بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بــهشتی

دانشکده علوم

تعمیم فاز بری به مورد غیر بی دررو

استاد راهنما:

آقای دکتر سیامک سادات گوشه

استاد مشاور:

آقای دکترحمید رضا سپنجی

الهه مهدوی عادل

تاریخ ....

شماره ....

پیوست..........................

دانشگاه شهید بهشتی

بسمه تعالی

«صورتجلسه دفاع پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین

تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۲۰۰/۶۴۱۱/د مورخ ۱۳۸۷/۱۰/۲۴ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه خانم الهه مهدوی عادل به شماره شناسنامه ۷۲۲۳صادره ازتهران متولد۱۳۶۲ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته فیزیک – ذرات بنیادی و نظریه میدانها

با عنوان :

تعمیم فاز بری به مورد غیر بی دررو

به راهنمائی:

آقای دکتر سیامک سادات گوشه

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۷/۱۱/۹تشکیل گردید و براساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۸٫۲۵ درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

۱ –استاد راهنما:آقای دکتر سیامک سادات گوشه سادات

۲– استاد مشاور: آقای دکتر حمیدرضا سپنجی

۳– استاد داور: آقای دکتر محمد شهریار بایگان

۴– استاد داورونماینده تحصیلات تکمیلی : آقای دکتر کراسوس غفوری تبریزی

۱۳۸۸/۱/۲۱

چکیده:

در این پایان نامه به مطالعه تعمیم فاز بری به شرایط غیر بی دررو پرداخته شده است . فرض می کنیم هامیلتونی سیستم تابعی از یک پارامتر خارجی وابسته به زمان است .در سال ۱۹۸۴ آقای M .V. Berry نشان داد در چنین شرایطی وقتی پارامتر خارجی هامیلتونی به آرامی و به صورت بی دررو با زمان تغییر کند ، اگر سیستم ابتدا در یکی از ویژه حالت های هامیلتونی باشد با گذشت زمان سیستم در ویژه حالتی متناظر با ویژه حالت اولیه باقی می ماند، وقتی که مسیر بسته تغییرات پارامتر خارجی کامل گشت، سیستم به حالت اولیه خود باز می گردد و تنها در یک عامل فاز ضرب می شود که این عامل فاز دارای یک تعبیر هندسی می باشد و فاز بری نامیده می شود.

ما در این پایان نامه این عامل فاز را برای شرایطی که تغییرات پارامتر خارجی هامیلتونی الزاماً به آرامی صورت نمی گیرد ، محاسبه کرده ایم و دریافتیم که فاز تعمیم یافته بری به طور کلی مختلط بوده و در شرایطی که تغییرات به آرامی صورت می گیرد به مقدار مرسوم و متعارف قبلی خود میل می نماید. و هنگامی که تغییرات به شدت سریع اتفاق می افتد این فاز به $\pm 2n\pi$ ، میل می کند.

همچنین دریافتیم در برخی از سرعت های خاص مربوط به تغییرات ، تحول ما دوره ای می شود یعنی سیستم به حالت اولیه خود باز می گردد و در چنین شرایطی فاز متناظر ، حقیقی می شود.

فهرست مطالب

مقدمه.. ۱
فصل ۱ : فاز بری... ۳
۱-۱ تغییرات بی دررو.. ۳
۱-۲ فاز بری.. ۳
۱-۳ ضریب فاز هندسی.. ۶
۱-۴ ناوردایی پیمانه ای.. ۱۲
فصل ۲ : محاسبه فاز بری به روش آقایان آهارنو و آناندان.. ۱۳
۲-۱ فاز غیر بی دررو بری در تحول دوره ای.. ۱۳
۲-۲ محاسبه β برای مثال تغییرات آهسته هامیلتونی با زمان... ۱۴
۲-۳ محاسبه، β ، برای ذرات اسپین $\frac{1}{2}$، که در معرض میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت قرار دارند....... ۱۵
۲-۴ محاسبه β ، برای ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ که در معرض میدان مغناطیسی متغیر با زمان، قرار دارند ۱۵
۲-۵ محاسبه β برای سیستمی با بار الکتریکی q ۱۶
فصل ۳ : محاسبه‌ی فاز بری در شرایط غیر بی‌دررو برای ذراتی با اسپین دلخواه که در میدان مغناطیسی چرخان قرار دارند.. ۱۸
۳-۱ حل معادله شر و دینگر وابسته به زمان برای هامیلتونی سیستم با اسپین S ، که در میدان مغناطیسی در حال چرخش ، قرار دارد.. ۱۸
فصل ۴ : کلی ترین حالت برای یافتن فاز غیر بی‌دررو‌ی بری.. ۳۰
۴-۱ تعریف فازبری در زمان (T')(دوره تناوب هامیلتونی).. ۳۱
۴-۲ محاسبه فاز بری در زمان باز گشت سیستم به حالت اولیه... ۴۶
۴-۳ شرط تساوی دوره تناوب هامیلتونی با دوره تناوب بردار حالت.. ۴۸

مقدمه:

مطابق قضیه بی دررو اگر هامیلتونی (H) یک سیستم، وابسته به یک عامل خارجی (R)، باشد و R به صورت بی دررو با زمان تغییر نماید ،چنان چه این سیستم در لحظه اولیه، در یکی از ویژه بردارهای هامیلتونی باشد، باگذشت زمان سیستم در همان ویژه بردار هامیلتونی، می‌ماند و بردار حالت سیستم، فقط در حد یک عامل فاز، با بردار حالت اولیه اختلاف پیدا می‌کند. این عامل فاز به دو قسمت تقسیم می‌شود. یک قسمت همان فاز دینامیکی معمول حالت‌های ماناست و قسمت دیگر فاز هندسی بری نامیده می‌شود، زیرا در سال ۱۹۸۴میلادی، آقای M.V.Berry نشان داد که این عامل فاز حقیقی، و متناسب با خواص هندسی فضای پارامتری R است.[1] گزارشاتی از مشاهدات آزمایشگاهی در زمینه فوتون ها [8]، نوترون ها [9]، الکترون ها [10]، تشدید چهار قطبی های هسته ای [11]، تداخل های لیزری [12] و سطوح انرژی ملکولی [13]، ارائه شده است که نشان می دهند فاز بری در آزمایشگاه مشاهده گشته است. در فصل۱ جزئیات محاسبات و چگونگی دستیابی به فاز هندسی بری آورده شده است.

در سال‌های بعد مطالعات بیشتری در این زمینه صورت گرفت.که از جمله‌ی آنها می‌توان به کارهای آقایان Y.Aharonov, J.Anandan اشاره کرد، که فاز تعمیم یافته بری را، برای تحول‌های دوره‌ای (cyclic evolutions) محاسبه نموده اند [3]تحول دوره‌ای تحولی است که سیستم پس از تحول به حالت اولیه‌ی خود باز می‌گردد. لذا پس از تحول بردار حالت با بردار حالت اولیه در یک حد عامل فاز اختلاف پیدا می کند. برای تعریف فاز تعمیم یافته بری در شرایط غیر بی‌دررو ، فاز دینامیکی از فاز کل کم می شود و آن چه باقی می ماند فاز بری نامیده می شود. (1)

در ادامه در سال ۱۹۹۰ میلادی Shun-Jin-Wang در مقاله ای به حل مسئله تعمیم فازبری به مورد غیر بی‌دررو برای سیستمی با اسپین S که در میدان مغناطیسی چرخان قرار دارد، پرداخت.[2] در روش ارائه شده در این مقاله معادله دیفرانسیل وابسته به زمان، با یک شرط اولیه خاص، حل شده و فرض شده که دوره تناوب هامیلتونی با دوره تناوب بردار حالت سیستم یکی باشد، بنابراین در زمانی که در آن هامیلتونی با هامیلتونی در لحظه اولیه، برابر می شود، سیستم نیز به حالت اولیه‌ی خود، باز می گردد. [6] اما این تعریف یک تعریف کلی برای فاز بری در موارد غیر بی‌دررو به نظر نمی‌رسد. فقط در موارد خاصی که به آن اشاره خواهد شد، چنین شرایطی وجود دارد که همزمان با هامیلتونی، سیستم نیز به حالت اولیه‌ی خود باز گردد، لذا در ادامه سعی شده تا تعریف کلی تری از فاز بری ارائه شود.

۱- برای مطالعه‌ی جزئیات بیشتر و محاسبات کامل، به فصل۲ مراجعه نمایید.

می‌دانیم در حالت کلی یعنی در شرایطی که تغییرات زمانی هامیلتونی، بی‌دررو نباشد و قیدی روی سرعت تغییرات هامیلتونی نداشته باشیم، لزومی ندارد سیستم در حالت اولیه‌ی خود باقی بماند. بنابراین در چنین شرایطی اگر یک سیستم در لحظه‌ی اولیه در یکی از ویژه بردارهای هامیلتونی باشد پس از گذشت زمان t، دیگر لزوماً در آن ویژه بردار باقی نمی‌ماند. بلکه بردار حالت سیستم در این زمان دلخواه را، می‌توان بر حسب تمام ویژه بردارهای هامیلتونی بسط داد:

$$|n,t_0;t\rangle = \sum_n c_n(t)|n(t)\rangle \qquad (1)$$

از طرفی می‌دانیم هر کت دلخواهی در معادله شرودینگر وابسته به زمان ، صدق می‌کند، [5] بنابراین $|n,t_0;t>$ را در معادله شرودینگر وابسته به زمان قرار می دهیم.

با مساوی قرار دادن ضریب هر یک از کت‌های $|n(t)>$ ، به یک مجموعه معادله دیفرانسیل می‌رسیم که از حل آن‌ها $C_n(t)$های مختلف بدست می‌آیند.

از روی $C_n(t)$ می‌توان به تعریفی از فاز تعمیم یافته‌ی بری رسید. در فصل چهارم این محاسبات برای سیستم اسپین ۱/۲ که در معرض یک میدان مغناطیسی خارجی چرخان قرار داد ، انجام شده است در این فصل فرض شده اندازه‌ی این میدان ثابت است اما جهت آن تغییر می‌کند و حول یک محور ثابت در فضا می‌چرخد . نکته‌ای که باید در این جا به آن توجه کرد این است که در این محاسبات قیدی روی سرعت چرخش میدان مغناطیسی گذاشته نشده است. بنابراین در فصل ۴، شرط بی‌دررو بودن تغییرات زمانی را، نداریم.

ضمناً جهت تعریف فاز بری پس از محاسبه‌ی $C_n(t)$ یک بار فاز تعمیم یافته بری در زمان $t=T'$، که T'دوره تناوب‌هامیلتونی است، حساب شده که در این جا T' فقط دوره تناوب هامیلتونی است نه دوره تناوب بردار حالت، و شرط بازگشت همزمان آن ها به حالت اولیه را نداریم. و یک بار نیز، فاز بری در زمان $t=T''$ بدست آورده شده است که T'' دوره تناوب بردار حالت است.

نهایتاً شرط $T''=nT'$ ، یعنی بازگشت همزمان هامیلتونی و بردار حالت به مقدار اولیه، بررسی خواهد شد.

فصل ۱

فاز بری

۱-۱ تغییرات بی‌دررو

در چکیده و مقدمه چندین بار به تغییرات بی‌دررو اشاره شد. از آن جایی که در محاسبات آقای بری، تغییرات زمانی هامیلتونی، بی دررو فرض شده است، ارائه توضیحی درباره‌ی معنا و مفهوم تغییرات بی‌دررو هر چند به اختصار، خالی از لطف نمی‌باشد.

به طور کلی، طبق قضیه بی دررو، هرگاه روی یک سیستم فیزیکی تغییراتی توسط یک عامل خارجی اعمال شود به گونه‌ای که سرعت این تغییرات بسیار کم باشد، کمیت‌هایی وجود دارند که ناوردا باقی می‌مانند، که آنها ناورداهای بی‌دررو نامیده می‌شوند.

به عنوان مثال سیستمی با اسپین S را درنظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت خارجی قرار داد. سطوح انرژی این سیستم به 2S+1 سطح، تجزیه می‌شوند. فرض کنید سیستم در لحظه‌ی اولیه در سطح انرژی n–ام قرار گرفته باشد و سپس جهت میدان مغناطیسی، به آرامی تغییر کند، از آن جایی که تغییرات به آرامی صورت می‌گیرد سیستم فرصت کافی جهت هماهنگ شدن با تغییرات را دارد، لذا در چنین شرایطی، جهت اسپین نیز به طور هماهنگ با جهت میدان مغناطیسی تغییر می‌کند.

بنابراین مؤلفه‌ی اسپین روی محور متصل به میدان مغناطیسی ثابت می‌ماند و سیستم با گذشت زمان از سطح انرژی n–ام خارج نمی‌شود. در این مثال عدد کوانتومی اولیه‌ی n ، ناوردای بی‌دررو به حساب می‌آید. زیرا در طول تغییر بی‌درروی جهت میدان مغناطیسی، ثابت می‌ماند.

۲-۱ فازبری

حال که مفهوم تغییرات بی‌دررو واضح‌تر شد ، زمان مناسبی برای پرداختن به محاسبات فاز هندسی بری، می‌باشد.

می‌دانیم از معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان [5] رابطه‌ی ویژه مقداری زیر را داریم:

$$H(R(t))\left|n(R(t))\right\rangle = E_n(R(t))\left|n(R(t))\right> \qquad (۱-۲-۱)$$

در رابطه‌ی (۱-۲-۱)، H(R(t)) ، هامیلتونی سیستم است که دارای یک عامل خارجی وابسته به زمان R(t) است، $\left|n(R(t))\right>$ یکی از ویژه بردارهای هامیلتونی است که متناظر با n-امین سطح انرژی، می‌باشد . $E_n(R(t))$ انرژی این سطح را نشان می‌دهد.

اگر در لحظه‌ی اولیه سیستم در حالت $\left|n(R_0)\right\rangle$ باشد ، بردار حالت در زمان t را، با $\left|n(R_0),t_0;t\right>$ نشان می‌دهیم که در معادله شرودینگر وابسته به زمان صدق می‌کند:

$$H(R(t))\left|n(R_0),t_0;t\right> = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\left|n(R_0),t_0;t\right>) \qquad (۲-۲-۱)$$

در حالت بی دررو $\left|n(R_0),t_0;t\right>$ متناسب با n-امین ویژه بردار هامیلتونی (بردار حالت اولیه) در زمان t، است. یعنی داریم:

$$\left|n(R_0),t_0;t\right\rangle = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_n(t')dt'\}\exp(i\gamma_n(t))\left|n(t)\right\rangle \qquad (۳-۲-۱)$$

که با قرار دادن طرف راست (۱-۲-۳)، به جای $\left|n(R_0),t_0;t\right>$ در معادله شرودینگر وابسته به زمان، رابطه‌ی (۱-۲-۴) بدست می آید:

$$\frac{d}{dt}\gamma_n(t) = i\left\langle n(R(t))\right|\nabla_R n(R(t))\rangle\frac{d}{dt}R(t) \qquad (۴-۲-۱)$$

با انتگرال گیری نسبت به زمان از طرفین رابطه‌ی (۱-۲-۴)

داریم:

$$\gamma_n(t) = i\int_{R_0}^{R(t)}\left\langle n(R(t'))\right|\nabla_R n(R(t'))\rangle dR(t')$$

(۵ -۲-۱)

اگر $|n(R(t))\rangle$ بهنجار شده فرض شود می توان نتیجه گرفت $\gamma_n(t)$ حقیقی محض است زیرا:

$$
\begin{aligned}
&< n(R(t))|n(R(t)) >= 1 \\
&\Rightarrow \nabla_R(< n(R(t))|n(R(t)) >)=0 \\
&\Rightarrow< \nabla_R n(R(t))|n(R(t)) > + < n(R(t))|\nabla_R n(R(t)) >= 0 \\
&\Rightarrow< n(R(t))|\nabla_R n(R(t)) > +(< n(R(t))|\nabla_R n(R(t)) >)^* = 0
\end{aligned}
$$

در نتیجه $< n(R(t))|\nabla_R n(R(t)) >$ موهومی محض است و بنابراین $\gamma_n(t)$ حقیقی محض است.

حال اگر فرض شود که R، روی یک مسیر بسته حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان T به جای اول خود باز مـی‌گـردد یعنی: $R(T)=R_0$

در این صورت رابطه‌ی (۱-۲-۵) به رابطه (۱-۲-۶) تبدیل می شود:

$$\gamma_n(c) = i\oint_c < n(R)|\nabla_R n(R) > dR \qquad (۱-۲-۶)$$

می توان از (۱-۲-۶) با استفاده از قضیه استوکس به رابطه‌ی زیر رسید:

$$\gamma_n(c) = -\iint_{s(c)} V_n(R).ds \qquad (۱-۲-۷)$$

که در آن:

$$V_n(R) = \operatorname{Im} \nabla_R n\times < n(R)|\nabla_R n(R) > \qquad (۱-۲-۸)$$

با استفاده از اتحاد $\nabla\times\{f(x)\nabla g(x)\} = (\nabla f(x))\times(\nabla g(x))$، $V_n(R)$ به صورت زیر بدست می آید:

$$V_n(R) = \operatorname{Im} < \nabla_R n(R)| \times |\nabla_R n(R) >$$

(۱-۲-۹)

$$\Rightarrow V_n(R) = \text{Im} \sum_{m \neq n} < \nabla_R n(R) | m(R) > \times < m(R) | \nabla_R n(R) > \qquad (۱۰-۲-۱)$$

علت صرف نظر کردن از جمله‌ی n=m این است که همان طور کـه قـبلاً اشـاره شـد $< \nabla_R n(R) | n(R) >$ ، موهـومی محض است در نتیجه $< \nabla_R n(R) | n(R) > \times < n(R) | \nabla_R n(R) >$ ، حقیقی محض است، بنـابراین قـسمت موهـومی آن صفر می‌شود.

مطالبی را که تا کنون در این فصل گفته شد، می توان بدین صورت جمع بندی کرد که در صـورتی کـه تغییـرات زمـانی هامیلتونی بی‌دررو باشد، پس از یک دوره تناوب بردار حالت سیستم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|n(R_0), t_0; T >= \exp(i\gamma_n(C)) \exp\{\frac{-i}{\hbar} \int_0^T E_n(R(t'))dt'\} |n(R(T))\rangle \qquad (۱۱-۲-۱)$$

که در آن:

$$\gamma_n(c) = -\iint V_n(R).ds$$

$\gamma_n(c)$ که یک عدد حقیقی است، فاز بری، نام دارد.

از حالا به بعد ارتباط بین این فاز و خواص هندسی فضای پارامتری، نشان داده خواهد شد.

۱-۳ ضریب فاز هندسی

با توجه به (۲-۱-۱۰)، $V_n(R)$ ، به صورت زیر داده می شود:

$$V_n(R) = \text{Im} \sum_{m \neq n} < \nabla_R n(R) | m(R) > \times < m(R) | \nabla_R n(R) >$$

از طرفی با مشتق گیری از طرفین رابطه (۱-۲-۱) می توان به (۱-۳-۱) رسید:

$$(\nabla_R H(R))|n(R)> + H(R)(\nabla_R|n(R)>)$$
$$= (\nabla_R E(R))\ |n(R)> + E_n(R)\ |\nabla_R n(R)>$$
(۱-۳-۱)

اگر طرفین (۱-۳-۱) در $<m|$ ضرب شود و $m \neq n$ باشد رابطه زیر بدست می آید:

$$<m|\nabla_R\ H(R)|\ n(R)> + E_m <m|\nabla_R\, n(R)> =$$
$$\nabla_R\, E(R) < m(R)|n(R)> + E_n\,(R) < m|\nabla_R\, n(R)>$$
(۲-۳-۱)

$$\Rightarrow \langle m(R)|\nabla_R n(R)\rangle = \frac{< m(R)|\nabla_R\, H(R)|n(R)>}{E_n - E_m}\ , m \neq n$$

(۳-۳-۱)

با جاگذاری (۱-۳-۳) در (۱-۲-۱۰) به رابطه‌ی زیر، می رسیم:

$$V_n(R) = \mathrm{Im} \sum_{m \neq n} \frac{< n(R)|\nabla_R\, H(R)|m(R)> \times < m(R)|\nabla_R H(R)|\ n(R)>}{\left(E_m(R) - E_n(R)\right)^2}$$

(۴-۳-۱)

با دقت در فرم $V_n(R)$ می‌بینیم کـه اولاً $V_n(R)$، یـک تـابع دیفرانـسیلی مرتبـه ۲ از هـامیلتونی اسـت و ثانیـاً در نقطـه تبهگنی‌هامیلتونی تکینه است. بنابراین می‌توان حدس زد نقطه تبهگنی نقطه‌ی خاصی در $V_n(R)$ باشد. پـس از بدسـت آمـدن نوع ارتباط $\gamma_n(c)$ با خواص هندسی فضای پارامتری، ویژگی هندسی خاص نقطه تبهگنی، مشخص می‌شود.

برای محاسبه‌ی فاز هندسی بری بحث خود را با بررسی یک مثال دنبال می‌کنیم.

سیستمی با اسپین S و با بردار گشتاور مغناطیسی $\frac{\mu g \vec{S}}{\hbar}$ را ، در نظر بگیرید ، که در یک میدان مغناطیـسی $\vec{B}$ قـرار دارد. فرض کنید اندازه‌ی $\vec{B}$ ثابت است اما جهت آن به آرامی و بـه صـورت بـی‌دررو بـا زمـان تغییـر مـی‌کنـد جهـت میـدان مغناطیسی که متغیر با زمان است، با $\hat{B}$ نشان داده می شود. هامیلتونی این سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H(t) = -\frac{\mu g\ \vec{S}.\vec{B}}{\hbar}$$
(۵-۳-۱)

ویژه مقدار اسپین در راستای میدان مغناطیسی ، با عدد کوانتـومی m ، نـشان داده مـی شـود کـه m، مـی‌توانـد مقـادیر مختلفی از S– تا S را داشته باشد یعنی داریم:

$$E_m(t) = -\mu gBm, m = -S,...,S \qquad (۱-۳-۶)$$

از طرفی داریم:

$$\nabla_B H(t) = -\frac{\mu g\vec{S}}{\hbar} \qquad (۱-۳-۷)$$

با جاگذاری $\nabla_B H(t)$ و $E_m(t)$ در رابطه‌ی (۱-۳-۴) می توان به رابطه‌ی (۱-۳-۸) رسید:

$$V_n(R) = \mathrm{Im}\sum_{m'\neq m}\frac{<m\left|\frac{\vec{S}}{\hbar}\right|m'>\times<m'\left|\frac{\vec{S}}{\hbar}\right|m>}{B^2(m'-m)^2} \qquad (۱-۳-۸)$$

فرض کنید محور z فضای اسپینی روی $\hat{B}$ منطبق است در این صورت داریم:

$$S_Z|m\rangle = m\hbar|m\rangle \qquad (۱-۳-۹)$$

$$\Rightarrow V_m(R) = \mathrm{Im}\left[\sum_{m'\neq m}\frac{\vec{A}\times\vec{D}}{B^2(m'-m)^2}\right] \qquad (۱-۳-۱۰)$$

که در آن :

$$;\vec{A} = \frac{1}{\hbar}(<m|S_x|m'>\hat{i} + <m|S_y|m'>\hat{j} + <m|S_z|m'>\hat{k})$$

$$= \frac{1}{\hbar}(<m|S_x|m'>\hat{i} + <m|S_y|m'>\hat{j})$$

$$,\vec{D} = \frac{1}{\hbar}(<m'|S_x|m>\hat{i} + <m'|S_y|m>\hat{j} + <m'|S_z|m>\hat{k})$$

$$= \frac{1}{\hbar}(<m'|S_x|m>\hat{i} + <m'|S_y|m>\hat{j})$$

از آن جایی که S_x, S_y ترکیب خطی از S_- و S_+ هستند ، از بین تمام m' ها ، فقط $m' = m \pm 1$ قابـل قبـول اسـت.

بنابراین داریم:

$$V_m(R) = \mathrm{Im}\frac{C}{B^2}$$ (۱۱-۳-۱)

که در آن:

$$C = \frac{1}{\hbar^2}\{\left[(<m|S_x|m-1>\hat{i} + <m|S_y|m-1>\hat{j}\right]$$
$$\times\left[(<m-1|S_x|m>\hat{i} + <m-1|S_y|m>\hat{j})\right]$$
$$+\left[(<m|S_x|m+1>\hat{i} + <m|S_y|m+1>\hat{j}\right]$$
$$\times\left[<m+1|S_x|m>\hat{i} + <m+1|S_y|m>\hat{j})\right]\}$$
$$= \frac{1}{\hbar^2}\{<m|S_x|m+1><m+1|S_y|m> - <m|S_y|m+1><m+1|S_x|m>$$
$$+ <m|S_x|m-1><m-1|S_y|m> - <m|S_y|m-1><m-1|S_x|m>\}\hat{k}$$

از طرفی داریم:

$$<S, m\pm 1\left|\frac{Sx}{\hbar}\right|S, m> = \frac{1}{2}\sqrt{(\mathrm{S}\mp m)(S\pm m+1)}$$ (۱۲-۳-۱)

$$<S, m\pm 1\left|\frac{Sy}{\hbar}\right|S, m> = \frac{i}{2}\sqrt{(\mathrm{S}\mp m)(\mathrm{S}\pm m+1)}$$ (۱۳-۳-۱)

با قرار دادن (۱-۳-۱۲) و (۱-۳-۱۳) در رابطه‌ی (۱-۳ -۱۱) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$V_m(R) = \mathrm{Im}\frac{-\frac{i}{2}(S-m)(S+m+1) + \frac{i}{2}(\mathrm{S}+m)(\mathrm{S}-m+1)}{B^2}\hat{k}$$
$$= \frac{m}{B^2}\hat{k}$$ (۱۴-۳-۱)

یعنی دار یم:

$$(V_m(R))_x = 0 \qquad (V_m(R))_Y = 0 \qquad (V_m(R))_z = \frac{m}{B^2}$$

از طرفی فرض کردیم، محور z فضای اسپینی، روی جهت میدان مغناطیسی منطبق باشد. یعنی فـرض کـردیم $\hat{k}$ همـان $\hat{B}$ باشد در نتیجه داریم:

$$V_m(R)=\frac{m}{B^2}\hat{B} \qquad (۱-۳-۱۵)$$

و می دانیم، $\gamma(c)=-\iint V_n(R).ds$ است. در این انتگرال، انتگرال گیری روی سطحی است که توسط عامل خـارجی R در حین حرکت روی مسیر بسته ساخته می‌شود. در این جا، عامل خارجی تغییر مـی‌کنـد و دوبـاره سـرجای اول خـود بـاز می‌گردد، یعنی نوک پیکان نمایشگر بردار میدان مغناطیسی، مسیر بسته‌ای را روی سطح کره‌ای به شعاع B طی مـی‌کنـد و $\hat{B}$ بردار عمود بر سطح این کره است. بنابراین داریم:

$$d\vec{s}=B^2 d\Omega\,\hat{B} \Rightarrow \gamma_m(c)=-\iint\frac{m}{B^2}B^2\,d\Omega=-m\Omega \qquad (۱-۳-۱۶)$$

در رابطه بالا Ω زاویه فضایی است که، میدان مغناطیسی در حین چرخش بی درروی خـود آن را، مـی سـازد رأس ایـن زاویه نقطه B=0، است. حال به بحث ابتدایی این بخش در ارتباط با ویژگی هندسی خاص نقطه تبهگنی، بر می گردیم.

در این مثال از آن جایی که :

$$E_m=-\mu\, g\, mB$$

برای مقادیر مختلف m ، تبهگنی تنها در نقطه‌ی B=0 رخ می‌دهد. بنابراین می‌توان نتیجـه گرفـت، نقطـه‌ی تبهگنـی در واقع نقطه‌ی رأس زاویه فضایی بری، است.

به‌طور کلی می‌توان گفت چنان چه هامیلتونی ما وابسته به یک عامـل خـارجی باشـد، و ایـن عامـل خـارجی بـه صـورت بی‌دررو، با زمان تغییر کند، و سیستم ابتدا در n–امین ویژه کت‌هامیلتونی باشد، پس از گذشت یک دوره تناوب هامیلتونی (کـه یک دوره تناوب هامیلتونی مدت زمانی است که عامل خارجی دستخوش تغییرات زمانی شده و مجدداً سر جـای اول خـود بـاز می‌گردد.)، بردار حالت سیستم با n–امین ویژه کت هامیلتونی در زمـان t یعنـی بـا $|n(t)>$ ، تنهـا در حـد یـک عامـل فـاز ، اختلاف پیدا می‌کند.

این عامل فاز به دو قسمت تقسیم می‌شود یک قسمت که فاز دینامیکی است و قسمت دیگر فاز بری است.

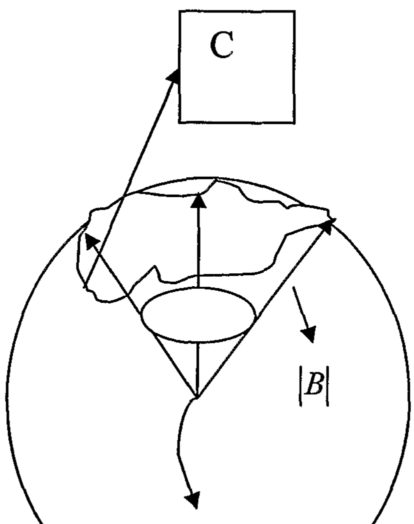
که فاز بری دارای ویژگی های زیر است :

۱- فاز بری حقیقی محض است.

۲- این فاز متناسب با زاویه فضایی است که، مسیر بسته ای که هامیلتونی روی آن حرکت کرده، از نقطه تبهگنی، تحت آن زاویه، دیده می شود.

یعنی اگر این زاویه فضایی را، با Ω نشان دهیم ، رأس Ω ، همان نقطه تبهگنی است.

در مثالی که به بررسی آن پرداختیم ، نقطه تبهگنی، نقطه $B=0$ ، بود . شکل شماره یک، زاویه فضایی Ω ، را در این مثال خاص نشان می دهد ، در این شکل شعاع کره B می باشد و مسیر بسته C روی سطح کره، مشخص شده است.



(شکل شماره یک)

$\gamma(c)$را، فاز هندسی وابسته به نقطه تبهگنی بری می‌گویند.

دیـــدیم $\gamma_n(c)=-m\Omega$ است. در نتیجه هرگاه شرایط به گونه‌ای باشد کـه: $m\Omega=\pm\pi$ در ایـن صـورت بـردار حالت سیستم، تغییر علامت می‌دهد.

نکته‌ای که باید به آن توجه کرد این است که این تغییر علامت فقط برای فرمیون‌ها که اسپین آنها نیمه صحیح است نمی‌باشند، بلکه این اتفاق برای بوزون‌ها با m صحیح نیز می‌افتد.

۴-۱ ناوردایی پیمانه‌ای فاز بری

یکی دیگر از ویژگی‌های فاز بری ناوردا بودن آن تحت تبدیلات پیمانه‌ای است اثبات ناوردایی پیمانه‌ای فاز بری بسیار ساده است. فرض کنید $|n(R)>$ به میزان $\exp[i\ x\ (R)]$ تغییر فاز دهد، یعنی:

$$|n(R)> \to \exp[i\, x\, (R)]\, |n(R)> \qquad (۱-۴-۱)$$

در این صورت:

$$< n(R)|\nabla_R\, n(R)> \to < n(R)\, |\nabla_R\, n(R)> + i\nabla_R\, x(R) \qquad (۲-۴-۱)$$

اما داریم:

$$V_n(R) = \operatorname{Im} \nabla_R\ n \times < n(R)|\nabla_R\, n(R)>$$

و از آن جایی که $\nabla \times \nabla x = 0$، $V_n(R)$ بدون تغییر باقی می‌ماند. بنابراین $\gamma_n(c)$، ناوردای پیمانه‌ای است.

فصل ۲

محاسبه فاز بری به روش آقایان آهارنو و آناندان [1]

در فصل قبل دیدیم در شرایطی که تغییرات زمانی هامیلتونی بی دررو باشد پس از یک گذشت زمانی برابر یک دوره تناوب هامیلتونی، اختلاف بردار حالت با بردار حالت اولیه در حد یک عامل فاز است که این عامل فاز مساوی است با حاصل جمع فاز دینامیکی ، با یک فاز دیگر به نام فاز بری.
در ادامه دیدیم فاز بری با زاویه فاز فضایی، که توسط عامل خارجی هامیلتونی ساخته می شود، متناسب است. و به همین خاطر فاز هندسی بری، نامیده می شود.
در این فصل به تعریفی که توسط آقایان آهارنو و آناندان، برای فاز بری در مورد غیر بی دررو اما در تحـول هـای دوره ای ارائـه شده ، خواهیم پرداخت .[3].

۲ - ۱ فاز غیر بی درروی بری در تحول دوره ای

با خواندن عبارت عنوان این بخش، اولین سوالی که به ذهن می رسد این است که تحول دوره ای چیست ؟
تحول دوره ای، نوع جالبی از تحول های سیستم های فیزیکی است، که اگرچه ندرتاً اتفاق می افتد ولی به دلیل ویژگی های خاص خود بسیار مورد توجه است. در این نوع تحول بردار حالت بعد از تحول به جای اول خود باز می گردد بنابراین بردار حالت نهایی با بردار حالت اولیه در حد یک عامل فاز اختلاف دارد.

یعنی داریم:

$$|\psi(T)\rangle = \exp(i\varphi)|\psi(0)\rangle$$

(۱-۱-۲)

که در آن φ ، یک عدد حقیقی است.

می توان با یک نگاشت به فضای جدیدی رفت که در آن، $|\psi(t)\rangle$ به $|\psi'(t)\rangle$ تبدیل می شود. در این فضا مـسیر (0,T)، به یک مسیر بسته تبدیل می شود.

Aharonov Y and Anandan J - 1

این نگاشت به صورت زیر تعریف می شود :

$$\pi(|\psi\rangle)=|\psi'\rangle$$
$$;|\psi'\rangle=c|\psi\rangle$$

(۲-۱-۲)

که در(۲-۱-۲) ، c یک عدد موهومی، است.

اگر $|\overline{\psi}(t)\rangle$ به صورت $|\overline{\psi}(t)\rangle=\exp(-if(t))|\psi(t)\rangle$ تعریف شود به گونه ای که $f(T)-f(0)=\varphi$ باشد، داریم :

$$|\overline{\psi}(T)\rangle=|\overline{\psi}(0)\rangle \tag{۳-۱-۲}$$

با قرار دادن $\exp(if(t))|\overline{\psi}\rangle$ به جای $|\psi(t)\rangle$ در معادله شرودینگر وابسته به زمان به رابطه زیر می رسیم :

$$\frac{-df}{dt}=\frac{1}{\hbar}\langle\psi|H|\psi\rangle-\langle\overline{\psi}|i\frac{d}{dt}|\overline{\psi}\rangle \tag{۴-۱-۲}$$

از آن جایی که هدف ما محاسبه فاز تعمیم یافته بری است کافی است فاز دینامیکی از φ کم شود و آن چه باقی می ماند با β نشان داده می شود که β معادل فاز بری برای تحول دوره ای است و با رابطه (۲-۱-۶) داده می شود ولی باید دقت کرد در هیچ یک از مراحل رسیدن به (۲-۱-۶) فرض نشده که تغییرات زمانی هامیلتونی بی دررو باشد و در رسیدن به این رابطه هیچ تقریبی به کار نرفته است بنابراین β را می توان فاز تعمیم یافته بری در شرایط غیر بی دررو و در تحولات دوره ای نامید.

$$\beta=\phi+\frac{1}{\hbar}\int_0^T\langle\psi|H|\psi\rangle dt\Rightarrow \tag{۵-۱-۲}$$

$$\beta=\int_0^T\langle\overline{\psi}|i\frac{d}{dt}|\overline{\psi}\rangle dt$$

(۶-۱-۲)

جمله دوم سمت راست رابطه (۲-۱-۵)، فاز دینامیکی است در این جا چون سیستم همواره در یک ویژه کت هامیلتونی نیست(به دلیل غیر بی دررو بودن تغییرات زمانی هامیلتونی)، فاز دینامیکی به این روش محاسبه می شود، که البته این مطلب در فصل های بعدی به صورت مفصل توضیح داده خواهد شد .

۲-۲ محاسبه β برای مثال تغییرات آهسته هامیلتونی با زمان

حال که به یک تعریف از فاز بری در تحول های دوره ای رسیدیم، می توان چند مثال را مورد بررسی، قرار داد. به عنوان اولین مثال تغییرات آهسته هامیلتونی با زمان را در نظر بگیرید، از معادله شرودینگر مستقل از زمان داریم :

$$H(R(t))|n(R(t))\rangle=E_n(R(t))|n(R(t))> \tag{۱-۲-۲}$$

در حالت کلی:

$$|\psi(t)\rangle=\sum_n a_n(t)e^{\frac{-i}{\hbar}\int E_n dt}|n(t)\rangle \tag{۲-۲-۲}$$

با قرار دادن(۲ـ۲ـ۲) در معادله شرودینگر وابسته به زمان به (۲ـ۲ـ۳) می رسیم:

$$\dot{a}_m = -a_m\left\langle m\middle|\dot{m}\right\rangle - \sum_{n\neq m} a_n \frac{\langle m|\dot{H}|n\rangle}{E_n - E_m}\exp\{-\frac{i}{\hbar}\int(E_n - E_m)dt\}$$

(۲ـ۲ـ۳)

اگر $\sum_{n\neq m}\left|\hbar\frac{\langle m|\dot{H}|n\rangle}{(E_n - E_m)^2}\right| << 1, a_n(0) = \delta_{nm}$ باشد . جمله دوم در (۲ـ۲ـ۳) قابل صرف نظر کردن می شود در این صورت داریم:

$$a_m(t) \approx \exp(-\int\left\langle m\middle|\dot{m}\right\rangle dt)a_m(0)$$ (۲ـ۲ـ۴)

$$\Rightarrow \beta = i\int_0^T\left\langle m\middle|\dot{m}\right\rangle dt$$ (۲ـ۲ـ۵)

رابطه (۲-۲-۵) در واقع همان رابطه (۲-۱-۶) است که در شرایط بی دررو به آن رسیده بودیم.

اگر به جای $\left|\tilde{\psi}\right\rangle$ در رابطه (۲-۱-۶)، $\left|m\right\rangle$ قرار دهیم به رابطه (۲ـ۲ـ۵) می رسیم ولی باید توجه داشته باشیم که (۲-۱-۶) ، یک رابطه دقیق است، در حالی که (۲ـ۲ـ۵) تقریبی است. و فقط در شرایطی که تغییرات هامیلتونی به صورت بی دررو صورت می گیرد، صحت دارد.

۲ـ۳ محاسبه β ، برای ذرات اسپین ۱/۲، که در معرض میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت قرار دارند

مثال بعدی سیستمی شامل ذرات اسپین ۱/۲ است ، که در معرض میدان مغناطیسی ثابت و یکنواختی قرار گرفته اند، با فرض این که میدان مغناطیسی در راستای محورz باشد ، هامیلتونی چنین سیستمی را می توان به صورت زیر، نوشت:

$$H = -\mu B\sigma_Z$$

$$\sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$,\left|\psi(0)\right\rangle = \begin{pmatrix} Cos(\theta/2) \\ Sin(\theta/2) \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\psi(t)\right\rangle = \exp(i\mu B\sigma_Z t/\hbar)\left|\psi(0)\right\rangle = \begin{pmatrix} \exp(i\mu tB/\hbar)Cos(\theta/2) \\ \exp(-i\mu tB/\hbar)Sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

(۲-۳-۱)

در $T = \frac{\pi\hbar}{\mu B}$ داریم :

$$\left|\psi(T)\right\rangle = \exp(i\pi)\left|\psi(0)\right\rangle$$

(۲ـ۳ـ۲)

$$\Rightarrow \beta = \pi(1 - Cos\theta)$$

(۲ـ۳ـ۳)

زیرا فاز دینامیکی در این مثال $\pi Cos\theta$ ، می شود.

۲ـ۴ محاسبه β برای ذرات اسپین ۱/۲، که در معرض میدان مغناطیسی متغیر با زمان، قرار دارند

مثال سوم نیز سیستمی شامل ذرات اسپین ۱/۲ است ، که در معرض یک میدان مغناطیسی قرار گرفته اند، اما این بار، میدان مغناطیسی به صورت زیر با زمان تغییر می کند:

$$\vec{B} = \vec{B_0} + \overrightarrow{B_1(t)}$$ (۲-۴-۱)