]) دو نمونه از این فرض‌ها هستند. مدیلیانی و سوچ[۱۴][۲۸] نیز نظریه خود را بر مبنای روش کولبرستون و چند نظریه دیگر ارائه دادند.

---

1 : interest rate option
2 : over the counter
3 : floors and caps
4 : European swap option
5 : Vasicek model
6 : Ho-Lee mode
7 : Cox-Ingersoll-Ross model
8 : Hull-White model
9 : yield curve
10 : certainty market
11 : expectations hypothesis
12 : the liquidity preference hypothesis
13 : the market segmentation hypothesis
14 : F. Modigliani and R.sutch

کاکس، اینگرسل و راس[15]در ۱۹۸۵، ساختارزمانی نرخ‌های بهره را با توجه به نظریه تعادل[16] مدل‌سازی کردند. مدل آنها که به مدل CIRمعروف است، خانواده‌ای غنی از مفاهیم تجربی و عناصر فرض‌های پیشین درباره ساختارزمانی نرخ بهره را دربردارد و در واقع تعمیم‌یافته مدل وسیچک است. این مدل، علاوه بر قیمت‌گذاری نرخ بهره اوراق بهادار بدون نکول، در قیمت‌گذاری اختیارهای معامله اوراق قرضه، اوراق قرضه قابل بازخرید و دیگر انواع قراردادهای مالی به کار می‌رود. مدل CIR به‌خوبی می‌تواند تأثیر تغییر متغیرهای اساسی را در ساختارهای زمانی نرخ بهره نشان‌دهد. کاکس، اینگرسل و راس در مدل خود فرایندتصادفی ریشه دوم[17] را به عنوان مدل نرخ‌های بهره کوتاه‌مدت معرفی کردند. فرایندهای تصادفی ریشه دوم در سال های اخیر به شدت مورد توجه قرار گرفته اند. هاوزر و لوتر باخ[18]در۱۹۹۶دریافتند که در بازارهای واقعی قیمت اختیار روی مدلی که بر مبنای فرایند تصادفی ریشه دوم مدل‌سازی می‌شود؛ بهتر برازش می‌شود. مدل تک‌عاملی CIR برای قیمت‌گذاری مشتق‌ها روی یک دارایی به کار می‌رود. حالتی را در نظربگیرید که روی چند دارایی‌پایه به طورهمزمان یک مشتق مالی- مثلاً اختیار معامله-تعریف شده‌است؛ دراین‌صورت مسئله اصلی، وابستگی نرخ‌های بهره این دارایی‌ها به یکدیگر است. این مهم، ما را به مطالعه مدل‌های نرخ‌بهره چندعاملی سوق‌می‌دهد. بنابراین در این پایان‌نامه مدل چندعاملی کاکس- اینگرسل- راس را مورد توجه قرارمی‌دهیم. ازآن‌جاکه کاربرد عمده این مدل در بازارهای لایبر[19] است؛ مختصری از تاریخچه مدل بازار لایبر را بیان می‌کنیم.

۱-۱-۱ پیدایش مدل بازار لایبر[20]

اگرچه مدل بلک-شولز[21] در تبیین قیمت اختیارهای معامله سهام موفق بوده است؛ اما در بیان قیمت اختیارهای معامله ارز، انعطاف لازم را نداشته است. این ناتوانی دور از انتظار نیست؛ زیرا مدل بلک-شولز از این فرض که دارایی پایه اختیار دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس معلوم است؛ تبعیت می‌کند.

از آن جا که فرمول بلک-شولز به میانگین بازده نقدی بستگی ندارد؛ نمی تواند تغییرات مقدار میانگین را در لحظات مختلف نمایش دهد. اسکات[22]، هال و وایت[23] و ویگینز[24] این مدل را به مدل هایی که به میانگین بازده نقدی بستگی داشته و تلاطم تصادفی دارند؛ تعمیم داده‌اند. ملینو و ترن بول در۱۹۹۰ ادعا نمودند که مدل‌های دارای تلاطم تصادفی در قیمت‌گذاری اختیارهای معامله ارز، موفق‌تر از مدل بلک-شولز هستند. اما ویژگی آزاردهنده‌ای که در اغلب مدل های دارای تلاطم تصادفی به چشم می‌خورد؛ این بود که جواب‌های فرم بسته‌ای برای آنها وجود نداشته و بنابراین نیاز به توسعه تکنیک‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل

---

15 : J.C.Cox, J.E.Ingersoll and S.A.Ross
16 : equilibrium theory
17 : square-root stochastic process
18 : S.Hauser and B.Lauterbach
19 : London Inter Bank Offer Rate (LIBOR)
20 : Libor market model
21 : Black-Scholes(1972)
22 : Scott(1987)
23 : Hull and White(1987)
24 : Wiggins(1987)

جزیی مراتب بالا برای یافتن قیمت اختیار وجود داشت. برای حل این معضل، جرو[۲۵]، ایسنبرگ[۲۶] و استین[۲۷] فرض کردند که تلاطم تصادفی وجود دارد اما به میانگین بازده نقدی وابسته نیست.

از طرفی سایر مدل‌هایی که تحت عنوان مدل‌های بازار استاندارد[۲۸]، در ریاضیات مالی ظاهر شدند؛ نسخه‌های مختلف مدل بلک-شولز بودند که از اغلب آنها برای قیمت گذاری اختیارهای معامله آتی‌های کالا استفاده شد. هرچند رفته رفته، کاربردهای دیگری نیز در ریاضیات مالی پیدا کردند. برای مثال با این فرض که نرخ‌بهره توزیع لگ نرمال دارد؛ از مدل‌های بازار استاندارد برای قیمت‌گذاری کپلت‌ها[۲۹](یک واحد از یک کف نرخ‌بهره) استفاده شد. همچنین با این فرض که نرخ معاوضه دارایی، توزیع لگ نرمال دارد؛ از این مدل‌ها برای قیمت‌گذاری معاوضات اروپایی استفاده کردند.

در سال ۱۹۹۷ عده ای از محققان از جمله جمشیدیان[۳۰]، موزیلا[۳۱]، میلترسن[۳۲]، ساندرمن[۳۳] و سندرمن[۳۴] مفهوم جدیدی به نام مدل بازار لایبر را برای قیمت‌گذاری اختیارهای معامله ارز معرفی کردند. لایبر، نرخ پیشنهادی بانک‌های بین‌المللی لندن است که از سوی اتحادیه بانکداران بریتانیایی[۳۵] برای بانک‌های معتبر به صورت روزانه در سیستم رویترز اعلام می‌گردد. بانک‌های سراسر جهان برای الف) اعطای وام به شرکت‌های بزرگ بین‌المللی، ب) محاسبه میزان سود سپرده‌های سرمایه‌گذاری ارزی و ج) دریافت وام از بانک های بین‌المللی از این نرخ استفاده می کنند. نرخ لایبر با فرمول

$$L(t,T)=\frac{1}{\delta}\left(\frac{p(t,T)}{p(t,T+\delta)}-1\right)$$

محاسبه می‌شود؛ که درآن $\delta>0$ یک دوره ثابت مثلاً ۳ماهه است؛ $p(t,T)$ قیمت اوراق قرضه با سررسید T در زمان t و $p(t,T+\delta)$ قیمت اوراق قرضه با سررسید $T+\delta$ در زمان t است. وقتی $\delta\to 0$ نرخ لایبر برابر با نرخ سلف $f(t,T)$ می‌گردد.

قضیه ۱-۱-۱: توزیع نرخ لایبر $\{L(t,T)\}_{t\in[0,T],T>0}$ لگ نرمال است و داریم

$$1+\delta L(t,T)=\frac{p(t,T)}{p(t,T+\delta)}=\frac{E^{Q}\left\{e^{-\int_t^T r(s)ds}\,|\Im_t\right\}}{p(t,T+\delta)}=E^{Q^{T+s}}\left\{e^{\int_T^{T+\delta} r(s)ds}\,|\Im_t\right\}$$

---

25 : Jarrow
26 : Eisenberg(1991)
27 : Stein(1991)
28 : Standard Market Models
29 : caplet
30 : Jamshidian
31 : Musiela
32 : Miltersen
33 : Sandmann
34 : Sondermann
35 : British Bankers Association

امتیاز اصلی نرخ‌های بهره لایبر در سادگی محاسبه ارزش سبدهای($V(t)$) شامل این نرخ‌هاست. تابع‌عایدی $\Phi = g\left(L(T,T)\right)$را برای نرخ لایبر در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$V(t) = E^{Q}\left[e^{-\int_t^{T+\delta} r(s)ds} g(L(T,T))|\Im_t\right] = p(t,T+\delta)E^{Q^{T+\delta}}\left\{g(L(T,T))|\Im_t\right\}$$

$$= p(t,T+\delta)\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(L(t,T)e^{\sigma_0\sqrt{T-t}z-\sigma_0^2(T-t)/2}\right)\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz.$$

گاهی، افزایش نرخ‌لایبر به معنی افزایش سوءظن بانک‌ها نسبت به یکدیگر است([۱۰]، صفحه۲۱۳).

مدل بازار لایبر توسعه‌یافته مدل هیس-جرو-مورتون[۳۶](HJM) است که در سال ۱۹۹۲ معرفی شد. مدل HJM رفتار آنی نرخ‌های سلف را توصیف می‌نمود؛ درحالی‌که مدل بازار لایبر رفتار آنی کف‌ها و سقف‌های لایبر را توصیف می‌کند.

۲-۱ بیان مسئله

در این پایان‌نامه ساختارزمانی نرخ‌های بهره را مطالعه می‌کنیم. ابتدا اختیارمعامله یک نرخ‌بهره و سپس اختیار معامله چند نرخ بهره را تعریف می‌کنیم. همان‌گونه که می‌دانیم دارایی‌های مالی به سه دسته الف) سهام، ب) اوراق قرضه و ج) مشتق‌های مالی تقسیم می‌شوند و نرخ بهره برای دارایی‌های با درآمد ثابت مصداق می‌یابد. بنابراین در این پایان‌نامه اوراق قرضه را به عنوان دارایی مالی برمی‌گزینیم. نرخ‌بهره این اوراق را در زمان $t > 0$ با $r(t)$ نشان‌می‌دهیم و روی آن یک اختیارخرید با سررسید T، نرخ‌بهره توافقی K و قیمت p در نظر می‌گیریم. اگر در سررسید، نرخ‌بهره $r(t)$ از K بزرگتر باشد؛ یعنی

$$r(t) > K$$

اختیار اجرا می‌شود و سودی معادل $r(t) - K - p$ نصیب دارنده اختیار می‌شود. هنگامی‌که سرمایه‌گذار تصورکند نرخ‌بهره کوتاه‌مدت افزایش خواهدیافت، اقدام به خرید اختیار فروش نرخ‌بهره با نرخ‌بهره توافقی K به قیمت p خواهد نمود.

هنگامی‌که سرمایه‌گذار روند تغییرات نرخ‌بهره را نزولی ارزیابی‌کند؛ اقدام به خرید اختیارخرید نرخ‌بهره خواهدنمود. سوال این است که اگر سرمایه‌گذار روند تغییرات چندین نرخ‌بهره را به طورهمزمان پیش‌بینی‌کند؛ چه اقدامی باید انجام دهد؟

پاسخ به این سوال، مفهوم اختیار معامله چندین نرخ بهره را به دست می‌دهد: سرمایه‌گذار بر اساس روندی که بازار تا به حال طی‌کرده، تصور می‌کند در ماه های آینده نرخ بهره چندین دارایی مالی افزایش خواهدیافت؛ در این حالت به جای آن‌که اقدام به خرید اختیارفروش برای هر یک از آنها کند؛ فقط یک اختیار فروش برای چندین نرخ بهره با سررسید

[36] : Heath-Jarrow-Morton

یکسان T می‌خرد. با این‌شرط که اگر در سررسید، تنها یکی از نرخ های بهره قید شده در قرارداد از قیمت توافقی ذکرشده بیشتر شود؛ یعنی:

$$Max(r_1, r_2, \ldots, r_n) > K$$

اختیار را به اجرا گذارد و سودی برابر با $Max(r_1, r_2, \ldots, r_n) - K - p$ نصیب خود کند. اما آن‌چه در سرمایه‌گذاری‌هایی مانند این که قرارداد، همزمان روی چندین نرخ‌بهره با سررسیدهای مختلف منعقد می‌گردد؛ می‌بایست مورد توجه قرارگیرد؛ وابستگی این نرخ‌های بهره به یکدیگر است. سررسیدهای مختلف، موجب به‌کارگیری مدل‌های ساختارزمانی و وابستگی نرخ‌های بهره به یکدیگر، موجب به‌کارگیری مدل‌های عاملی[37] (ر.ک.فصل دوم) است. بنابراین مدلی که برای تغییرات نرخ بهره در نظر می‌گیریم؛ مدل ساختارزمانی چندعاملی است.

از میان مدل‌هایی که تا به حال برای مطالعه تغییرات نرخ بهره معرفی شده‌اند؛ مدل کاکس- اینگرسل- راس را برمی‌گزینیم و دلایل انتخاب این مدل را در ادامه بیان می‌کنیم. این مدل در حالت کلی به صورت معادله دیفرانسیل تصادفی با شرط اولیه

$$\begin{cases} dr(t) = \left(a + br(t)\right)dt + \sigma\sqrt{\left|r(t)\right|}\,dW(t) \\ r(0) = r_0 \end{cases} \quad ; \quad a \geq 0; b \in R \qquad (۱-۱)$$

است؛ که در آن $r(t); t \geq 0$، نرخ‌بهره اوراق قرضه و $r_0 \geq 0$ نرخ بهره اولیه آن است. $W(t)$ نیز به ازای $t \geq 0$ یک فرایندوینر استاندارد است. به ازای هر مقدار $r_0 \geq 0$ معادله ۱-۱ جواب یکتا دارد. این جواب قوی است؛ یعنی نسبت به پالایه طبیعی $W(t)$ سازوار است و مقادیر خود را در بازه $[0, \infty)$ می‌گیرد([۱۹]، صفحه۲). اگر $a = 0$ و $r_0 = 0$ آن‌گاه جواب معادله۱-۱ عبارت‌است‌از $r(t) = 0$ و از قضیه‌مقایسه[38] ([۳۱]، قضیه (IX)). برای فرایندهای انتشار[39] یک‌بعدی درمی‌یابیم که

$$r(t) \geq 0 \quad ; \quad \forall a \geq 0; r_0 \geq 0.$$

بنابراین می‌توان قدرمطلق را از معادله ۱-۱ حذف‌کرد([۱۹]، صفحه۲). مدل۱-۱ تغییرات نرخ‌بهره را تنها برای یک دارایی مالی مورد‌مطالعه قرارمی‌دهد. اما درحال‌حاضر در بازارهای مالی واقعی، تعداد دارایی‌های مالی با درآمد ثابت و لذا تعداد نرخ‌های بهره زیاد است. بنابراین برای مطالعه n نرخ بهره، به فرایندهای nبعدی نیاز داریم. به‌همین‌دلیل در این پایان‌نامه معادله دیفرانسیل تصادفی

$$\begin{cases} dr_i(t) = \sigma_i(t)\sqrt{\left|r_i(t)\right|}\,dW_i(t) \\ \underline{r}(0) = \underline{r}_0 \end{cases} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (۱-۲)$$

---

[37] : factor models
[38] : comparison theorm
[39] : diffusion

را مورد مطالعه قرارمی‌دهیم؛ که یک معادله انتشار است. در این مدل، n، نشان‌دهنده تعداد نرخ‌های‌بهره است. درواقع وقتی $a = b = 0$، مدل۲-۱، حالت n بعدی مدل۱-۱ است. به‌دلایل کاربردی و برای ساده‌سازی توجه‌مان را به مورد $a = b = 0$ معطوف می‌کنیم. در واقع فرض می‌کنیم امید $\frac{dr_i(t)}{\sqrt{|r_i(t)|}}; i = 1,2,...,n$ برابر با صفر است و بنابراین مدل۲-۱، مدل کاکس-اینگرسل-راس چندعاملی بدون جمله‌رانش است. فرایندتصادفی موجود در مدل۲-۱ فرایندتصادفی ریشه‌دوم نامیده می‌شود. فرایندهای‌تصادفی ریشه‌دوم در ادبیات‌مالی اخیر از جهات‌مختلف به‌کارگرفته شده‌اند؛ به‌عنوان‌مثال این فرایندها، در تحقیقات گنوت-هستون[۴۰]، مارش[۴۱] و بال[۴۲] برای مدل‌سازی تلاطم تصادفی مورد استفاده قرار گرفته‌اند([۱۸] را ببینید).

در این پایان‌نامه در پی یافتن تابع چگالی احتمال انتقال[۴۳](PDF) فرایند ۲-۱ هستیم. اهمیت تابع چگالی احتمال انتقال در محاسبه ارزش مشتق‌ها در زمان‌های قبل از سررسید و ترسیم تابع عایدی[۴۴] آنهاست. برای درک بهتر به مثال ساده زیر توجه کنید:

مثال- اختیار اروپایی با سررسیدT روی n نرخ بهره را با تابع عایدی $\varphi\left(\underline{r}(T),T\right)$ و $\underline{r}(T)\in R_+^n$ در نظر می‌گیریم که $\underline{r}(T)\in R_+^n$ بردار نرخ‌های بهره در زمان T است. فرض‌می‌کنیم این نرخ‌ها در معادله‌دیفرانسیل تصادفی باشرط اولیه مدل ۲-۱ صدق‌کنند. تابع عایدی عبارت است از

$$\varphi\left(\underline{r}(T),T\right) = max\left(max_{1\le i\le n}\left\{r_i(T)\right\} - K,0\right) \qquad ; \qquad \underline{r}(T)\in R_+^n \tag{۱-۳}$$

ارزش اختیار در زمان $0 < s \le T$ را با تابع $C(\underline{y},s)$ با شرط اولیه $C(\underline{y},0)=\varphi(\underline{y},T)$ نشان می‌دهیم، که در آن $\underline{y}\in R_+^n$ بردار نرخ‌های بهره در زمان s است. برای محاسبه این تابع می بایست انتگرال

$$C(s,\underline{y}) = \int_{R_+^n} p(T,\underline{r};s,\underline{y})C(0,\underline{r})d\underline{r} \qquad ; \quad \underline{y}\in R_+^n \quad ; \ t>0 \tag{۱-۴}$$

را که $p(T,\underline{r};s,\underline{y})$ تابع چگالی احتمال انتقال ارزش اختیار از نقطه $(s,\underline{y})$ به نقطه $(T,\underline{r})$ است؛ محاسبه کنیم. بنابراین برای محاسبه ارزش اختیار در زمان‌های قبل از سررسید به تابع چگالی احتمال انتقال نیاز داریم. تابع چگالی احتمال انتقال فرایند تصادفی مدل ۲-۱ را با $p(t,\underline{r};\underline{r}_0)$ نشان‌می‌دهیم. $p(t,\underline{r};\underline{r}_0)$ در معادله پیشروکلموگروف[۴۵] که معادله فاکر-پلانک[۴۶] نیز نامیده می‌شود؛ صدق می‌کند. با استفاده از فرمول‌ایتو، معادله دیفرانسیل‌جزیی متناظر با معادله دیفرانسیل تصادفی مدل۲-۱ را به دست می‌آوریم. سپس با محاسبه امیدشرطی و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، معادله پیشروکلموگروف را برای فرایند۲-۱ محاسبه می‌کنیم:

---

[40] : Genotte-Heston
[41] : Marsh
[42] : Ball
[43] : transition probability density function(transition PDF)
[44] : payoff function
[45] : Kolmogorov forward equation
[46] : Fokker-Planck equation

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left(\sigma_i(t) \sigma_j(t) \rho_{i,j} \sqrt{r_i} \sqrt{r_j}\, p \right) & ; \ \underline{r} \in R_+^n \ ; \ t>0 \\ p(\underline{r},0;\underline{r}_0) = \delta(\underline{r} - \underline{r}_0) \end{cases} \quad (۱-۵)$$

که $\delta(\underline{r}-\underline{r}_0)$ دلتای دیریکله در $r = r_0$ است. در فصل سوم مراحل محاسبه معادله ۵-۱ از فرایند تصادفی مدل۲-۱ را به طورکامل شرح می‌دهیم. در مقاله اصلی([۱۶])، ایده‌ای برای روش محاسبه تابع چگالی احتمال انتقال مدل کاکس-اینگرسل-راس بدون رانش ارائه شده است. در این پایان‌نامه با تعریف اختیار برای دو نرخ بهره و انتخاب مدل کاکس-اینگرسل-راس برای تغییرات نرخ‌های بهره، از تابع چگالی احتمال انتقال برای محاسبه ارزش اختیار در زمان‌های قبل از سررسید استفاده می‌کنیم. برای محاسبه $p(t,\underline{r};\underline{r}_0)$ از قضیه‌اختلال[47] استفاده می‌کنیم. قضیه اختلال روشی ریاضی برای یافتن جواب‌های تقریبی مسائلی که قادر به حل دقیق آنها نیستیم، ارائه می‌دهد. استفاده از این روش، نیاز ما را برای محاسبه چگالی احتمال انتقال معادله۲-۱در بعدهای بالا برطرف می‌کند. روش‌های اختلال پیش از این نیز در ریاضیات مالی مورداستفاده قرارگرفته اند(برای مثال، [۲۴] و[۳۰]را ببینید).

در سراسر این پایان‌نامه برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه دوم با شرایط اولیه از تبدیل‌فوریه[48] و برای حل معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه اول از روش مشخصه‌ها[49] استفاده می‌کنیم.

۱-۳ اهمیت و ضرورت موضوع

الف- در مورد قیمت‌گذاری اختیار برای دو یا سه دارایی، مدل های دوجمله‌ای، کارایی خوبی نشان داده‌اند و لذا از آنها استفاده می‌شود. علاوه برآن، روش‌های زیادی از جمله روش تفاضل‌های متناهی[50] یا روش عناصرمتناهی[51] برای قیمت‌گذاری سایر مشتق‌ها مطرح اند. اما بررسی مشتق های مالی روی n دارایی برای nهای بزرگ، مسئله‌ی چالش‌انگیزی است و تا به حال روش‌های کارآمد و عملی برای حل آن، معرفی نشده‌است. وقتی n بزرگ است؛ معمولاً روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل جزیی مثل روش‌های تفاضل‌متناهی، کارایی چندانی ندارند. به‌همین‌دلیل برای حل این معادلات به روش‌های تحلیلی روی‌می‌آورند. در فصل چهارم نشان می‌دهیم این روش‌ها نسبت به روش‌های عددی، به‌مراتب از دقت بالاتری برخوردارند.

ب- دستگاه معادلات دیفرانسیل تصادفی مدل ۲-۱ کاربردهای فراوانی در ریاضیات مالی دارد. به‌تازگی مدل۲-۱ مورد توجه محققینی که در زمینه اثر لبخند[52]([۳۵] را ببینید) مطالعه می‌کنند، قرارگرفته‌است.

---

[47] : perturbation theorem
[48] : Fourier transformation
[49] : method of characteristics
[50] : finite differences methods
[51] : finite elements methods
[52] : smile effect

آندرسن و آندریسن[53]([۵] را ببینید) نشان داده‌اند که با در نظرگرفتن مدل۲-۱ به عنوان مدل بازار لایبر می‌توان چولگی تلاطم[54] را نیز در مدل‌سازی نرخ‌های لایبر سلف وارد نمود.

ج- برای قیمت‌گذاری مشتق‌ها روی ده‌ها دارایی با نرخ‌های بهره وابسته به یکدیگر ناگزیر به استفاده از روش محاسبه موازی[55] هستیم([۱۶] را ببینید). با استفاده از این روش می‌توان قیمت مشتق‌ها را روی چندین دارایی به دفعات محاسبه کرد. فرمول چگالی احتمال انتقالی که در پایان حاصل می‌گردد؛ در محاسبات موازی کاربرد دارد. بیشترین کاربرد محاسبات موازی در بازارهای لایبر است. از این دیدگاه، این فرمول برای قیمت‌گذاری در بازارهای لایبر به طور مثال روی کپلت‌ها و همچنین معاملات سلف ارز اهمیت زیادی دارد.

۱-۴ مفاهیم و اصطلاحات

در این بخش برخی از مهم‌ترین مفاهیم و اصطلاحات به کاررفته در پایان‌نامه را معرفی می‌کنیم.

اختیار معامله

اختیار معامله قراردادی دوطرفه بین خریدار و فروشنده است که براساس آن خریدار قرارداد، حق (نه الزام و تعهد) دارد که مقدار معینی از دارایی مندرج در قرارداد را با قیمت معین و در زمانی مشخص بخرد یا بفروشد. بر این اساس، دو طرف توافق می‌کنند که در آینده معامله‌ای انجام دهند. در این معامله خریدار اختیار معامله، در ازای پرداخت مبلغ معینی، حق خرید یا فروش دارایی مندرج در قرارداد را در زمانی مشخصی با قیمتی که هنگام بستن قرارداد تعیین شده‌است، به دست می‌آورد. وی در صورت انصراف، مبلغی را که در ازای این حق، پرداخته است از دست می‌دهد. از طرف دیگر فروشنده در صورت درخواست خریدار، ملزم به اجرای قرارداد است. قراردادهای اختیار معامله به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند: الف- قرارداد اختیار خرید ب- قرارداد اختیار فروش.

بورس اختیار معامله شیکاگو (CBOE) به عنوان اولین بورس اختیار معامله در سال ۱۹۷۳ تأسیس شد. اختیار معامله به منظور کنترل ریسک سرمایه‌گذاری و همچنین ابزار سودآوری در بازار سهام مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما کارکردهای فراوان و متنوع دیگری نیز در بازارهای ارز، کالا و قرارداد آتی دارد که دو نمونه مشخص از آن در ایران، بیمه نمودن شرکت‌های تأمین تجهیزات از خارج از ایران و همچنن بیمه نمودن دریافت کنندگان وام‌های ارزی در برابر نوسانات نرخ ارز می‌باشد.

---

[53] : L.Andersen and J.Andreasen
[54] : volatility skew
[55] : parallel computing

ادامه تحلیلی

ادامه‌تحلیلی تابع f از دامنه D به دامنه $D \subset D'$ عبارت است از تابعی که بر D' تحلیلی و در D با f برابر باشد.

اصل تقارن شوارتس[56]

مجموعه ناتهی، پیوسته و باز D' را در نظر می‌گیریم که نسبت به محور اعداد حقیقی متقارن است. محل تلاقی D' با نیم‌صفحه $y \geq 0$ را D و محل‌تلاقی D' با نیم‌صفحه $y \leq 0$ را D'' می‌نامیم. فرض می‌کنیم تابع $f(z)$ در D پیوسته‌است و مقادیر حقیقی را بر محور اعداد حقیقی می‌گیرد و در هر نقطه D هولومورفیک است. یک تابع هولومورفیک در D' وجود دارد که ادامه تحلیلی f است و چنین تابعی طبق اصل "ادامه تحلیلی" یکتاست. تابع $g(z)$ را در D'' به صورت

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

در نظر می‌گیریم. این تابع در D'' پیوسته است و درهر نقطه متعلق به D'' غیر از محور اعداد حقیقی هولومورفیک است. حال تابع $h(z)$ در D با $f(z)$ و در D'' با $g(z)$ برابر است؛ یعنی

$$h(z) = \begin{cases} f(z) \\ g(z) = \overline{f(\overline{z})} \end{cases}$$

این تابع در D' پیوسته است و در هر نقطه متعلق به D' غیر از محور اعداد حقیقی هولومورفیک است.

قضیه۱-۴-۱: اگر $f(z)$ در مجموعه باز D' پیوسته باشد و در هر نقطه از D' غیر از محور اعداد حقیقی هولومورفیک باشد؛ آن گاه در همه نقاط D' هولومورفیک است.

برهان:[۱۱]، صفحه۷۵.

طبق قضیه ۱-۴-۱، $h(z)$ در همه نقاط D' هولومورفیک است. این‌ساختار "اصل‌تقارن‌شوارتس" نامیده‌می‌شود.

اندازه احتمال مارتینگل

فرض می‌کنیم اندازه احتمال P به صورت

$$P(Z=u) = P_u \;\; ; \;\; P(Z=d) = P_d \;\;\; ; \;\; P_u + P_d = 1$$

باشد که P_u و P_d به ترتیب احتمال افزایش و کاهش قیمت هستند. اندازه احتمال P را مارتینگل می نامیم هرگاه

[56]: Schwarz principle of symmetry

$$S_1 = \frac{1}{1+r} E\left[S_1 \middle| S_0 \right]$$

که S_0 و S_1 به ترتیب قیمت سهام در لحظه صفر و یک هستند.

اوراق بهادار بدون نکول

اوراق بهاداری که احتمال عدم بازپرداخت توسط صادرکننده آن، صفر است.

پالایه

اگر $(\Omega,\Im)$ فضای اندازه پذیر باشد؛ گردآیه صعودی $\Im_0 \subseteq \Im_1 \subseteq ...\Im_n \subseteq ... \subseteq \Im$ از زیر $\sigma-$میدان‌های $\Im$را یک پالایه روی $(\Omega,\Im)$ می‌نامیم.

پالایه طبیعی

فرض می‌کنیم دنباله $\{X_n\}$دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی بر $(\Omega,\Im)$ باشد و $\Im_n = \sigma\langle X_0, X_1, ..., X_n \rangle$ $\sigma-$میدان تولیدشده به وسیله $X_0, X_1, ..., X_n$ باشد. در این صورت $\Im_0 \subseteq \Im_1 \subseteq ...\Im_n$ ولذا $\{\Im_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک پالایه در $(\Omega,\Im)$است. این پالایه را پالایه طبیعی $\{X_n\}$ می نامیم.

تابع انتگرال‌پذیر موضعی [۵۷]

اگرتابع $f:\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ بر مجموعه باز Ω اندازه پذیر لبگ باشد و $\int_K |f| d\mu < \infty$ (که $K \subset \Omega$فشرده) آن‌گاه f را انتگرال‌پذیر موضعی می‌نامیم.

تابع بسل[۵۸]

معادله دیفرانسیل

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \alpha^2 \right) y = 0 \qquad (۱-۶)$$

معادله دیفرانسیل بسل نام دارد. αمرتبه معادله بسل است و می‌تواند هر مقدار حقیقی یا مختلط دلخواه باشد؛ اما اغلب مراتب صحیح مورد نظر است. از آن جا که معادله دیفرانسیل ۶-۱ از مرتبه دوم است؛ جواب آن به صورت

$$y_\alpha(x) = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x).$$

---

[۵۷] :locally integrable function

[58] : Bessel function