بسم اللّه الرحمن الرحيم

يا من فى السموات عظمته

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد(M.Sc)

گرایش :

فیزیک نجومی

عنوان :

بررسی معادلات فریدمن در فضای ناجابجا

استاد راهنما :

دکتر فاطمه احمدی کلاته احمد

استاد مشاور :

دکتر محمد رضا تنهایی اهری

پژوهشگر:

زهرا مولوی

زمستان 1390

تقدیم به محضر بانوی دو عالم فاطمه زهرا(س)

با سپاس ویژه از راهنمایی‌ها و زحمات اساتید راهنمای عزیز و گرانقدر
سرکار خانم دکتر فاطمه احمدی و جناب آقای دکترمحمدرضا تنهایی
که در انجام این پژوهش از بنده حمایت نمودند.

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب زهرا مولوی **دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی** 88066125200 **در رشته فیزیک نجومی که در تاریخ** 1390/11/29 **از پایان نامه خود تحت عنوان :** بررسی معادلات فریدمن در فضای ناجابجا **با کسب نمره و درجه دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم :**

1- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب ، مقاله و ...) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه های موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده ام .

2- این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است .

3- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل ، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم ، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم .

4- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود ، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت .

نام و نام خانوادگی : زهرا مولوی

تاریخ و امضاء :

بسمه تعالی

درتاریخ:

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای/ خانم زهرا مولوی از پایان نامه خود دفاع نموده و با

نمره بحروف و با درجه

مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

باسمه تعالی

فرم ب

فرم اطلاعات پایان نامه های کارشناسی ارشد

دانشکده علوم پایه

نام واحد دانشگاهی : تهران مرکزی کد واحد : 101	**کد شناسایی پایان نامه :**
نام ونام وخانوادگی دانشجو: زهرا مولوی **شماره دانشجویی: 8806512520**	**سال و نیمسال اخذ پایان نامه : اول 90-89** **رشته تحصیلی : فیزیک**
عنوان پایان نامه کارشناسی ارشد : بررسی معادلات فریدمن در فضای ناجابجا	
نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر فاطمه احمدی کلاته احمد **نام و نام خانوادگی استاد مشاور: دکتر محمدرضا تنهایی اهری**	
تعداد واحد پایان نامه: 6 **تاریخ صدور کد شناسایی :** **تاریخ دفاع از پایان نامه : 1390/12/1** **تاریخ ارائه مقاله :**	**نمره پایان نامه دانشجو(از 18 نمره)** **به عدد: به حروف:** **نمره مقاله دانشجو(از 2 نمره)** **به عدد: به حروف:**

ایده ناجابجایی در فیزیک اولین بار از طریق مکانیک کوانتومی که متغیرهای مکان و تکانه خطی در آن از رابطه ناجابجایی هایزنبرگ صدق می‌کنند، مطرح شد. اخیراً تئوریهای مختلف فیزیکی مانند تئوری ریسمان، تئوری میدانهای کوانتومی مکانیک کوانتوم و مکانیک کلاسیک از نقطه نظر ناجابجایی مورد توجه ویژه‌ای قرار گرفته‌اند. در این رساله نسخه ناجابجایی کیهان شناسی میدان های اسکالر بررسی شده و معادلات فریدمن و کلاین گوردون ناجابجا استخراج می‌شود. برای این منظور با جهان همگن و همسانگرد ومتریک فریدمن رابرتسون واکر شروع کرده ویک میدان اسکالر ϕ را بصورت مولفه مادی برای مدل در نظر می‌گیریم. این نسخه از کیهانشناسی ناجابجا ، که در آن دگرگونی و تغییرات خرد-ابرفضا، بجای تغییرات در فضا- زمان مد نظر است ، مورد بررسی قرار می‌گیرد وتغییرات احتمالی ناجابجایی روی معادلات فریدمن و کلاین گوردون از دو رویکرد کلاسیکی و کوانتومی بدست می‌آید. می‌خواهیم بدانیم ناجابجایی چه تغییری در معادلات دینامیک کیهانی می‌دهد.

توجه : 1. این فرم باید تایپ شده تحویل داده شود.

2. چکیده فوق ، همان چکیده داخل پایان نامه است.

3. ضروریست کلیه مشخصات پایان نامه که در این فرم درج می گردد با مشخصات تصویبی پایان نامه در لیست کدشناسایی (شامل اسامی اساتید، عنوان درج شده در فرم الف و تاریخ اخذ کدشناسایی) مطابقت داشته باشد.

امضاء استاد راهنما: **امضاء مدیر گروه:** **امضاء ریاست دانشکده:**

تاریخ **تاریخ** **تاریخ**

فهرست مطالب

فصل سوم: کیهانشناسی ناجابجا

فصل چهارم نتایج

فصل پنجم: ضمیمه‌ها

پیشگفتار

ناجابجایی در مختصات فضا زمان ، ایده‌ای است که قدمت آن به 1947برمی‌گردد و پیـدایش آن در مکانیـک کوانتومی از عدم قطعیت در اندازه‌گیری همزمان متغیرهای مزدوج کانونیک، ماننـد مومنتـوم ومکـان نشـات می‌گیرد. اخیراً ناجابجایی در رابطه با تئوریهای مختلف فیزیکـی ماننـد تئـوری ریسـمان، تئـوری میـدانهای کوانتومی، مکانیک کوانتوم، مکانیک کلاسیک وکیهانشناسی کوانتومی موردتوجه ویژه‌ای قرارگرفته‌است.

در این رساله تاثیر ناجابجایی بـر تحـول جهـان اولیـه در فرمولبنـدی نسـخه‌ای از کیهانشناسـی کـه در آن دگرگونی و تغییرات خردابرفضا بجای تغییرات در فضا- زمان مد نظر است ، مورد بررسی قـرار مـی‌گیـرد. هدف ما بدسـت آوردن تغییـرات احتمـالی ناجابجـایی، روی معـادلات فریـدمن و کلایـن گـوردون، از دو رویکرد کلاسیکی و کوانتومی است. می‌خواهیم بدانیم که آیا اساساً ناجابجایی تغییری در معادلات دینامیـک کیهانی می‌دهد و یا اینکه میزان تاثیرگذاری آن چقدر می‌باشد.

برای این منظور در فصل اول با مقدماتی از تعاریف ناجابجایی آغاز کرده و درباره جبـر پواسـون مشـاهده-پذیرهای کلاسیکی ناجابجا که متنـاظر بـا یـک مکانیـک کوانتـوم عمـومی اسـت تحقیـق نمـوده و روابـط ناجابجایی را مرور می‌کنیم. در واقع نشان می‌دهیم که چگونه ساختارهای فیزیکی، ناجابجا می‌شـوند. سـپس در فصل دوم مقدماتی از کیهانشناسی کوانتومی از قبیل بعضی مفاهیم و تقریبها مطرح می‌شود.

در فصل سوم به اثرات ناجابجایی در کیهانشناسی پرداخته ومعادلات فریدمن وکلاین گـوردون تغییـر یافتـه بدست می‌آید. روش کار در این بخش بطور خلاصه با دو رویکرد است.

الف) رویکرد کلاسیکی

این بخش با معرفی فضا- زمان فریدمن رابرتسون واکر تخت، آغاز شده و با استخراج هامیلتونی، معادلات حرکت بر حسب مختصات کانونی و در نتیجه معادله فریدمن و کلاین گوردون در فضای جابجا بدست می‌آید. سپس با مطرح کردن ناجابجایی بین مختصات فضای فاز، معادلات حرکت ودر نتیجه معادله فریدمن و کلاین گوردون تغییر یافته استخراج می‌شوند.

ب)رویکرد کوانتومی

در این قسمت با فرض همان متریک فوق و اعمال دستورالعمل کوانتش کانونی، متغیرهای خرد ابرفضا به عملگرها ارتقاء داده شده و معادله ویلر- دویت بر حسب آنها نوشته می‌شود. ناجابجایی باجایگزینی ضرب مویال به جای ضرب استاندارد توابع، در رابطه ویلر- دویت بدست می‌آید. با اعمال تقریب WKB بر معادله هامیلتون-ژاکوبی تغییر یافته، معادلات نیمه کلاسیکی کیهانی را به دست می‌آوریم.
درپایان در بخش چهارم نتایجی ازاثرات ناجابجایی بر معادلات دینامیک کیهانی و همینطور پیشنهادات و رویکردهایی که با توجه به جدید بودن این مبحث پیش روی محققین می‌باشد، مطرح می‌شود.

در بخش ضمیمه هم مبحث تکمیلی گنجانده شده که در متن مراجعاتی به مفاهیم آن داشته‌ایم.

فصل اول

ناجابجایی در فیزیک

1-1 مقدمه

هندسه ناجابجایی [1] یکی از موضوعاتی است که در سالهای اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است[1]. پیدایش ایده‌ی مختصات ناجابجا، ازجستجو برای حل انتگرالهای واگرای نظریه میدانهای کوانتومی و از مشاهدات هایزنبرگ شروع شد. او در نامه‌ای که او در اواخر 1930به پیرلز[2] نوشت، به احتمال توصیف روابط عدم قطعیت برای مختصات، به عنوان راهی برای اجتناب از تکینگی‌های خود انرژی الکترون اشاره کرد(پیرلز بعدها ازاین ایده در ارتباط با مسأله ترازهای لانداؤ استفاده کرد). هایزنبرگ همچنین در مورد این احتمال با پاولی و اپنهایمر[3] به بررسی و بحث پرداخت. سرانجام این اشنایدر[4](دانشجوی اپنهایمر)بود که برای اولین بار این ایده را در مقاله‌ای با عنوان «فضا زمان کوانتیزه» فرمول بندی کرد. تقریباً بلافاصله بعد از آن یانگ[5] طی نامه-ای که به مجله Physical Review نوشت به این مقاله واکنش نشان داد. او روش اشنایدر را در مورد فضای خمیده (به ویژه فضای دوسیته) بسط و تفسیر داده بود. سپس، در سال 1948 مویال[6]با استفاده از توابع توزیع فضای فاز ویگنر، به این مساله پرداخت و ضرب ستاره‌ای مویال[7] (ضرب مربوط به ناجابجایی) را به منظوربحث در مورد ساختار ریاضی کوانتوم مکانیک معرفی کرد[6].

برای یک سیستم کلاسیکی ساده مثل حرکت یک ذره بر روی یک خط، ساختار ضرب ستاره‌ای می‌تواند به صورت مجموعه‌ای از عملگرهای فضای فاز وایل[8] و یکریختی آن با مجموعهٔ توابع فضای فازکلاسیکی در نظر

1-Noncommutative geometry
2- Pierls
3-Oppenneimer
4-H.Snyder
5-C.N.Yang
6-Moyal
7-Moyal star product
1- Weyl

گرفته شود. این نتیجه همچنین بعدها توسط یک رهیافت هندسی توسط برزین[9] و همچنین باتالین[10] و تیوتین[11] نشان داده شد. در همین زمان بود که تئوری باز بهنجارش پاسخی برای مسئله واگرایی نظریه میدان کوانتومی یافت وموفقیت برنامهٔ باز بهنجارش در آن دوره برای مدتی ایده‌های فضای ناجابجا را کمرنگ کرد.

البته ایده‌های هندسهٔ ناجابجا در دههٔ 1980 توسط ریاضیدانانی چون کن[12] ، ورونویتز[13] و درین فلد[14] که نمایش یک ساختار دیفرانسیلی را برای مجموعهٔ ناجابجایی تعمیم دادند، دوباره احیاء شد ومفاهیم ریاضی جدیدی از فضاهای کوانتومی و گروه‌های کوانتومی بوجود آمد. با توجه به اینکه می‌توان تعداد زیادی ساختارهای دیفرانسیلی را به یک فضای توپولوژیکی معلوم نسبت داد، می‌توان محاسبات دیفرانسیلی بسیاری را روی یک جبر معین تعریف کرد.

شواهد محکمتری از نا جابجایی فضا - زمان ، از تئوری ریسمان بدست آمد. درحال حاضر تئوری ریسمان ، محتمل‌ترین کاندیدا برای نظریه کوانتومی گرانش است. در مقیاس های خیلی ریز مثل مقیاس ریسمانی و در انرژی‌های بالا، اثرات ناجابجایی در فضا مشاهده می‌شود. ریسمانها شامل مقیاس طول بنیادی محدود l_s هستند که می‌تواند به عنوان سنجه‌ای(واحد اندازه‌گیری) برای ساختار با طول کمینه مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین فواصل کوچکتر از l_s قابل مشاهده و اندازه‌گیری نیست. در واقع بر مبنای تحلیل دامنه‌های پراکندگی ریسمان با انرژی بسیار زیاد ، روابط عدم قطعیت هایزنبرگ تعمیم یافته بوسیلهٔ تئوری ریسمان به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود

$$\Delta X \geq \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\Delta P} + {l_s}^2 \Delta P\right)$$

به سادگی می‌توان دید که در حد $l_s \to 0$ ، رابطهٔ فوق به کوانتوم مکانیک معمولی می‌انجامد.

2-Berezin
3-Batalin
4-Tyutin
5-Connes
6-Woronowicz
7-Drinfeld

سایبرگ و ویتن در مقاله‌ای، ایده ناجابجایی در نظریه ریسمان را به یک میدان غیر صفر B (میدانی مشابه میدان مغناطیسی)تعمیم دادند. مقالهٔ اصلی سایبرگ[15] و ویتن[16] [2] حدودی را که در آنها کلیات دینامیک ریسمان می‌تواند بر حسب نظریه پیمانه‌ای جفت شده کمینه روی یک فضای ناجابجایی توضیح داده شود، معرفی کرد. آنها نشان دادند میدانهای پیمانه‌ای معمولی و میدانهای پیمانه‌ای ناجابجایی هم ارزند. این تغییر متغیر عموماً به عنوان نگاشت $(S-W)$ شناخته می‌شود.

در نظریه ابرتقارن[17] هم، جبر درجه‌بندی شده Z_2، ممکن است می‌تواند به عنوان یک مورد خاص ناجابجایی تلقی شود. یعنی ابر پاد ذرهٔ ذرات کوانتومی معمولی، تنها زمانی قابل مطالعه است که یک نوع خاص ناجابجایی به نام ابرتقارن در نظر گرفته شده باشد. علاوه بر این پارامتر دگرگونش به صورت یک ثابت بنیادی است که فیزیک توصیف شده بر روی یک فضای ناجابجایی را مشخص می‌کند.

در سالهای اخیر علاقه و انگیزه زیادی در بررسی نظریه های فیزیکی مختلف، برروی فضاهای ناجابجایی ایجاد شده است. تحقیقات گسترده‌ای که امروزه توسط ریاضی‌دانان برجسته دنیا انجام شده به بررسی مدل استاندارد پدیده‌شناسی فیزیک ذرات، به عنوان یک هندسه فضا ـ زمان جدید پرداخته، که هدف نهایی آن بررسی اثر کوانتومی هال، ریسمانها، بازبهنجارش، نظریه میدانهای کوانتومی، کیهانشناسی و گرانش می‌باشد.

موضوع اصلی این بخش بررسی برخی از جنبه‌های مکانیک کلاسیک ناجابجایی ومکانیک کوانتومی ناجابجایی می‌باشد. دراینجا نشان خواهیم داد که چگونه ساختارهای فیزیکی ناجابجا می‌شوند.

1-2 کوانتش بوسیله ضرب مویال ستاره‌ای

1-Seiberg
2-Witten
3-super symmetry

می‌دانیم مکانیک کوانتومی به صورت یک هندسه هم تافته[18] ناجابجا و به صورت ماتریسی قابل بررسی-است[3]. این امر با تعمیم توصیف معمول مکانیک کلاسیک به عنوان یک هندسه هم تافته، امکان پذیر می‌شود. در نظریه جبری دگرگونش ستاره‌ای[19] ، مکانیک کوانتومی به عنوان یک دگرگونی $\hbar$ ازجبر A_0 مشاهده پذیرهای کلاسیکی بیان می‌شود. این فرآیند شامل جایگزین کردن جبر A_0 با جبر $A_\hbar$ متغیرهای کوانتومی، می‌باشد. در واقع جبر $A_\hbar$ بوسیله همان مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی تولید می‌شود، با این تفاوت که ضرب نقطه‌ای معمولی به **ضرب مویال** تبدیل شده و حد کلاسیکی بوسیله $\hbar \to 0$ برآورده می‌شود. این فرآیند کوانتش بوسیله دگرگونش اولین بار توسط بین[20] انجام پذیرفت[4].

برای شروع فرض می‌کنیم دریک فضای N بعدی مختصات x_i و تکانه‌های p_i $(i=1,2,3,..,N)$، جبر A_0 را بر روی فضای فاز کلاسیکی، بوسیله ساختار کروشه پواسون معمولی، به شکل زیر تولید می‌کنند

$$\{x_i, x_j\}=0 \qquad \{x_i, p_j\}=0 \qquad \{p_i, p_j\}=0 \qquad (1-1)$$

اگر متغیرهای کلاسیکی بالا را در فضای فاز بنویسیم به گونه‌ای که u_a متغیرهای ما باشند، به این شکل که $a=1,2,3,...,N,...,2N$

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 \\ \vdots \\ u_N = x_N, \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_{N+1} = p_1 \\ u_{N+2} = p_2 \\ \vdots \\ u_{2N} = p_N, \end{cases}$$

در اینصورت کروشه پواسون به این فرم خواهد بود

$$\{u_a, u_b\} = \omega_{ab}$$

1-Symplectic
2-Star-deformation
3-Bayen & al

در اینجا ω یک ماتریس $2N \times 2N$ است و ساختار همتافته کلاسیکی نامیده می‌شود با $Det(\omega)=1$

$$\omega = \begin{pmatrix} O & I_{N\times N} \\ -I_{N\times N} & O \end{pmatrix}$$

علاوه براین معادلات حرکت سیستم کلاسیکی با توجه به هامیلتونی، به شکل زیر داده شده‌اند

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} \qquad , \qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

فرض کنیم یک فضای دو بعدی مختصات و به تبع آن یک فضای فاز چهار بعدی داریم که در آن

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 \\ u_3 = p_1 \\ u_4 = p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{u_1,u_2\} = \{x_1,x_2\} = 0 \\ \{u_1,u_3\} = \{x_1,p_1\} = 1 \\ \{u_3,u_4\} = \{p_1,p_2\} = 0 \\ \{u_4,u_2\} = \{p_2,x_2\} = -1 \\ \quad , \ \ldots \end{cases}$$

ازطرفی

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

این ضرب به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f *_{\hbar} g)(u) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\omega^{ab}\partial_a^{(1)}\partial_b^{(2)}\right] f(u_1)g(u_2)\Big|_{u_1=u_2=u} \qquad (1\text{-}2)$$

در این فرایند کوانتش معادل با دگرگونش ستاره‌ای از جبر کلاسیکی A_0 می‌باشد، به این صورت که جبر عملگری هایزنبرگ با جبر کوانتومی (دگرگون شده) $A_{\hbar}$ جایگزین شده و به شکل زیر نشان داده می‌شود

$$\{x_i, x_j\}_\hbar = 0 \quad , \quad \{x_i, p_j\}_\hbar = i\hbar\delta_{ij} \quad , \quad \{p_i, p_j\}_\hbar = 0 \qquad (1-3)$$

که در آن رابطه زیر برقرار است

$$\omega^{ab}\omega_{bc} = \delta^a_c$$

چون داریم

$$\{f, g\}_\hbar = f *_\hbar g - g *_\hbar f$$

با استفاده از جبر کلاسیکی، A_0 را که در این مثال یک فضای فاز چهار بعدی است، دچار دگرگونی می‌کنیم

$$(f *_\hbar g)(u) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\partial_i^{(1)}\partial_j^{(2)}\right] f(u_1)g(u_2)\Big|_{u_1=u_2=u}$$

$$= \left[1 + \left(\frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\partial_i^{(1)}\partial_j^{(2)}\right)\right] f(u_1)g(u_2)\Big|_{u_1=u_2=u} + O(\hbar^2)$$

$$= f(u)g(u) + \frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\partial_i f(u)\partial_j g(u) + O(\hbar^2)$$

$$\begin{aligned}
\{u_1, u_2\}_\hbar &= u_1 *_\hbar u_2 - u_2 *_\hbar u_1 \\
&= u_1u_2 + \frac{i\hbar}{2}\omega^{12}\partial_1 u_1 \partial_2 u_2 - \left(u_2u_1 + \frac{i\hbar}{2}\omega^{21}\partial_2 u_2 \partial_1 u_1\right) \\
&= u_1u_2 + 0 - u_2u_1 - 0 \\
&= u_1u_2 - u_2u_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{u_1, u_2\}_\hbar = \{x_1, x_2\}_\hbar = 0$$

$$\begin{aligned}
\{u_1, u_3\}_\hbar &= u_1 *_\hbar u_3 - u_3 *_\hbar u_1 \\
&= u_1u_3 + \frac{i\hbar}{2}\omega^{13}\partial_1 u_1 \partial_3 u_3 - \left(u_3u_1 + \frac{i\hbar}{2}\omega^{31}\partial_3 u_3 \partial_1 u_1\right) \\
&= u_1u_3 + \frac{i\hbar}{2} - (u_3u_1 - \frac{i\hbar}{2}) \\
&= u_1u_3 + \frac{i\hbar}{2} - u_3u_1 + \frac{i\hbar}{2} = i\hbar \\
&= \{u_1, u_3\}_\hbar = \{x_1, p_1\}_\hbar = i\hbar
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{u_3,u_4\}_\hbar &= u_3 *_\hbar u_4 - u_4 *_\hbar u_3 \\
&= u_3u_4 + \frac{i\hbar}{2}\omega^{34}\partial_3 u_3 \partial_4 u_4 - \left(u_4u_3 + \frac{i\hbar}{2}\omega^{43}\partial_4 u_4 \partial_3 u_3 \right) \\
&= u_3u_4 + 0 - u_4u_3 - 0 \\
&= u_3u_4 - u_4u_3 = 0 \\
&= \{u_3,u_4\} = \{p_1,p_2\}_\hbar = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{u_4,u_2\} &= u_4 *_\hbar u_2 - u_2 *_\hbar u_4 \\
&= u_4u_2 + \frac{i\hbar}{2}\omega^{42}\partial_4 u_4 \partial_2 u_2 - \left(u_2u_4 + \frac{i\hbar}{2}\omega^{24}\partial_2 u_2 \partial_4 u_4 \right) \\
&= u_4u_2 - \frac{i\hbar}{2} - (u_2u_4 + \frac{i\hbar}{2}) \\
&= u_4u_2 - \frac{i\hbar}{2} - u_2u_4 - \frac{i\hbar}{2} = -i\hbar \\
&= \{u_4,u_2\}_\hbar = \{p_2,x_2\}_\hbar = -i\hbar
\end{aligned}
$$

با ادامه این محاسبات می‌توان بقیه کروشه‌های پواسون دگرگونش یافته توسط ضرب مویال ستاره‌ای $\hbar$ را بدست آورد. در حالت کلی خواهیم داشت

$$\{x_i,x_j\}_\hbar = 0 \quad , \quad \{x_i,p_j\}_\hbar = i\hbar\delta_{ij} \quad , \quad \{p_i,p_j\}_\hbar = 0 \quad , \mathrm{i,j} = 1,2$$

حال با توجه به رابطه کوانتش دیراک برای این سیستم داریم

$$\{f,g\} \to \frac{1}{i\hbar}[O_f,O_g]$$

که در آن f,g مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی هستند و O_f,O_g عملگرهای کوانتومی مشابه این مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی‌اند. دراینجا به اختصار عملگرهای کوانتومی مکان و تکانه را به صورت $O_{p_i} = P_i \ , \ O_{x_i} = X_i$ نشان می‌دهیم. این عملگرها جبرکوانتومی هایزنبرگ را بوجود می‌آورند

$$[X_i,X_j] = 0 \quad , \quad [X_i,P_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad , \quad [P_i,P_j] = 0$$

1-3 فرمولبندی مکانیک کلاسیک ناجابجایی

با مطالعه دقیق مکانیک کلاسیک ناجابجا، می‌توان به مکانیک کوانتومی ناجابجا رسید، زیرا گذرگاه بین مکانیک کلاسیک ناجابجا و مکانیک کوانتومی ناجابجای در نظر گرفته شده، توسط رابطه کوانتش عمومی دیراک محقق می‌شود.

برای آشنایی با مکانیک کلاسیک ناجابجا به تعریف دیگر دگرگونش عمومی ستاره‌ای α بر روی جبر پواسون مشاهده‌پذیرهای کلاسیکی می‌پردازیم

$$(f *_\alpha g)(u) = \exp\left[\frac{1}{2}\alpha^{ab}\partial_a^{(1)}\partial_b^{(2)}\right] f(u_1)g(u_2)\Big|_{u_1=u_2=u} \qquad (1\text{-}4)$$

از این رابطه نتایج زیر بدست می‌آید

$$\{x_i, x_j\}_\alpha = \theta_{ij} \quad , \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad , \quad \{p_i, p_j\}_\alpha = \beta_{ij} \qquad (1\text{-}5)$$

برای بدست آوردن رابطه بالا به مثال فضای فاز چهار بعدی برگردیم

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 \\ u_3 = p_1 \\ u_4 = p_2 \end{cases}$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

باید توجه داشت که ماتریسهای بالا توسط روابط زیر تولید می‌شوند

$$\theta_{ij} = \varepsilon_{ij}\theta \quad , \quad \beta_{ij} = \varepsilon_{ij}\beta \quad i, j = 1,2$$

بنابراین برای ماتریس α داریم