بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

سپاس‌گزاری

به نام خداوند جان و خرد　　کزین برتر اندیشه بر نگذرد
خداوند نام و خداوند جای　　خداوند روزی ده رهنمای
خداوند کیوان و گردون سپهر　　فروزنده ماه و ناهید و مهر
نیابد بدو نیز اندیشه راه　　که او برتر از نام و از جایگاه
خرد را و جان را همی سنجد اوی　　در اندیشه سخته کی گنجد او
به هستیش باید که خستو شوی　　ز گفتار بی کار یکسو شوی
پرستنده باشی و جوینده راه　　به ژرفی به فرمانش کردن نگاه
توانا بود هر که دانا بود　　ز دانش دل پیر برنا بود

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود.

پس از حمد پروردگار بزرگ شایسته است مراتب امتنان و تشکر خود را از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی به جهت راهنمایی‌های ارزنده ایشان ابراز دارم.

همچنین از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر سید مهدی کرباسی و جناب آقای دکتر فرید(محمد) مالک قائینی که قبول زحمت کردند و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند، صمیمانه سپاسگزارم.

نیز برخود لازم می‌دانم از آقای محمد حیدری دانشجوی دکترای ریاضی کاربردی که در طول نگارش این پایان‌نامه راهنما و مشاور اینجانب بوده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان از خانواده عزیزم تشکر و قدردانی می‌کنم، چرا که همه‌ی زندگیم را مدیون حضور گرمشان هستم.

چکیده

در زمینه‌های علوم و مهندسی مسائلی وجود دارند که روی بازه‌های بی‌کران مطرح می‌شوند. روش‌های متفاوتی برای حل این‌گونه مسائل پیشنهاد شده‌اند که روش رایج در این زمینه، استفاده از توابع متعامد لاگر و هرمیت می‌باشد. یکی از روش‌های کارا برای حل این‌گونه مسائل، استفاده از روش‌های طیفی و به خصوص روش شبه‌طیفی با استفاده از توابع پایه‌ای متعامد کسری می‌باشد. در این پایان‌نامه برآنیم که چگونگی حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از توابع متعامد کسری را ارائه کنیم. برای این کار به معرفی توابع متعامد می‌پردازیم. هم‌چنین چرایی استفاده از این توابع در روش‌های طیفی را مطرح می‌کنیم. سپس به معرفی روش‌های طیفی و به خصوص روش شبه‌طیفی، می‌پردازیم. در ادامه، توابع متعامد کسری و تقریب با استفاده از این توابع مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در پایان نیز، سه مسأله مهم لین-امدن، ناگامو و کاماسا-هلم، که در بازه نیمه متناهی روی می‌دهند را با استفاده از توابع متعامد کسری حل کرده و نتایج حاصل را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تعریفی از معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی را ارائه خواهیم کرد. هم‌چنین به بررسی اجمالی تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌ها می‌پردازیم. در ادامه نیز روش نیوتن، که روشی برای یافتن ریشه‌های معادلات غیر خطی است، را معرفی می‌کنیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل

معادلات دیفرانسیل یکی از انواع معادله‌های ریاضی است که بیانگر یک تابع مجهول از یک یا چند متغیر مستقل و مشتقات مرتبه‌های مختلف آن نسبت به متغیرهای مستقل است. بسیاری از قوانین عمومی طبیعت، طبیعی‌ترین بیان ریاضی خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند. معادلات دیفرانسیل در بسیاری از پدیده‌های علوم رخ می‌دهند. هر زمان که یک رابطه بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالت‌های مختلف وجود دارد و نرخ تغییرات متغیرها در زمان‌های مختلف یا حالات مختلف شناخته شده است، می‌توان آن پدیده را با معادلات دیفرانسیل بیان کرد.

معادلات دیفرانسیل به طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱) معادلات دیفرانسیل معمولی [۱]

۲) معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی [۲]

تعریف ۱.۲.۱ (معادلات دیفرانسیل معمولی) به آن دسته از معادلات اطلاق می‌شود که، تابع مجهول درآن‌ها تنها بر حسب یک متغیر مستقل باشد. شکل کلی یک معادله مرتبه n ام به صورت زیر می‌باشد:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = ٠. \qquad (١-١)$$

بالاترین مرتبه مشتقی که در معادله دیفرانسیل ظاهر می‌شود را مرتبه آن معادله می‌نامند.

تعریف ۲.۲.۱ (معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی) به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل گفته

[۱] Ordinary Differential Equations

[۲] Partial Differential Equations

می‌شود که در آن‌ها تابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزئی تابع نسبت به آن متغیرها شرکت داده شده باشند.

تعریف ۳.۲.۱ در یک معادله دیفرانسیل چنانچه مقدار تابع یا مشتقات آن تنها در یک نقطه به عنوان شرایط جانبی داده شده باشند، آن مسأله را یک مسأله مقدار اولیه[۱] می‌نامند. شکل کلی مرتبه nام این‌گونه مسائل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \\ &y(a) = a_0, \quad y'(a) = a_1, \quad ... \quad , \quad y^{(n-1)}(a) = a_{n-1}, \end{aligned} \tag{۲-۱}$$

که در آن a و $\{a_i, 0 \leq i \leq n-1\}$ ثابت‌های معلومی هستند.

تعریف ۴.۲.۱ گوییم تابع $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ در شرط لیپ‌شیتز [۲] صادق است هرگاه ثابت k وجود داشته باشد به طوری‌که

$$\|g(x) - g(y)\| < k \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{۳-۱}$$

قضیه ۵.۲.۱ اگر در مسأله مقدار اولیه با شرایط اولیه ۱-۲ تابع F در شرط لیپ‌شیتز صدق کند، آنگاه مسأله مقدار اولیه دارای جواب یکتاست.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۱۱] مراجعه کنید. □

تعریف ۶.۲.۱ چنانچه در یک معادله دیفرانسیل مقدار تابع یا مشتقات آن در دو نقطه یا بیشتر از دامنه به عنوان شرایط مرزی داده شده باشند، مسأله را یک مسأله مقدار مرزی[۳] می‌گویند. شکل کلی یک مسأله مقدار مرزی مرتبه n را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{۴-۱}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (c_{ij} y^{(j)}(a) + d_{ij} y^{(j)}(b)) = e_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{۵-۱}$$

[۱] Intial Value Problem

[۲] Lipschitz condition

[۳] Boundary Value Problem

قضیه ۷.۲.۱ مسأله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases} \tag{۱-۶}$$

اگر توابع $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، f و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ بر مجموعه

$$D = \{(x, y, y') \mid \ a \leq x \leq b, \ \ -\infty \leq y \leq \infty, \ \ -\infty \leq y' \leq \infty\},$$

پیوسته باشند و

۱- برای هر $(x, y, y') \in D$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0$.

۲- ثابت M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $(x, y, y') \in D$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')\right| \leq M, \tag{۱-۷}$$

آنگاه مسأله مقدار مرزی دارای جواب یکتاست.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۲۱] مراجعه کنید. □

قضیه ۸.۲.۱ مسأله مقدار مرزی

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad a < x < b, \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{cases} \tag{۱-۸}$$

را در نظر بگیرید. اگر شرایط زیر برقرار باشند، آنگاه مسأله مقدار مرزی دارای جواب یکتاست.

۱- توابع $p(x)$ ، $q(x)$ و $r(x)$ بر D پیوسته باشند.

۲- $q(x) > 0, \forall x \in [a, b]$.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۸] مراجعه کنید. □

تعریف ۹.۲.۱ (ضرب داخلی) [۱] فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد. ضرب داخلی روی این فضا نگاشتی است به صورت $(.,.) : X \times X \to \mathbb{R}$ به‌طوری‌که برای هر $x, y, z \in X$ و

[۱] Inner Product

به ازای هر ثابت حقیقی c خواص زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
&(x+y,z)=(x,z)+(y,z),\\
&(cx,y)=c(x,y),\\
&(x,y)=(y,x),\\
&(x,x)\geq ۰, \quad (x,x)=۰ \Leftrightarrow x=۰,
\end{aligned} \tag{۹-۱}$$

فضای برداری X با ضرب داخلی معرفی شده روی آن یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۲.۱ (فضای نرم‌دار) [۱] فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد. نرم روی این فضا تابع حقیقی و نامنفی $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ است، به‌طوری‌که برای هر $x,y \in X$ و هر c حقیقی داریم:

$$\begin{aligned}
\|cx\| &= |c|\,\|x\|,\\
\|x+y\| &\leq \|x\|+\|y\|,\\
\|x\| &= ۰ \Leftrightarrow x=۰,
\end{aligned} \tag{۱۰-۱}$$

فضای نرم‌دار در واقع فضای برداری است که یک نرم روی آن تعریف شده است.

تعریف ۱۱.۲.۱ (فضای باناخ) [۲] فرض کنید X فضای برداری نرم‌داری است که متر روی آن به صورت

$$d(x,y)=\|x-y\|, \quad \forall x,y\in X,$$

تعریف شده است. اگر این فضا تام باشد، آنگاه فضا را باناخ گوییم.

مثال ۱۲.۲.۱ فضای $\mathbb{R}^n$ همراه با نرم

$$\|u\|=\left(\sum_{i=۰}^{n}|u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{۱۱-۱}$$

[۱] Normed space

[۲] Banach space

یک فضای باناخ n بعدی می‌باشد. هم‌چنین اگر $[a,b] \subset \mathbb{R}$ و $1 \leq p \leq \infty$ فضای $L^p\,[a,b]$ تحت نرم

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

یک فضای باناخ با بعد نامتناهی است.

تعریف ۱۳.۲.۱ (فضای هیلبرت) [1] فضای ضرب داخلی تام را یک فضای هیلبرت گویند. این فضا در تقریب‌های عددی کاربرد فراوانی دارد. نرم روی این فضا به صورت

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}},$$

در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین متر تعریف شده نیز به صورت

$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad \forall x,y \in X,$$

خواهد بود.

مثال ۱۴.۲.۱ $\mathbb{R}^n$ با ضرب اقلیدسی $(u,v) = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i v_i$ یک فضای هیلبرت با بعد متناهی است.

هم‌چنین اگر $[a,b] \subset \mathbb{R}$ آنگاه $L^2\,[a,b]$ تحت ضرب داخلی

$$(u,v) = \int_a^b u(x)v(x)dx,$$

یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۵.۲.۱ اگر X یک فضای فضای ضرب داخلی و $x,y \in X$ باشد، در این صورت گوییم x,y متعامدند هرگاه، $(x,y) = 0$، که گاهی این مطلب را با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهند.

مجموعه $Y \subset X$ را متعامد گویند هرگاه

$$\forall x,y \in Y, \quad x \neq y \Rightarrow x \perp y.$$

تعریف ۱۶.۲.۱ مجموعه Y را متعامد یکه گوییم، هرگاه Y متعامد بوده و به ازای هر $x \in Y$ داشته باشیم: $\|x\| = 1$.

[1] Hilbert space

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید Xفضای هیلبرت است. اگر $M \subseteq X$ و $x \in X$، گوییم $x \perp M$ هرگاه:

$$\forall y \in M : x \perp y$$

، که در این حالت $x \perp M$ اگر و فقط اگر $x \in M^{\perp}$ و

$$M^{\perp} = \{y \in X : x \perp y \quad \forall x \in M\},$$

تعریف ۱۸.۲.۱ فرض کنید M یک زیر فضای بسته از X باشد. در این‌صورت:

$$\forall x \in X \quad \exists! \quad y \in M, \;\; Z \in M^{\perp},$$

به‌طوری‌که $x = y + z$.

هم‌چنین اگر $P_M : X \to M$ به‌طوری‌که $P_m(x) = y$ آنگاه، به P_m را تصویر طبیعی یا تصویر متعامد از X به M گوییم.

قضیه ۱۹.۲.۱ فرض کنید M زیر فضای بسته‌ای از فضای هیلبرت H باشد.

۱) برای هر $x \in H$ ، نقطه یگانه $y \in M$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|x - y\| = \min_{z \in M} \|x - z\|.$$

۲) عنصر $y \in M$ نزدیکترین عنصر به x یکتاست با این خاصیت که

$$(x - y) \perp M.$$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۲۸] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۰.۲.۱ فرض کنید M یک زیر فضا با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی X باشد. برای هر بردار $x \in X$ بردار $y \in M$ تصویر متعامد x بر زیر فضای M است اگر و تنها اگر بردار $y - x$ بر هر بردار در M عمود باشد.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۲۸] مراجعه کنید. □

لم ۲۱.۲.۱ فرض کنید X فضای هیلبرت با ضرب داخلی $(.)$ و نرم $\|.\|$ باشد. در این صورت نامساوی زیر که به نامساوی کوشی-شوارتز [1] معروف است را خواهیم داشت.

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| . \tag{۱-۱۲}$$

تعریف ۲۲.۲.۱ (فضای L^p) فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی اندازه‌پذیر لبگ از $\mathbb{R}^d, \ d = ۱, ۲, ۳$ باشد. فرض کنید u تابعی اندازه‌پذیر لبگ روی Ω باشد.

برای هر $۱ \leq p \leq \infty$ تعریف می‌کنیم:

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \middle| u \ \text{اندازه‌پذیر،} \ \|\mathrm{u}\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\},$$

و

$$\|\mathrm{u}\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{۱}{p}},$$

$$\|\mathrm{u}\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

فضای $L^p(\Omega)$ با نرم $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ یک فضای باناخ می‌باشد و در حالت خاص زمانی که فضای $L^۲(\Omega)$ به ضرب داخلی

$$(u,v)_{L^۲(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall u,v \in L^۲(\Omega),$$

مجهز شود، فضای هیلبرت خواهد بود.

فرض کنید $w(x)$ یک تابع وزن روی بازه $(-۱, ۱)$ است و فضای $L^۲_w(-۱, ۱)$، فضای تمام توابع اندازه‌پذیر $u : (-۱, ۱) \to \mathbb{R}$ باشد که $\int_{-۱}^{۱} |u(x)|^۲ w(x)dx < +\infty$، آنگاه این فضا با ضرب داخلی

$$(u,v)_w = \int_{-۱}^{۱} u(x)v(x)w(x)dx,$$

و نرم وزن‌دار

$$\|u\|_{L^۲_w(-۱,۱)} = (\int_{-۱}^{۱} |u(x)| \, w(x)dx)^{\frac{۱}{۲}},$$

یک فضای هیلبرت است.

[1] Cauchy-Schwarz inequality

تعریف ۲۳.۲.۱ (فضای سوبولف) [1] فضایی متشکل از توابع مربع انتگرال‌پذیر که m مشتق اول آنها نیز توابعی مربع انتگرال‌پذیر باشند، فضای سوبولف H^m نامیده می‌شود. به عبارت دیگر:

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^۲(\Omega) \middle| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in L^۲(\Omega), \quad ۱ \leq k \leq m \right\}.$$

در این فضا نرم و شبه نرم به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند.

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|k|=۰}^{m} \left\|\partial^k u\right\|_{L^۲}^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}},$$

$$|u| = \left(\sum_{|k|=۰}^{m} |\partial u|_{L^۲}^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

فضای $H^m(\Omega)$ هیلبرت است اگر ضرب داخلی زیر را روی این فضا داشته باشیم:

$$(u,v)_m = \sum_{|k|=۰}^{m} \left(\partial_x^k u, \partial_x^k v \right)_{L^۲(\Omega)}.$$

تعریف ۲۴.۲.۱ تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Gamma(x) = \int_۰^\infty t^{x-۱} e^{-t} dt. \qquad (۱۳-۱)$$

در حالت خاص $\Gamma(۱) = ۱,\ \Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$ می‌باشد. فرمول‌های بازگشتی زیر را نیز برای تابع گاما خواهیم داشت.

$$\Gamma(x+۱) = x\Gamma(x), \qquad \Gamma(n+۱) = n!, \qquad (۱۴-۱)$$

$$\Gamma(۲x) = (۲\pi)^{-\frac{۱}{۲}}\, ۲^{۲x-\frac{۱}{۲}} \Gamma(x)\Gamma(\frac{x+۱}{۲}). \qquad (۱۵-۱)$$

قضیه ۲۵.۲.۱ (قضیه تیلور) [2] اگر $n+۱$ امین، $n \in \mathbb{N}$ مشتق تابع یعنی $f^{(n+۱)}(x)$ روی بازه بسته $[a,b]$ پیوسته و مشتق n ام، یعنی $f^{(n)}(x)$ روی (a,b) موجود باشد، آنگاه برای هر $x, x_۰ \in [a,b]$ داریم:

$$f(x) = f(x_۰) + \frac{(x-x_۰)}{۱!} f'(x_۰) + \ldots + \frac{(x-x_۰)^n}{n!} f^{(n)}(x_۰) + \frac{(x-x_۰)^{n+۱}}{(n+۱)!} f^{(n+۱)}(\xi), \qquad (۱۶-۱)$$

که در آن ξ مقداری بین $x_۰$ و x است.

---

[1] Sobolove space

[2] Taylor theorem

اثبات. برای اثبات به مرجع [۳۲] مراجعه کنید. □

۳.۱ تقریب توسط چندجمله‌ای‌ها

به‌طور کلی چندجمله‌ای‌ها، توابع مثلثاتی و توابع نمایی از دسته توابعی هستند که عموماً برای تقریب توابع مورد استفاده قرار می‌گیرند. از بین این توابع چندجمله‌ای‌ها به علت اینکه کار روی آن‌ها ساده‌تر است، بیشتر از بقیه مورد استفاده قرار می‌گیرند. وجود یک چندجمله‌ای $p(x)$ که تابع پیوسته $f(x)$ را در یک بازه متناهی $[a, b]$ تقریب می‌زند، از قضیه وایرشتراس که در ادامه آن را بیان می‌کنیم تضمین می‌گردد. ابتدا تعریفی از چندجمله‌ای را ارائه می‌کنیم. یک چندجمله‌ای حقیقی $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ که روی یک بازه بسته و کراندار $[a, b]$ تعریف شده است، تابعی به شکل $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ است که ضرایب c_k حقیقی مقدار هستند.

قضیه ۱.۳.۱ (قضیه وایرشتراس) [۱] فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار و پیوسته روی بازه $[a, b]$ باشد. در این صورت دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های $\{p_n\}$ وجود دارد که به طور یکنواخت به f همگرا است.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۲۷] مراجعه کنید. □

ساختار مسائل تقریب شامل سه جزء اساسی می‌باشد:

۱- مجموعه‌ای از توابع که برای تقریب از آنها استفاده می‌شود

۲- شکل تابع تقریب

۳- یافتن نرم مناسب که برای بیان خطای تقریب از آن استفاده می‌شود

سه نوع تقریب که به صورت زیر معرفی می‌شوند، را می‌توان معرفی کرد:

۱- برای $\varepsilon > 0$ داده شده، تقریب f^* از تابع f را یک تقریب خوب گوییم هرگاه

$$\|f - f^*\| \leq \varepsilon. \tag{۱-۱۷}$$

---

[۱] Weierstrass theorem

۲- تقریب f_B^* را بهترین تقریب تابع f گویند هرگاه برای هر تابع f^* در فضای موردنظر داشته باشیم:

$$\|f-f_B^*\| \leq \|f-f^*\|. \tag{۱-۱۸}$$

۳- تقریب f_N^* را نزدیک به بهترین گویند هرگاه:

$$\|f-f_N^*\| \leq (1-\rho)\,\|f-f_B^*\|. \tag{۱-۱۹}$$

که ρ یک اسکالر مثبت و f_B^* بهترین تقریب می‌باشد.

قضیه زیر بهترین تقریب تابع $f(x)$ را در فضای L_w^2 معرفی می‌کند.

قضیه ۲.۳.۱ بهترین تقریب چندجمله‌ای تابع $f(x)$ در فضای L_w^2 که آن را با p_N^B نمایش می‌دهیم یکتاست و دارای شرط لازم و کافی زیر می‌باشد،

$$\left(f-p_N^B, p_N\right)_w = 0, \tag{۱-۲۰}$$

برای هر چندجمله‌ای p_N از درجه حداکثر N.

اثبات. برای اثبات به مرجع [۲۳] مراجعه کنید. □

نتیجه ۳.۳.۱ بهترین تقریب تابع f در فضای L_w^2 که با p_N^B نمایش داده می‌شود، به صورت مجموع متناهی از چندجمله‌ای‌های متعامد $\{\Phi_i\}$ به صورت $p_N^B(x)=\sum\limits_{i=0}^{N} c_i\Phi_i(x)$ نمایش داده می‌شود. c_i ها نیز با استفاده از $c_i=\frac{(f,\phi_i)_w}{(\phi_i,\phi_i)_w},\quad i=0,1,\cdots,N$ محاسبه می‌شوند.

قضیه زیر یک قضیه وجودی سازنده برای چندجمله‌ای‌های متعامد است.

قضیه ۴.۳.۱ (گرام-اشمیت) [۱] یک دنباله از چندجمله‌ای‌های $\{p_n(x)\,|n\geq 0\}$ با توجه به این که $degree\ p_n(x)=n$، به ازای همه مقادیر n، وجود دارد به طوری که به ازای همه مقادیر m و n ناکوچکتر از صفر و $m\neq n$

$$(p_n, p_m) = 0, \tag{۱-۲۱}$$

[۱] Gram-Schmidt

و به علاوه می‌توانیم دنباله را با ویژگی‌های زیر بسازیم:

۱) به ازای هر n، $(p_n, p_n) = 1$.

۲) ضریب x^n در $p_n(x)$ مثبت باشد.

با این ویژگی‌های اضافی، دنباله $\{p_n\}$ یکتاست. این چندجمله‌ای‌ها به طور منحصربفرد توسط رابطه بازگشتی زیر تعیین می‌گردند،

$$\begin{aligned} &p_0(x) = 1, \quad p_{-1}(x) = 0, \\ &p_{i+1}(x) = (x - \delta_{i+1})p_i(x) - \gamma_{i+1}^2 p_{i-1}(x), \quad i \geq 0, \end{aligned} \tag{۱-۲۲}$$

به طوری‌که

$$\delta_{i+1} = \frac{(xp_i, p_i)_w}{(p_i, p_i)_w}, \quad i \geq 0,$$

$$\gamma_{i+1}^2 = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ \frac{(p_i,p_i)_w}{(p_{i-1},p_{i-1})_w}, & i \neq 0. \end{cases}$$

اثبات. برای اثبات به مرجع [۸، ۳۲] مراجعه کنید. $\square$

۴.۱ روش نیوتن برای تعیین ریشه معادلات

یکی از روش‌های متداول برای یافتن ریشه معادلات، روش نیوتن است. این روش بر تقریب خطی تابع استوار است، و این کار را با استفاده از مماس بر منحنی انجام می‌دهد. روش نیوتن معمولاً سریع‌تر از روش‌های خطی می‌باشد، زیرا همگرایی آن از مرتبه دوم است. در این روش با شروع از یک تخمین اولیه مانند x_0 که خیلی از ریشه دور نیست، در امتداد مماس با نقطه برخورد آن با محور x حرکت کرده و آن را تقریب بعدی می‌گیریم. این امر را آنقدر ادامه می‌دهیم تا مقادیر متوالی x به قدر کافی نزدیک هم شده، یا مقدار تابع به قدر کافی نزدیک صفر گردد. با انجام این کار دنباله‌ای از x_iها به دست می‌آید. فرمول بازگشتی روش نیوتن به صورت زیر است،

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{۱-۲۳}$$

برای یافتن رابطه بازگشتی (۱-۲۳) به صورت زیر عمل می‌کنیم: