بسم الله الرحمن الرحيم

٣١٥٠١

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد کرمان

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی

گرایش: محض

- ۹۱۲۸

موضوع:

فضاهای توپولوژی فازی

استاد راهنما:

دکتر اسفندیار اسلامی

نگارش:

زهره قاضی زاده

سال تحصیلی: ۱۳۷۹

۳۱۵۰۱

موضوع :

فضاهای توپولوژی فازی

توسط:

زهره قاضی زاده

پایان نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته وگرایش: ریاضی محض

از این پایان نامه در تاریخ ۱۳۷۹/۵/۶ در مقابل هیئت داوران دفاع به عمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیئت داوران

استاد راهنما: دکتر اسفندیار اسلامی

استاد مشاور: دکتر محمد رضا مولایی

داور: دکتر نصرالله گرامی

مدیر گروه آموزشی کارشناسی ارشد

دکتر اسفندیار اسلامی

معاون آموزشی دانشگاه

آقای مجید غلامحسین پور

سرپرست کمیته تحصیلات تکمیلی

دکتر محمد حسین متقی

رئیس دانشگاه

دکتر محمد حسین متقی

تقدیم به پدر بزرگوارم

استاد کرامت و اخلاق نیک

به انسان فرشته خو و پاک سرشتی که آرامش حیات و جلوه‌های امیدبخش زندگی من معلول فداکاریها و محبتهای بی دریغ اوست.

به وجود مقدسی که سرشار از محبت برای خوشی و سعادت من بوده و همواره درس مهربانی، صبر، ایثار و محبت را به من آموخت.

تقدیم به مادر مهربانم

که صبوری چشم بیدارش به من حکایت ایثار و عاطفه آموخت.

به او که در سکوت سختی‌ها را پذیرا شده،

به او که تمام هستی‌اش ما بودیم و هرگز مرا توان جبران قطره‌ای از دریای بیکران زحماتش نخواهد بود.

تقدیم به همسر عزیزم

که صادقانه پرواز در بیکران سبز محبت را به من آموخت،

او که آبدانه‌های باران مهرش در کویر زندگیم بهار آفرید.

و پاکی و صداقتش، بهار را جاودانه ساخت

و دوستی‌اش دیرپائی زندگی را دلاویزترین بهانه گشت.

تقدیم به اساتید ارجمندم

انسانهای بزرگمرد وارسته‌ای که تمامی اراده و تلاش‌اند، و نشان دادند که خواستن عین توانستن است.

به پاس زحمات و راهنمائیهای ارزشمندشان آنهایی که در این رهگذر پرفراز و نشیب همچون مشعلی فروزان مرا یار بودند.

چکیده

در سال ۱۹۶۵ نظریه مجموعه‌های فازی برای اولین بار توسط یک ایرانی الاصل بنام پروفسور زاده بوجود آمد و در رشته‌های مختلف ریاضی بکارگرفته شد. چانگ، ونگ و لوین بعضی از مفاهیم توپولوژی عمومی را در نظریه‌های فازی بکار بردند و نظریه فضاهای توپولوژی فازی را گسترش دادند.

حال در این رساله، به بررسی این نظریه می‌پردازیم که شامل چهار فصل می‌باشد. در فصل اول مقدمات و تعاریف مورد نیاز گنجانده شده‌اند. در فصل دوم خواص مجموعه‌های باز و توابع پیوسته مورد بررسی قرارگرفته‌اند. فصل سوم این رساله، مجموعه‌های فشرده و همبند را مورد بررسی قرار می‌دهد و در فصل چهارم که کامل کنندهٔ فصلهای قبل می‌باشد به بررسی خواص گروههای فازی و گروههای توپولوژی فازی می‌پردازیم.

فهرست مطالب

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل ۱

زیر مجموعه‌های فازی و خواص آن

۱-۱) مقدمه

تعریف ۱.۱.۱. اگر X یک مجموعهٔ مرجع دلخواه باشد، تابع مشخصهٔ هر زیرمجموعهٔ معمولی A از X یک تابع از X به {۰،۱} است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x)=\begin{cases} ۱ & x\in A \\ ۰ & x\notin A \end{cases}$$

اگر برد این تابع را از مجموعهٔ {۰،۱} به بازهٔ [۰و۱] توسیع دهیم این تابع را تابع عضویت نامیم که آن را با $\mu_A(x)$ مشخص می‌کنیم.

به عنوان مثال اگر $\mu_A(x)=۱$ یعنی x کاملاً عضو A است و اگر $\mu_A(x)=۰$ یعنی x اصلاً در A نیست.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید

A= {۹ و ۷ و ۵ و ۲}

آنگاه

$$\mu_A(x)=\begin{cases} ۱ & x=۲ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹ \\ ۰ & x=۱ \text{ و } ۴ \end{cases}$$

تعریف ۳.۱.۱. اگر X یک مجموعهٔ مرجع و A یک زیرمجموعهٔ فازی آن باشد

مجموعهٔ نقاطی از X که $\mu_A(x) > 0$ باشد تکیه‌گاه A نامیده می‌شود و با Supp.A نشان

داده می‌شود.

مقدار $M = \operatorname{Sup} \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعهٔ A نامیده می‌شود.

اگر ارتفاع مجموعهٔ فازی A برابر یک باشد آنگاه A نرمال نامیده می‌شود در غیر اینصورت

A را زیرنرمال گوئیم.

هر مجموعهٔ فازی زیرنرمال A را می‌توان با تقسیم $\mu_A(x)$ها بر ارتفاع A آنرا نرمال کرد.

اگر x عنصری باشد که برای آن $\mu_A(x)=\frac{1}{2}$، x را یک نقطه گذر (معبر) A می‌گوئیم.

در مثال بالا $\operatorname{Supp}A = \{2, 5, 7, 9\}$ و $M = \operatorname{Sup} \mu_A(x) = 1$ پس A نرمال است و نقطهٔ

گذری ندارد.

گاهی اوقات مجموعهٔ فازی را با زوج مرتب‌ها نشان می‌دهند مثلاً

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$$

تعریف ۴.۱.۱. اگر X یک مجموعهٔ متناهی و A زیرمجموعهٔ فازی آن باشد عدد

اصلی A برابر است با $|A| = \Sigma \mu_A(x)$ و عدد نسبی A، $\|A\| = \frac{|A|}{|X|}$ و اگر X نامتناهی

باشد $\|A\| = \int_X \mu_A(x)dx$ گاهی اوقات برای راحتی $\mu_A(x)$ را با $A(x)$ نشان می‌دهیم

تعریف ۵.۱.۱. مجموعهٔ فازی A را تهی گوئیم اگر برای هر $x \in X$، $A(x) = 0$ باشد.

تعریف ۶.۱.۱. مجموعهٔ فازی A را تام گوئیم اگر برای هر $x \in X$، $A(x) = 1$ باشد.

تعریف ۷.۱.۱. مجموعهٔ فازی A را زیرمجموعهٔ مجموعهٔ فازی B گوئیم اگر برای هر $x \in X$، $A(x) \leq B(x)$ باشد.

تعریف ۸.۱.۱. مجموعهٔ فازی A را مساوی مجموعهٔ فازی B گوئیم اگر برای هر $x \in X$، $B(x) = A(x)$ باشد.

تعریف ۹.۱.۱. مجموعهٔ فازی A' را متمم مجموعهٔ فازی A گوئیم و آن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم $A'(x) = 1-A(x)$

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر $A \subseteq B$ باشد متمم نسبی A نسبت به B را که با B-A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(B-A)(x) = B(x) - A(x)$$

مثال ۱۱.۱.۱. اگر

$$A = \{\frac{۰}{۱} \text{ و } \frac{۰/۱}{۲} \text{ و } \frac{۰/۲}{۳} \text{ و } \frac{۰/۵}{۴}\}$$

$$B = \{\frac{۰/۱}{۱} \text{ و } \frac{۰/۵}{۲} \text{ و } \frac{۰/۷}{۳} \text{ و } \frac{۰/۹}{۴}\}$$

چون برای هر x مورد نظر $A(X) \leq B(X)$ می‌باشد بنابراین $A \subseteq B$ است.

با توجه به تعریف مجموعهٔ متمم داریم:

$$A' = \{\frac{۱}{۱} \text{ و } \frac{۰/۹}{۲} \text{ و } \frac{۰/۸}{۳} \text{ و } \frac{۰/۵}{۴}\}$$

$$B' = \{\frac{۰/۹}{۱} \text{ و } \frac{۰/۵}{۲} \text{ و } \frac{۰/۳}{۳} \text{ و } \frac{۰/۱}{۴}\}$$

تعریف ۱.۱.۱۲.

اجتماع دو مجموعهٔ فازی

$A\cup B$، اجتماع دو مجموعهٔ فازی A و B به صورت یک مجموعهٔ فازی با تابع عضویت

زیر تعریف می‌شود

$$A\cup B\,(x) = \max\,\{A(x)\,,\,B(x)\} \qquad \forall\, x\in X$$

تعریف ۱.۱.۱۳.

اشتراک دو مجموعهٔ فازی

$A\cap B$، اشتراک دو مجموعهٔ فازی A و B را به صورت یک مجموعهٔ فازی با تابع عضویت

زیر تعریف می‌کنیم:

$$A\cap B(x) = \min\,\{A(x),B(x)\}$$

B و A را جدا از هم گوئیم اگر اشتراک تکیه‌گاههای A , B تهی باشد.

تعریف ۱.۱.۱۴. اگر K یک مجموعهٔ اندیس گذار باشد A_i ها، $i\in K$

زیرمجموعه‌های فازی از X باشند آنگاه $\bigcup_{i\in K} A_i$ و $\bigcap_{i\in K} A_i$ به صورت مجموعه‌های فازی با

توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند.

$$(\bigcup_{i\in K} A_i)\,(x) = \text{SUP}\,\{A_i(x)\,,\, i\in K\}$$